Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8.   10 | - | 0 | , | 8   Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

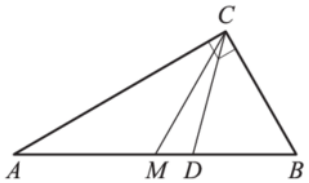
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Составитель: Школа Пифагора

Часть 1

Ответом к заданиям* 1–12 *является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №* 1 *справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Острый угол B прямоугольного треугольника равен 66°. Найдите угол между биссектрисой CD и медианой CM, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

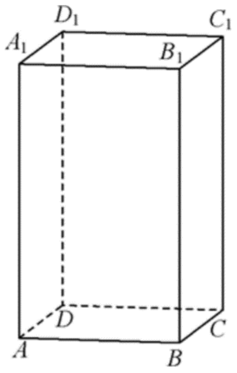


Ответ: ___________________________.

2 Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны 3 и 5, а угол между ними равен 60°. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Ответ: ___________________________.

3 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, D, A_1, B, C, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 5$.



Ответ: ____________________________.

4 Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 80 докладов – первые два дня по 12 докладов, остальные распределены поровну между третьим и четвёртым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Ответ: ____________________________.

5 Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

Ответ: ____________________________.

6 Найдите корень уравнения

$6^{1+3x} = 36^{2x}$.

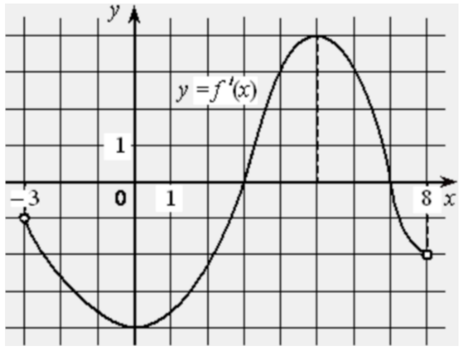
Ответ: ____________________________.

7 Найдите значение выражения

$$\frac{\log_5 2}{\log_5 13} + \log_{13} 0{,}5.$$

Ответ: ____________________________.

8 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.



Ответ: ____________________________.

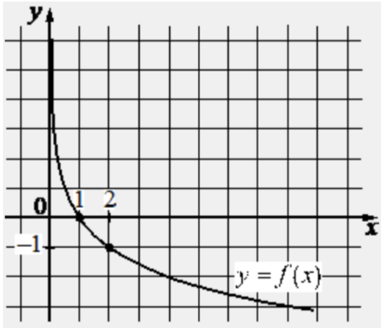
9 Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_п = 25°C$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0{,}3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_в = 57°C$ до температуры T, причём $x = \alpha \cdot \frac{cm}{\gamma} \cdot \log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п}$, где $c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot °\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot °\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}4$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 56 м.

Ответ: ____________________________.

10 Имеется два сосуда. Первый содержит 80 кг, а второй – 70 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 63% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 65% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Ответ: ___________________________.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(16)$.



Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции

$y = (2x + 15) \cdot e^{2x+16}$ на отрезке $[-12; -2]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$\log_{13}\left(\cos 2x - 9\sqrt{2}\cos x - 8\right) = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 13$, $SC = 3\sqrt{17}$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC. Эта высота равна 12.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
б) Найдите объём пирамиды $SABC$.

15 Решите неравенство

$$\log_{0,5}(x^3 - 3x^2 - 9x + 27) \le \log_{0,25}(x - 3)^4.$$

16 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 1 464 100 рублей, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 2 674 100 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 17

17 В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M.

а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.
б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOB, если $AB = \sqrt{10}$, а $BC = 2BM$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a+7)^2 = |x - 7 - a| + |x + a + 7|$$

имеет единственный корень.

