Вариант I

Задача 1. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 2025 в ряд так, что для любого $k = 1, 2, \ldots, 2025$ сумма первых k чисел в этом ряду нацело делится на k-е число в ряду?

Ответ: Подходит расстановка

$$1013 \quad 1 \quad 1014 \quad 2 \quad 1015 \quad 3 \quad \ldots \quad \underset{a_{2k-1}}{k+1012} \quad \underset{a_{2k}}{k} \quad \ldots \quad 2024 \quad 1012 \quad \underset{a_{2025}}{2025}$$

Решение. В ряду $a_1, \ldots, a_{2025}$ обозначим через S_i сумму начального отрезка ряда: $S_i = a_1 + a_2 + \ldots a_i$.

Заметим, что $S_{2025} = \frac{1}{2} \cdot 2025 \cdot 2026 = 2025 \cdot 1013$ — кратно $a_{2025} = 2025$.

Далее, для $k \leqslant 1012$ рассмотрим два случая.

Для отрезков чётной длины $2k$ последнее число равно $a_{2k} = k$ и сумма

$$\begin{aligned} S_{2k} &= (1012+1+1) + (1012+2+2) + \ldots + (1012+k+k) = \\ &= 1012k + 2 \cdot (1+2+\ldots+k) = \\ &= 1012k + k(k+1) = \\ &= k(1013+k) \end{aligned}$$

— кратна $a_{2k} = k$.

Для отрезков нечётной длины $2k-1$ последнее число равно $a_{2k-1} = 1012 + k$ и

$$S_{2k-1} = S_{2k} - a_{2k} = k(1013+k) - k = k(1012+k)$$

— кратно $a_{2k-1} = 1012 + k$.

Задача 2. На окружности через равные промежутки отметили 400 точек и провели все возможные хорды между ними. Хорду с концами в отмеченных точках назовем «чётной», если на большей дуге, которую она стягивает, лежит чётное число точек. В противном случае хорда «нечётная». Рядом с каждой вершиной написано число. Сумма квадратов этих чисел равна 100. На каждой хорде написано произведение чисел, стоящих на её концах. Сумма чисел на «чётных» хордах равна a, сумма чисел на «нечётных» хордах равна b. Найдите наибольшее возможное значение величины $a - b$.

Ответ: 50.

Решение. Обозначим числа по кругу $x_1, x_2, \ldots, x_{400}$, тогда

$$a = \sum_{\substack{k-l \\ \text{нечётно}}} x_k x_l, \quad b = \sum_{\substack{k-l \\ \text{чётно}}} x_k x_l.$$

Заметим, что

$$(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{399} - x_{400})^2 = \sum_{i=1}^{400} x_i^2 - 2(a-b) = 100 - 2(a-b) \geqslant 0,$$

а значит $a - b \leqslant 50$.

Равенство достигается при $\sum\limits_{i=1}^{200} x_{2i} = \sum\limits_{j=1}^{200} x_{2j-1}$, в частности при $x_1 = x_2 = \ldots = x_{400} = \frac{1}{2}$.

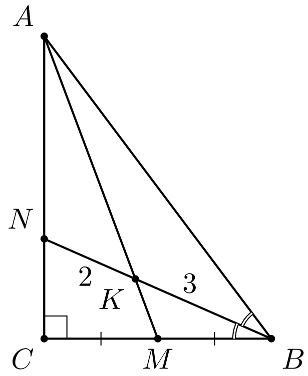
Задача 3. У Юры имеется сосуд, заполненный раствором кислоты в воде. Процентное содержание кислоты в растворе равно $59,04\%$. Юра несколько раз совершает следующую операцию. Юра выливает из сосуда $\frac{1}{4}$ всего раствора, а затем доливает в освободившееся место кислоту.

Сколько раз Юра совершил эту операцию, если процентное содержание кислоты в растворе стало равным $92,71\%$?

Ответ: 6.

Решение. Изначально воды в растворе $100-59,04=40,96$ процентов, а в конце $100-92,71=7,29$ процентов. Каждая операция уменьшает долю воды в $\frac{3}{4}$ раза. Ясно, что на это ушло 6 операций:

$$40,96\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^6=7,29, \quad \text{т. к. } 4096=4^6 \text{ и } 729=3^6.$$



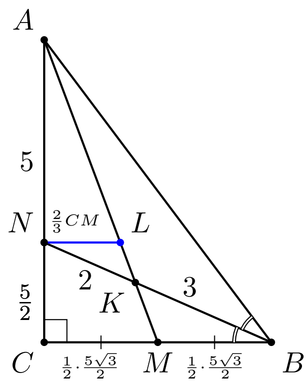
Задача 4.

