Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Новогодний тренировочный вариант № 522/122

(совместный проект alexlarin.net и egemathschool.ru)

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведенному ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

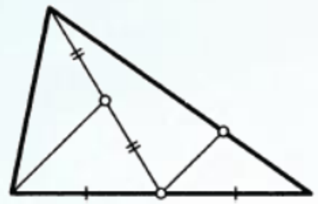
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1-12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительные, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

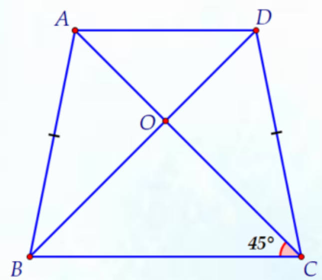
❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄❄

1.1 Вершину треугольника соединили отрезком с серединой его медианы. Второй отрезок проходит через основание медианы и параллелен первому. Найдите отношение большего из этих параллельных отрезков к меньшему.



Ответ: ________________________.

1.2 Диагональ равнобедренной трапеции составляет с основанием угол 45°. Найдите длину диагонали, если площадь трапеции равна **2026**. В ответе запишите длину диагонали, умноженную на $\sqrt{1013}$.

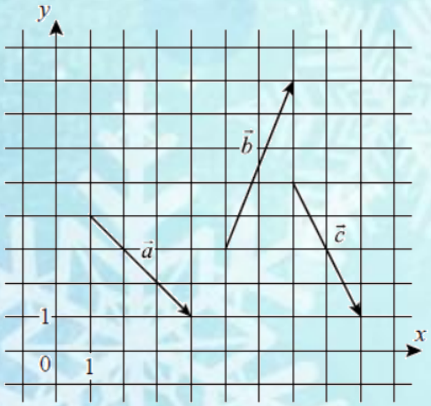


Ответ: ________________________.

2.1 На координатной плоскости даны три точки $A(1;1)$, $B(\mathbf{2026};1)$, $C(1;\mathbf{2025})$. Найдите угол BAC в градусах.

Ответ: ________________________.

2.2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите значение выражения $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.



Ответ: ________________________.

3.1 В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна $4\sqrt{3}$, а высота равна 8. Через высоту пирамиды проведена плоскость. Найдите наименьшую площадь сечения пирамиды такой плоскостью.

Ответ: ________________________.

3.2 Объем прямой призмы равен $1013^2\cdot\sqrt{3}$. Основание призмы – правильный треугольник со стороной **2026**. Найдите высоту призмы.

Ответ: ________________________.

4.1 Имеется три пакета с зернами кукурузы: в первом пакете 10 зерен, из них 8 высшей категории, во втором 9 зерен, из них 5 высшей категории, в третьем 11, из них 3 высшей категории. Наудачу берут по одному зерну из каждого пакета. Найти вероятность того, что все три зерна окажутся высшей категории. Ответ округлите до сотых.

Ответ: ________________________.

4.2 В большом новогоднем сапожке лежат запечатанные конверты с сюрпризами: 3 конверта с надписью «Поездка в Дубай», 4 конверта с надписью «Ноутбук», 3 конверта с надписью «Поездка в горы». Конверты одинаковы на ощупь и перемешаны. Иннокентий Львович наугад вытаскивает один конверт из сапожка. Какова вероятность, что ему достанется конверт с надписью «Поездка в Дубай»?

Ответ: ________________________.

5.1 Имеется три партии деталей — по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и вторично из той же партии наудачу извлекают деталь, которая тоже оказывается стандартной. Найти вероятность того, что детали извлекались из третьей партии. Ответ округлите до сотых.

Ответ: ________________________.

5.2 У Деда Мороза две стопки писем от детей: в первой стопке 4 письма: 3 с пожеланием «мир» и 1 с пожеланием «компьютер», во второй стопке 5 писем: 4 с пожеланием «мир» и 1 с пожеланием «компьютер». Дед Мороз случайно выбирает одну стопку (с равной вероятностью) и вынимает из неё одно письмо. Какова вероятность, что письмо окажется с пожеланием «мир»?

Ответ: ________________________.

6.1 Решите уравнение $\dfrac{3}{x^2-6x+9}=x^2-6x+7$. Если корней несколько, в ответе укажите их сумму.

Ответ: ________________________.

6.2 Найдите корень уравнения

$$2025^x-2025\cdot2026^{x-1}=2026^x-2026\cdot2025^{x-1}.$$

Ответ: ________________________.

7.1 Найдите значение выражения $195\cdot\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}\right)$.

Ответ: ________________________.