19 На доске написано n единиц подряд. Между некоторыми из них расставляют знаки «+» и считают получившуюся сумму. Например, если было написано 10 единиц, то можно получить сумму 136: 1+1+111+11+11+1=136

а) Можно ли получить сумму 141, если $n = 60$?
б) Можно ли получить сумму 141, если $n = 80$?
в) Для скольких значений n можно получить сумму 141?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	21	
2	7,5	
3	30	
4	0,35	
5	0,6	
6	1	
7	0	
8	7	
9	33	
10	28	
11	-4	
12	-1	
13	а) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n; n \in Z$ б) $-\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}$	
14	96	
15	$[-2;3)\cup(3;+\infty)$	
16	10	
17	$3\sqrt{2}$	
18	$\{-5\}\cup\{-9\}$	
19	а) да б) нет в) 15	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

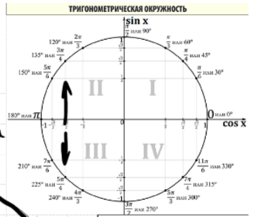
При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 17

13 а) Решите уравнение

$$\log_{13}\left(\cos 2x - 9\sqrt{2}\cos x - 8\right) = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.



ИСТОЧНИКИ

Досрочная волна 2023

Основная волна 2017

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА

Если $\log_a b = c$, то $a^c = b$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
3. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
4. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

а) $\cos 2x - 9\sqrt{2}\cos x - 8 = 1$

$\cos 2x - 9\sqrt{2}\cos x - 9 = 0$

$2\cos^2 x - 1 - 9\sqrt{2}\cos x - 9 = 0$

$2\cos^2 x - 9\sqrt{2}\cos x - 10 = 0$

Пусть $\cos x = t$

$2t^2 - 9\sqrt{2}t - 10 = 0$

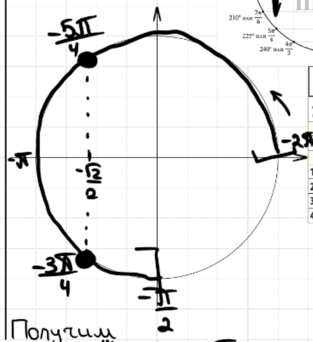
$D = (-9\sqrt{2})^2 - 4\cdot 2\cdot(-10) = 242 = 121\cdot 2$

$t = \frac{9\sqrt{2} \pm 11\sqrt{2}}{4}$

$t = 5\sqrt{2}$; $\cos x = 5\sqrt{2}$ нет решений

$t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ n\in Z$

б) Отберём корни с помощью окружности



Получим

$x = -\frac{\pi}{1} - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$

$x = -\frac{\pi}{1} + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$

Ответ: а) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ n\in Z$
б) $-\frac{5\pi}{4};\ -\frac{3\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

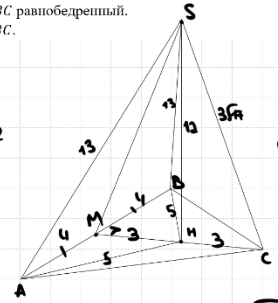
14 В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 13$, $SC = 3\sqrt{17}$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC. Эта высота равна 12.

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2017

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите объём пирамиды $SABC$.



а) ① Пусть SH - высота

$\triangle SAH$ - прямоуг. т.к. $SH \perp$ пл. осн.

$AH = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$

$\triangle SBH$ - прямоуг.

$BH = 5$

② $\triangle ABH$ - р/б.

MH - медиана

значит MH высота

$\angle BMC = 90°$

значит CM - высота и медиана $\triangle ABC$

$\triangle ABC$ - р/б ■

б) $V_{пир} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CM\cdot SH$

① $\triangle SCH$:

$CH = \sqrt{(3\sqrt{17})^2 - 12^2} = 3 = MH$

$\triangle BMH$:

$BM = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6\cdot 12 = 96$

Ответ. 96.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15 Решите неравенство

$$\log_{0,5}(x^3-3x^2-9x+27) \le \log_{0,25}(x-3)^4.$$

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2023

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ	
1	$\log_a b + \log_a c = \log_a(b\cdot c)$
2	$\log_a b - \log_a c = log_a \frac{b}{c}$
3	$\log_a b^m = m\cdot\log_a b$
4	$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\cdot\log_a b$
5	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
6	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