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90^\circ$) медиана AM пересекает биссектрису BN в точке K. Известно, что $BK=3$, $KN=2$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: $\dfrac{75\sqrt{3}}{8}$

Решение. Выберем точку L на медиане AM так, что $NL \parallel BC$. Треугольники NLK и BMK подобны, а значит $NL:BM=2:3$. Точка M — середина стороны BC, поэтому $BM=CM$ и, следовательно, $NL:CM=2:3$.

Тогда из подобия треугольников ANL и ACM следует, что и $AN:AC=2:3$, а значит $AN:NC=2:1$. Точка N — основание биссектрисы, и значит $AB:CB$ тоже равно $2:1$.



Решение 1. Если $BC=x$, то $AB=2x$, $AC^2=AB^2-BC^2=3x^2$, $NC=\frac{AC}{3}=\frac{x}{\sqrt{3}}$. Из теоремы Пифагора для треугольника BNC получаем

$$25=\frac{x^2}{3}+x^2 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$BC=x=\frac{5\sqrt{3}}{2}, \quad AC=\sqrt{3}x=\frac{15}{2},$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{75\sqrt{3}}{8}$$

Решение 2. Из $AB:CB=2:1$ следует что $\angle B=60^\circ$. Теперь легко найти все длины. Поскольку $\angle NBC=\frac{1}{2}\angle B=30^\circ$, катет N вдвое меньше гипотенузы $BN=2+3=5$. Отсюда $NC=\frac{5}{2}$, $AN=2\cdot NC=5$ и $AC=\frac{5}{2}+5=\frac{15}{2}$ и $BC=\sqrt{3}\cdot NC=\frac{5\sqrt{3}}{2}$. Наконец,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{75\sqrt{3}}{8}$$

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{9}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}=9 \\ 4x^2+y^2+z^2=4 \\ 3\sqrt{3}x+y+\sqrt{3}z=3 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ или $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

Решение. Заметим, что в левых частях первых двух уравнений — суммы квадратов. Так можно записать квадраты длин векторов

$$\mathbf{a} = \left(\frac{1}{x}, \frac{3}{y}, \frac{1}{z}\right) \text{ и } \mathbf{b} = (2x, y, z)\,.$$

Согласно условию, $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$. Заметим, что скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равно

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \tfrac{1}{x} \cdot 2x + \tfrac{3}{y} \cdot y + \tfrac{1}{z} \cdot z = 6,$$

что совпадает с $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$, а значит вектора коллинеарны, причем $\mathbf{a} = \frac{3}{2}\mathbf{b}$. Поэтому

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{2} \cdot 2x \\ \dfrac{3}{y} = \dfrac{3}{2} \cdot y \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{3}{2} \cdot z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y = \pm\sqrt{2} \\ z = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Подставим эти значения в третье уравнение (выбор знака перед каждым слагаемым независим):

$$\pm 3 \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{2} = 3.$$

Равенство возможно только в двух случаях: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ или $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$.

Задача 6. Решите уравнение

$$(\sin x + 2)(\cos x + 2) = \frac{21}{8}.$$

Решение. Раскроем скобки:

$$\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = -\frac{11}{8}. \tag{1}$$

Обозначим $t = \sin x + \cos x$, тогда $t^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2\sin x \cos x$, а значит $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$. После замены переменной уравнение (1) примет вид

$$\tfrac{1}{2}(t^2 - 1) + 2t = -\frac{11}{8} \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + 4t + \frac{7}{4} = 0.$$

Оно имеет решения $t = -\frac{1}{2}$ и $t = -\frac{7}{2}$. Второе не подходит, так как $|t| \leqslant \sqrt{2}$. Осталось найти значения x, при которых $t = -\frac{1}{2}$.

$$\sin x + \cos x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = \pi \pm \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

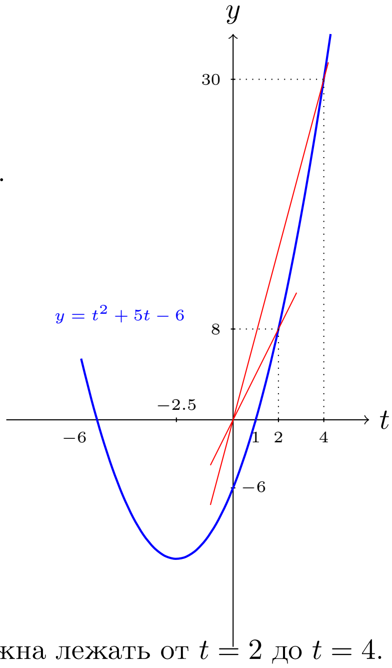
$$x = \frac{\pi}{4} + (2k - 1)\pi \pm \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}},\ k \in Z.$$

Задача 7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$16^{2x} + 5 \cdot 16^x = a \cdot 16^x + 6$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $a \in [4; 7,5]$.