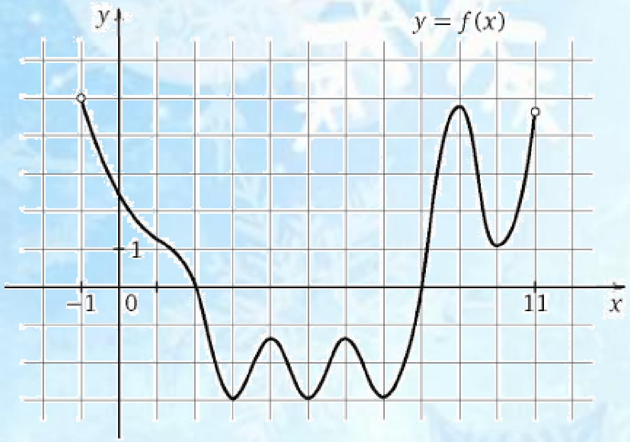
7.2 Найдите значение выражения $\dfrac{2026\sin\left(\frac{\pi}{2026}\right)}{\sin\left(\frac{2025\pi}{2026}\right)}$.

Ответ: ________________________.

8.1 Найдите ординату точки, в которой касательная к графику функции $y=21x^3-9x^7+x-11$ в точке $x_0=1$ пересекает ось ординат.

Ответ: ________________________.

8.2 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-1;11)$. Найдите число точек графика, в каждой из которых касательная к нему параллельна прямой $y=\dfrac{2025}{2026}$ или совпадает с ней.



Ответ: ________________________.

9.1 Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U=U_0\sin(\omega t+\varphi)$, где t — время в секундах, $U_0=2$ В — амплитуда, $\omega=60\,^0$/с — частота, $\varphi=-15^0$ — фаза. Датчик настроен так, что если напряжение в нём не ниже чем 1 В, то загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

Ответ: ________________________.

9.2 Зависимость количества проданных килограммов салата «Селёдка под шубой» q (в сотнях кг) от цены p (рублей за килограмм) перед Новым годом задаётся формулой: $q=90-3p$. При этом если цена превышает 25 рублей за кг, то салат перестают покупать даже самые отчаянные покупатели, поэтому $p\le 25$. Выручка кулинарного цеха R (в тысячах рублей) считается как $R(p)=q\cdot p$.
Хозяйка цеха Зинаида Семёновна хочет, чтобы выручка была не меньше 600 тысяч рублей, но при этом цена была максимально высокой (чтобы хоть как-то оправдать стоимость трёх слоёв майонеза).
Найдите максимальную цену p (в рублях), удовлетворяющую этому требованию.

Ответ: ________________________.

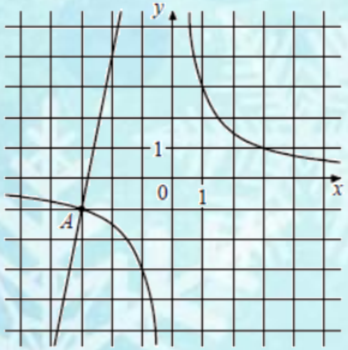
10.1 В двух сосудах имеется вода разной температуры. Из этой воды составляют смеси. Если отношение объемов воды, взятой из первого и второго сосудов, равно 1:3, то температура смеси будет 49°, а если 2:5, то температура смеси будет 48°. Найти температуру воды в первом сосуде (считая, что плотность и удельная теплоемкость воды не зависят от температуры).

Ответ: ________________________.

10.2 Команда должна приготовить волшебные снежки для новогодней битвы у ледяного замка. Известно, что: Дед Мороз и Снеговик вместе лепят все снежки за 6 часов, Снеговик и Ледяной Гном вместе справляются за 12 часов, Дед Мороз и Ледяной Гном вместе делают все снежки за 8 часов. За сколько минут приготовят все снежки все трое, работая вместе?

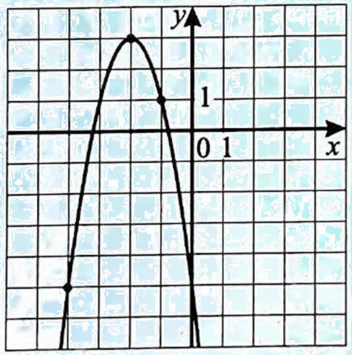
Ответ: ________________________.

11.1 На рисунке изображены графики функций $f(x)=\frac{k}{x}$ и $g(x)=ax+b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: ________________________.

11.2 На рисунке изображен график функции $f(x)=ax^2+bx+c$. Найдите значение $f(7)+2025$.



Ответ: ________________________.

12.1 Найдите наименьшее значение функции $y=\left|x^2+2x-3\right|+\frac{3}{2}\cdot\ln x$ на отрезке $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Ответ: ________________________.

12.2 Найдите точку минимума функции $y=\frac{2\left(x^2+2026\right)}{2x-2025}$.

Ответ: ________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13.1 А) Решите уравнение $\sin x-\cos x=\sqrt{1+\sin 2x}-1$.

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\pi\right]$.

13.2 А) Решите уравнение

$$\sin^2\left(\frac{2025\pi}{2}+x\right)+\sin\left(x+\frac{2026\pi}{2}\right)=2\cos^2 x-\frac{3}{2}\sin x-1.$$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

14.1 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=\sqrt{7}$, $BC=4$, $AA_1=3$. Через центр грани AA_1D_1D перпендикулярно диагонали BD_1 проходит плоскость α, которая пересекает прямую A_1B_1 в точке N.