ФСУ	
1	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
2	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
4	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
5	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
6	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
7	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

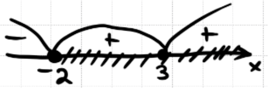
$$\log_{0,5}(x^2\cdot(x-3)-9\cdot(x-3)) \le \log_{0,5}(x-3)^2$$

$$\begin{cases} ① \ (x-3)\cdot(x^2-9) \ge (x-3)^2 \\ ② \ (x-3)\cdot(x^2-9) > 0 \\ ③ \ (x-3)^2 > 0 \end{cases}$$

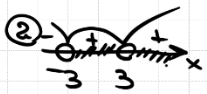
① $(x-3)\cdot(x-3)(x+3)-(x-3)^2 \ge 0$

$(x-3)^2\cdot(x+3-1) \ge 0$

$(x-3)^2\cdot(x+2) \ge 0$



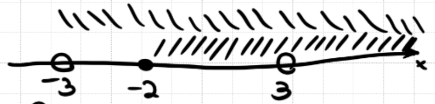
②



③ $x-3 \ne 0$

$x \ne 3$

Найдём пересечение:



Ответ: $[-2;\,3)\cup(3;+\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 1 464 100 рублей, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 2 674 100 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r.

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Пересдача 2024
Основная волна 2017
Ященко 2018
Семёнов 2015

Пусть S – сумма долга

$\left(1+\frac{r}{100}\right)=b$

март – месяц платежа

$x = 1\,464\,100$

$y = 2\,674\,100$

Кредит на 4 года

Дата	Сумма долга
ч 20	S
я 21	$S\cdot b$
м 21	$S\cdot b - x$
я 22	$S\cdot b^2 - x\cdot b$
м 22	$S\cdot b^2 - x\cdot b - x$
я 23	$S\cdot b^3 - x\cdot b^2 - x\cdot b$
м 23	$S\cdot b^3 - x\cdot b^2 - x\cdot b - x$
я 24	$S\cdot b^4 - x\cdot b^3 - x\cdot b^2 - x\cdot b$
м 24	$S\cdot b^4 - x\cdot b^3 - x\cdot b^2 - x\cdot b - x = 0$

$$\begin{cases} ① \ S\cdot b^4 - x\cdot b^3 - x\cdot b^2 - x\cdot b - x = 0 \\ ② \ S\cdot b^2 - y\cdot b - y = 0 \end{cases}$$

Выразим $Sb^2 = y\cdot b + y$

Подставим:

$(y\cdot b + y)\cdot b^2 - x\cdot b^3 - x\cdot b^2 - x\cdot b - x = 0$

$y\cdot b^3 + y\cdot b^2 - x\cdot b^3 - x\cdot b^2 - x\cdot b - x = 0$

$y\cdot b^2\cdot(b+1) - x\cdot b^2\cdot(b+1) - x\cdot(b+1) = 0$

$(b+1)\cdot(yb^2 - x\cdot b^2 - x) = 0$

$b = -1$

$1+\frac{r}{100} = -1$

Пост. корень

$y\cdot b^2 - x\cdot b^2 - x = 0$

$b^2\cdot(y-x) = x$

$b^2 = \frac{x}{y-x}$

$b^2 = \frac{1\,4641\cancel{00}}{1\,2100\cancel{00}} = \frac{121}{100}$

$b = \frac{11}{10}$

$1+\frac{r}{100} = \frac{11}{10}$

$\frac{r}{100} = 0,1$

$r = 10\%$

Кредит на 2 года

Дата	Сумма долга
ч 20	S
я 21	Sb
м 21	$Sb - y$
я 22	$Sb^2 - y\cdot b$
м 22	$Sb^2 - y\cdot b - y = 0$

Ответ: 10

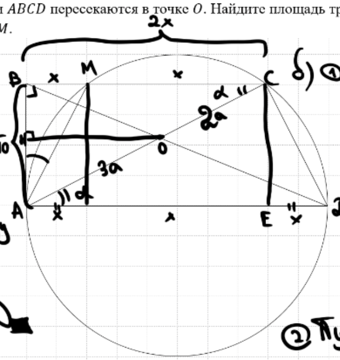
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 17

17 В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M.