Решение. Обозначим $t = 16^x$, тогда $t > 0$, а условие $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ эквивалентно $t \in [2, 4]$. Исходное уравнение примет вид

$$t^2 + 5t = at + 6 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + (5-a)t - 6 = 0.$$

Решение 1. Его корни имеют вид $t = \frac{1}{2}\left(a - 5 \pm \sqrt{(a-5)^2 + 24}\right)$. Левый корень отрицателен, что запрещено условием $t > 0$, а для правого условие $2 \leqslant t \leqslant 4$ равнозначно системе неравенств

$$2 \cdot 2 \leqslant a - 5 + \sqrt{a^2 - 10a + 49} \leqslant 2 \cdot 4,$$

$$9 - a \leqslant \sqrt{a^2 - 10a + 49} \leqslant 13 - a,$$

После возведения в квадрат из левого неравенства следует $a \geqslant 4$, а из правого $a \leqslant 7,5$.

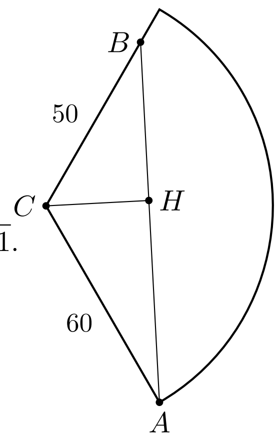
Необходима проверка. Подкоренное выражение неотрицательно всегда ($\sqrt{(a-5)^2 + 24}$). Правая часть $13 - a$ неотрицательна в полученном диапазоне.

Решение 2. Равенство $t^2 + 5t - 6 = at$ означает что парабола $t^2 + 5t - 6$ и прямая $y = at$ имеют общую точку — и эта точка должна лежать от $t = 2$ до $t = 4$. Парабола $t^2 + 5t - 6$ *выпукла вниз и пересекает ось* Oy *ниже нуля*, а значит подходит весь отрезок значений a, от пересечения прямой $y = at$ с параболой в точке $t = 2$ до точки $t = 4$ — и только он. Наклон a при этом варьируется от $\frac{2^2+5\cdot2-6}{2}$ до $\frac{4^2+5\cdot4-6}{4}$, то есть $a \in [4; 7,5]$.

Замечание. Для параболы $y = (t-13)^2$ *подобный вопрос: при каких значениях параметра* a *прямая* $y = at$ *пересекает параболу на отрезке* $[12, 14]$*? Если подставить крайние точки* $t = 12$ *и* $t = 14$ *и взять диапазон между ними, получим* $a \in [\frac{1}{14}, \frac{1}{12}]$*. Однако, очевидно, подходят и* $a < \frac{1}{14}$.

Задача 8. Гора имеет форму конуса с вершиной в точке C. Точка O — центр основания, точка A лежит на основании конуса, а точка B — на отрезке CA, причем $CA = 60$, $AB = 10$, $OA = 20$. Железная дорога проложена по кратчайшему пути вокруг горы из точки A в точку B. Точка H — ближайшая к вершине горы из всех точек железной дороги. Найдите длину пути BH.

Ответ: $\dfrac{400}{\sqrt{91}}$.



Решение. Кратчайшим путём вокруг горы на развёртке конуса будет отрезок AB. Точка H ближайшая к вершине C, а значит CH — высота в треугольнике ABC. Длина окружности основания равна $2\pi OA = 2\pi \cdot 20 = 40\pi$, поэтому $\angle ACB = \frac{2\pi OA}{CA} = \frac{40\pi}{60} = \frac{2\pi}{3} = 120°$.