А) Докажите, что $B_1N:NA_1=3:1$

Б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC.

14.2 Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* с основанием *ABCD* равны 16. Точка *O* – центр основания пирамиды. Плоскость, параллельная прямой *SB* и проходящая через точку *O*, пересекает рёбра *SA* и *SD* в точках *K* и *L* соответственно. Точка *K* делит ребро *SA* в отношении $SK:KA=3:5$.

А) Докажите, что точка L — середина ребра SD.

Б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость OKL пересекает грань SCD.

15.1 Решите неравенство:

$$10\cdot 3^{\left(\log_3\left(\log_2 x\right)\right)^2}\le \log_2^3 x+\left(\log_2 x\right)^{\log_3\left(\log_2 x\right)}.$$

15.2 Решите неравенство: $\dfrac{\log_{2025}\left(x^2-2026x+2025\right)-1}{2026^x-2026^{2027}}\ge 0$.

16.1 Доход нефтяной компании (в у.е.) равен численно произведению квадрата числа геологов на куб числа добытчиков. Наем одного геолога обходится в 16 у.е., одного добытчика — в 9 у.е. Если доход заданной величины получен при наименьшем возможном расходе на наем, найдите отношение числа геологов к числу добытчиков.

16.2 15 декабря 2025 года Дед Мороз, окончательно запутавшись в смете на подарки, решил взять кредит в банке «Ледниковый период» на сумму 12 млн рублей на 24 месяца. Помогает ему в этом Снегурочка, которая в прошлой жизни была финансовым аналитиком, но ушла в сказку из-за любви к оленям. Условия кредита, составленные хитрым банкиром Шкодиным:

– 1-го числа каждого месяца долг вырастает на r процентов – банк называет это «новогодней магией инфляции».

– со 2-го по 14-е число каждого месяца Дед Мороз должен одним платежом внести часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен уменьшаться ровно на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим 15-м числом – это условие называется «равномерное таяние долга, как снеговик в апреле».

– к 15 декабря 2027 года кредит должен быть полностью погашен – чтобы встретить Новый 2028 год без долгов и с чистой совестью.

Снегурочка, вооружившись волшебным калькулятором и глинтвейном, подсчитала, что общая сумма платежей в 2027 году составит 6 975 000 рублей.

Найдите r.

17.1 В треугольнике ABC $BC=8, AC=7$ проведена биссектриса BE, которая пересекает сторону AC в точке E, причём известно, что центр O вписанной в треугольник ABC окружности делит BE в отношении $BO:OE=2:1$.

А) Докажите, что сторона AB делится точкой касания вписанной окружности в отношении 5 : 7, считая от точки A.

Б) Найдите площадь треугольника ABC.

17.2 В канун Нового года Дед Мороз решил проверить, не забыл ли он геометрию за годы раздачи подарков. Он нарисовал на льду озера параллелограмм ABCD и обнаружил удивительный факт: биссектриса угла BAC оказалась перпендикулярна диагонали BD – «Вот это новогоднее чудо!» – воскликнул он. Эта биссектриса пересекла сторону BC в точке L.

А) Дед Мороз просит Вас помочь ему доказать, что $BL:LC=1:2$.

Подсказка от Снегурочки: «Используй свойство биссектрисы и то, что в параллелограмме диагонали делятся пополам — как мандарины на столе!»

Б) После доказательства Дед Мороз провел измерения и оказалось, что диагональ $BD=10$, $AL=8$. Найдите площадь четырёхугольника *DCLO*, где *O* – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

18.1 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\ln\left(x^2+a^2\right)\cdot\left(x^2-a-1\right)\cdot\sqrt{x-a+1}\le 0$$

имеет ровно одно или два решения.

18.2 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение:

$$\frac{\log_{2025}(x^2+(2a+1)x+a^2+a+2026)-\log_{2025}(2x^2+x+a^2-a+2025)}{\sqrt{3x-a+2025}\cdot\log_{2025}\left(2x+a-3\right)}=0$$

имеет единственный корень.

19.1 В турнире по футболу на кубок Содружества участвовали 6 команд из России и 12 команд из других стран СНГ. При победе в матче команда получала 2 очка, в случае ничьей 1 очко, при поражении 0 очков. После окончания турнира оказалось, что все команды набрали разное количество очков. При этом сумма очков российских команд была равна сумме очков всех команд из других стран.

А) Могли ли все российские команды не проиграть ни одного матча с командами из других стран?

Б) Могли ли российские команды побеждать во всех матчах с командами из других стран?

В) Может ли в тройке призеров турнира не быть ни одной российской команды?

19.2 В новогоднюю ночь Дед Мороз и Баба Яга устроили математическое соревнование. Дед Мороз написал на волшебной доске число 8 (по количеству своих оленей), а затем каждую минуту дописывал новое число, которое получалось либо удвоением какого-то из уже написанных чисел, либо сложением двух любых имеющихся на доске чисел.

А) Могло ли на доске появиться число 2028?

Б) Могла ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 96?

В) Через какое наименьшее время (в минутах) на доске могло появиться число 896?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.