а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.

б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOB, если $AB = \sqrt{10}$, а $BC = 2BM$.



а) Пусть $\angle CAD = \alpha$

Тогда $\angle ACM = \alpha$ (накрест. леж.)

$\smile AM = 2\angle ACM = 2\alpha$

$\angle BAM = \frac{1}{2} \smile AM = \alpha$

(т. об угле между кас. и хордой)

Получаем

$\angle BAM = \alpha = \angle CAD$ ■

б) ① Пусть $BM = x$, $BC = 2x$

Тогда $CM = x$

по т. о кас. и сек.

$AB^2 = BM \cdot BC$

$10 = x \cdot 2x$

$2x^2 = 10$

$x = \sqrt{5}$

② Пусть CE – высота трапеции $ADCM$

Тогда $DE = x$

$ADCM$ – р/б трап.

$AD = 3x$

③ $\triangle BOC \sim \triangle AOD$ по 2 углам (...)

$\frac{BC}{AD} = \frac{2x}{3x} = \frac{CO}{AO} = \frac{2a}{3a}$

④ Пусть OH – высота $\triangle AOB$

$\triangle ABC \sim \triangle AOH$ по 2 углам (...)

$k = \frac{5a}{3a} = \frac{BC}{OH}$

$\frac{5}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{OH}$ $\quad OH = \frac{2 \cdot 3\sqrt{5}}{5}$

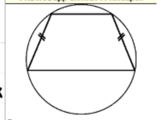
$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{2 \cdot 3\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{2}$

Ответ: $3\sqrt{2}$.

ИСТОЧНИКИ

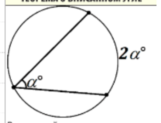
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2017

РАВНОБЕДРЕННАЯ ТРАПЕЦИЯ



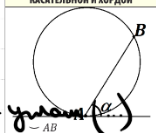
Если трапеция вписана в окружность, то она - равнобедренная

ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ



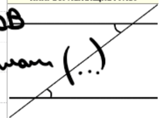
Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается

ТЕОРЕМА ОБ УГЛЕ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ХОРДОЙ



$\alpha = \frac{\smile AB}{2}$

НАКРЕСТ ЛЕЖАЩИЕ УГЛЫ

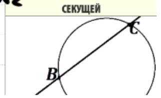


Если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны (признак параллельности прямых)

СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

180°

ТЕОРЕМА О КАСАТЕЛЬНОЙ И СЕКУЩЕЙ



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 17

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a+7)^2 = |x - 7 - a| + |x + a + 7|$$

имеет единственный корень.

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2019 (36 вар)
Семёнов 2015
Основная волна 2013

1) $x^2 + (a+7)^2 - |x-7-a| - |x+a+7| = 0$

Пусть $f(x) = x^2 + (a+7)^2 - |x-7-a| - |x+a+7|$

$f(-x) = (-x)^2 + (a+7)^2 - |-x-7-a| - |-x+a+7| = x^2 + (a+7)^2 - |x+a+7| - |x-7-a|$

$f(-x) = f(x)$, значит $f(x)$ – чётная ф-ция

единств. корень чётная ф-ция может иметь, только если это $x=0$

2) Найдём при каких a $x=0$

$0^2 + (a+7)^2 = |0-7-a| + |0+a+7|$

$(a+7)^2 = |a+7| + |a+7|$

$|a+7|^2 - 2|a+7| = 0$

$|a+7| \cdot (|a+7| - 2) = 0$

$|a+7| = 0$ $\quad$ $|a+7| = 2$

$a+7=0$ $\quad$ $a+7=2$ $\quad$ $a+7=-2$

$a=-7$ $\quad$ $a=-5$ $\quad$ $a=-9$

3) Проверим при каких из этих a будет единств. реш.