Итак, в треугольнике ABC известны длины сторон $AC = 60$, $BC = 50$ и угол $\angle C = \frac{2\pi}{3}$, а надо найти BH. По теореме косинусов

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\tfrac{2\pi}{3}} = \sqrt{3600 + 2500 + 3000} = 10\sqrt{91}.$$

По теореме синусов

$$\frac{\sin\angle C}{AB} = \frac{\sin\angle B}{AC}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 10\sqrt{91}} = \frac{\sin\angle B}{60},$$

откуда $\sin\angle B = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$ и $\cos\angle B = \frac{8}{\sqrt{91}}$.

Наконец, треугольник CBH прямоугольный и $BH = BC \cdot \cos\angle B = 50 \cdot \frac{8}{\sqrt{91}} = \dfrac{400}{\sqrt{91}}$.

Задача 9. График функции $y(x) = -x^4 + 10x^3 - 33x^2 + \frac{124}{3}x - 13$ имеет две точки максимума и одну точку минимума. К графику провели касательную с двумя точками касания. Найдите длину отрезка касательной между точками касания.

Ответ: 5

Решение. Пусть касание происходит в точках $x = a$ и $x = b$, $a < b$. График функции $y(x)$ всюду ниже бикасательной. Поэтому разность касательной и функции всюду положительна и обращается в ноль в точках касания, а значит имеет вид

$$y_1(x) = (x-a)(x-b)(x^2+cx+d).$$

Парабола $y_2 = (x-a)(x-b)$ отрицательна внутри отрезка $[a,b]$ и положительна вне его, а функция $y(x)$ всюду неотрицательна. Чтобы соблюсти знак $y(x)$, парабола $y_3(x) = y/y_1 = x^2 + cx + d$ должна быть также отрицательной внутри отрезка $[a,b]$ и положительной вне его, а значит $y_3 = y_2$ и $y_1(x) = (x-a)(x-b)^2$.

Перемножая получаем, что

$$y_1(x) = x^4 - 2(a+b)x^3 + (a^2+4ab+b^2)x^2 - 2ab(a+b)x + a^2b^2.$$

Функция y_1 получена как разность линейной функции и $y(x)$, а значит коэффициенты y_1 при степенях x^4, x^3 и x^2 противоположны соответствующим коэффициентам $y(x)$. Для x^3 и x^2 получаем:

$$\begin{cases} -2(a+b) = -10 \\ a^2+4ab+b^2 = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 5 \\ 2ab = 8 \end{cases}$$

Эти уравнения имеют две пары корней, но поскольку $a < b$, подходит только $a = 1$ и $b = 4$. Отсюда можно найти координаты точек касания $\left(1, \frac{13}{3}\right)$ и $\left(4, \frac{25}{3}\right)$ и, наконец, искомое расстояние между ними:

$$\sqrt{(4-1)^2 + \left(\frac{25}{3} - \frac{13}{3}\right)^2} = 5.$$

Задача 10. В классе 24 ученика, у каждого ровно 3 друга среди одноклассников. Однажды на каникулах 6 учеников подписались на канал по олимпиадной математике. После этого ученики стали общаться между собой. Когда ученик узнаёт, что хотя бы двое из его друзей уже подписались на канал, он также подписывается на этот канал. Могло ли в итоге случиться, что весь класс подписался на канал?

Ответ: Нет.

Решение. Предположим противное, что весь класс подписался на канал. Рассмотрим *количество дружб среди подписчиков*. Каждый новый подписчик увеличивает его хотя бы на 2. С другой стороны, в итоге это количество составляет $24 \cdot 3/2 = 36$, а всего добавилось $24 - 6 = 18$ подписчиков, а значит каждый добавлял *ровно* по 2 дружбы. Но последний подписчик добавил 3 дружбы — противоречие.

Вариант II

Задача 1. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 2027 в ряд так, что для любого $k = 1, 2, \ldots, 2027$ сумма первых k чисел в этом ряду нацело делится на k-е число в ряду?

Ответ: Подходит расстановка

$$1014 \quad 1 \quad 1015 \quad 2 \quad 1016 \quad 3 \quad \ldots \quad \underset{a_{2k-1}}{k+1013} \quad \underset{a_{2k}}{k} \quad \ldots \quad 2026 \quad 1013 \quad \underset{a_{2027}}{2027}$$

Решение. В ряду $a_1, \ldots, a_{2027}$ обозначим через S_i сумму начального отрезка ряда: $S_i = a_1 + a_2 + \ldots a_i$.

Заметим, что $S_{2027} = \frac{1}{2} \cdot 2028 \cdot 2027$ — кратно $a_{2027} = 2027$.

Далее, для $k \leqslant 1013$ рассмотрим два случая.

Для отрезков чётной длины $2k$ последнее число равно $a_{2k} = k$ и сумма

$$\begin{aligned} S_{2k} &= (1013+1+1) + (1013+2+2) + \ldots + (1013+k+k) = \\ &= 1013k + 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + k) = \\ &= 1013k + k(k+1) = \\ &= k(1014+k) \end{aligned}$$

— кратна $a_{2k} = k$.

Для отрезков нечётной длины $2k-1$ последнее число равно $a_{2k-1} = 1013 + k$ и

$$S_{2k-1} = S_{2k} - a_{2k} = k(1014+k) - k = k(1013+k)$$

— кратно $a_{2k-1} = 1013 + k$.

Задача 2. На окружности через равные промежутки отметили 144 точки и провели все возможные хорды между ними. Хорду с концами в отмеченных точках назовем «чётной», если на большей дуге, которую она стягивает, лежит чётное число точек. В противном случае хорда «нечётная». Рядом с каждой вершиной написано число. Сумма квадратов этих чисел равна 36. На каждой хорде написано произведение чисел, стоящих на её концах. Сумма чисел на «чётных» хордах равна a, сумма чисел на «нечётных» хордах равна b. Найдите наибольшее возможное значение величины $a - b$.

Ответ: 18.

Решение. Обозначим числа по кругу $x_1, x_2, \ldots, x_{144}$, тогда

$$a = \sum_{\substack{k-l \\ \text{нечётно}}} x_k x_l, \quad b = \sum_{\substack{k-l \\ \text{чётно}}} x_k x_l.$$

Заметим, что

$$(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{143} - x_{144})^2 = \sum_{i=1}^{144} x_i^2 - 2(a-b) = 36 - 2(a-b) \geqslant 0,$$

а значит $a - b \leqslant 18$.

Равенство достигается при $\sum\limits_{i=1}^{144/2} x_{2i} = \sum\limits_{j=1}^{144/2} x_{2j-1}$, в частности при $x_1 = x_2 = \ldots = x_{144} = \frac{1}{2}$.

Задача 3. У Тани имеется сосуд, заполненный раствором кислоты в воде. Масса раствора 3 кг, процентное содержание кислоты в растворе равно 89,76%. Таня несколько раз совершает следующую операцию. Таня доливает в сосуд 1 кг кислоты, а затем выливает из сосуда 1 кг раствора. Сколько раз Таня совершила эту операцию, если процентное содержание кислоты в растворе стало равным $97,57\%$?

Ответ: 5.

Решение. Изначально воды в растворе $100-89,76=10,24$ %, а в конце $100-97,57=2,43$ %. Каждая операция уменьшает долю воды в $\frac{3}{4}$ раза. Ясно, что на это ушло 5 операций:

$$10,24\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5=2,43,\quad \text{т. к. } 1024=4^5 \text{ и } 243=3^5.$$

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90^\circ$) на отрезке BC выбрана точка M так, что $BM:MC=4:3$. Отрезок AM пересекает биссектрису BN в точке K. Известно, что $BK=3$, $KN=2$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: $\dfrac{675\sqrt{7}}{32}$

Решение. Выберем точку L на отрезке AM так, что $NL\parallel BC$. Треугольники NLK и BMK подобны, а значит $NL:BM=2:3$. Поскольку $BM=\frac{4}{3}\cdot CM$ и, следовательно, $NL:CM=8:9$.

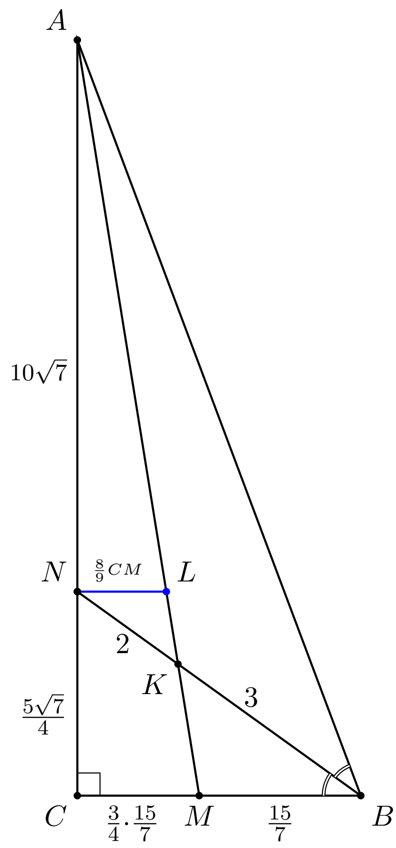
Тогда из подобия треугольников ANL и ACM следует, что и $AN:AC=8:9$, а значит $AN:NC=8:1$. Точка N — основание биссектрисы, и значит $AB:CB$ тоже равно $8:1$.