Если $a=-7$, то

$x^2 = |x| + |x|$

$|x|^2 - 2|x| = 0$

$|x| \cdot (|x|-2) = 0$

$|x| = 0$ $\quad$ $|x| = 2$

$x=0$ $\quad$ $x=2$ $\quad$ $x=-2$

3 реш., т.е. $a \neq -7$

Если $a=-5$, то

$x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$

Если $x>2$, то $x^2 + 4 = x - 2 + x + 2$

$x^2 - 2x + 4 = 0$

$(x^2 - 2x + 1) + 3 = 0$

$(x-1)^2 + 3 = 0$

нет реш.

Если $-2 \leq x \leq 2$, то $x^2 + 4 = -x + 2 + x + 2$

$x^2 = 0$

$x = 0$ – ед. реш

Если $x < -2$, то $x^2 + 4 = -x + 2 - x - 2$

$x^2 + 2x + 4 = 0$

нет. реш.

т.е. при $a = -5$ 1 реш

Если $a=-9$, то

$x^2 + 4 = |x+2| + |x-2|$

x – единст. реш.

Ответ: $\{-9\} \cup \{-5\}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 17

19 На доске написано n единиц подряд. Между некоторыми из них расставляют знаки «+» и считают получившуюся сумму. Например, если было написано 10 единиц, то можно получить сумму 136: 1+1+111+11+11+1=136

а) Можно ли получить сумму 141, если $n = 60$?
б) Можно ли получить сумму 141, если $n = 80$?
в) Для скольких значений n можно получить сумму 141?

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
Основная волна 2020

а) Ответ: да, если взять 9 раз по 11 и 42 раза по 1
$9 \cdot 11 + 42 \cdot 1 = 141$

а) Да, например, если взять 9 раз по 11 и 42 раза по 1
Получаем:
$9 \cdot 11 + 42 \cdot 1 = 141$
Ответ: а) да.

б) ① Можно ли использовать 111?
$S \geqslant 111 + 77 \cdot 1$
$S \geqslant 188$
⇒ Можно использовать только 1 и 11

② Если взять 10 слагаемых 11, то $S = 110 + 60$
$S = 170$ ×

Если взять >10 слагаемых 11, то $S > 170$

Если взять 9 слаг. 11, то $S = 99 + 62$
$S = 161$ ×

Если взять 8 слаг. 11, то $S = 88 + 64$
$S = 152$ ×

Если взять 7 слаг. 11, то $S = 77 + 66$
$S = 143$ ×

Если взять 6 слаг. 11, то $S = 66 + 68$
$S = 134$ ×

Если взять <6 слаг. 11, то $S < 134$
⇒ Получить сумму 141 невозможно.
Ответ: б) нет.

ОТВЕТ:	а) да
	б) нет
	в) 15

в) ① Числа 1111 и больше использовать нельзя

② Число 111 можно использовать только 1 раз

с двумя 11: $111 + 2 \cdot 11 + 8 \cdot 1$, $n = 15$
с одной 11: $111 + 11 + 19 \cdot 1$, $n = 24$
без 11: $111 + 30 \cdot 1$, $n = 33$

③ Теперь используем только числа 11 и 1
Число 11 можно использовать не более 12 раз

Если 11 использовать 12 раз, то $12 \cdot 11 + 9 \cdot 1$ — $n = 33$ (уже было)
11 раз, то $11 \cdot 11 + 20 \cdot 1$ — $n = 42$
10 — $n = 51$
9 — $n = 60$
8 — $n = 69$
7 — $n = 78$
6 — $n = 87$
5 — $n = 96$
4 — $n = 105$
3 — $n = 114$
2 — $n = 123$
1 — $n = 132$
0 — $n = 141$

Ответ: в) 15.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 17