Если $BC=x$, то $AB=8x$, $AC^2=AB^2-BC^2=63x^2$, $NC=\frac{AC}{9}=\frac{x\sqrt{7}}{3}$. Из теоремы Пифагора для треугольника BNC получаем

$$25=\frac{7x^2}{9}+x^2\quad\Rightarrow\quad x=\frac{15}{4},$$

$$BC=x=\frac{15}{4},\quad AC=\frac{45\sqrt{7}}{4},$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{675\sqrt{7}}{32}$$



Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{4}{z^2}=9\\ x^2+9y^2+z^2=4\\ 2\sqrt{3}x-6y+\sqrt{3}z=2\end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ или $\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Решение. Заметим, что в левых частях первых двух уравнений — суммы квадратов. Так можно записать квадраты длин векторов

$$\mathbf{a}=\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{2}{z}\right)\ \text{ и } \mathbf{b}=(x,3y,z)\,.$$

Согласно условию, $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$. Заметим, что скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равно

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \tfrac{1}{x} \cdot x + \tfrac{1}{y} \cdot 3y + \tfrac{1}{z} \cdot z = 6,$$

что совпадает с $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$, а значит вектора коллинеарны, причем $\mathbf{a} = \frac{3}{2}\mathbf{b}$. Поэтому

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{2} \cdot x \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{2} \cdot y \\ \dfrac{2}{z} = \dfrac{3}{2} \cdot z \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ z = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Подставим эти значения в третье уравнение (выбор знака перед каждым слагаемым независим):

$$\pm 2\sqrt{2} \mp 2\sqrt{2} \pm 3 = 3.$$

Равенство возможно только в двух случаях: $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ или $\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Задача 6. Решите уравнение

$$(\sin x + 1)(\cos x + 1) = \frac{9}{8}.$$

Решение. Раскроем скобки:

$$\sin x \cos x + (\sin x + \cos x) = \frac{1}{8}. \tag{2}$$

Обозначим $t = \sin x + \cos x$, тогда $t^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2\sin x \cos x$, а значит $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$. После замены переменной уравнение (2) примет вид

$$\tfrac{1}{2}(t^2 - 1) + t = \frac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + 2t - \frac{5}{4} = 0.$$

Оно имеет решения $t = \frac{1}{2}$ и $t = -\frac{5}{2}$. Второе не подходит, так как $|t| \leqslant \sqrt{2}$. Осталось найти значения x, при которых $t = \frac{1}{2}$.

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \pm \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}, \ k \in Z.$$

Задача 7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$4^{2x} + 5 \cdot 4^x = a \cdot 4^x + 6$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Ответ: $a \in [4; 7,5]$.

Решение. Обозначим $t = 4^x$, тогда $t > 0$, а условие $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ эквивалентно $t \in [2, 4]$. Исходное уравнение примет вид

$$t^2 + 5t = at + 6 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + (5 - a)t - 6 = 0.$$

Решение 1. Его корни имеют вид $t = \frac{1}{2}\left(a - 5 \pm \sqrt{(a-5)^2 + 24}\right)$. Левый корень отрицателен, что запрещено условием $t > 0$, а для правого условие $2 \leqslant t \leqslant 4$ равнозначно системе неравенств

$$2 \cdot 2 \leqslant a - 5 + \sqrt{a^2 - 10a + 49} \leqslant 2 \cdot 4,$$

$$9 - a \leqslant \sqrt{a^2 - 10a + 49} \leqslant 13 - a,$$

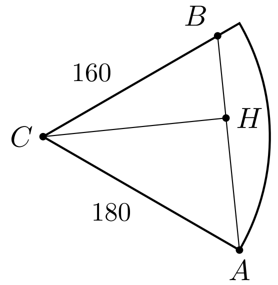
После возведения в квадрат из левого неравенства следует $a \geqslant 4$, а из правого $a \leqslant 7,5$.

Необходима проверка. Подкоренное выражение неотрицательно всегда ($\sqrt{(a-5)^2 + 24}$). Правая часть $13 - a$ неотрицательна в полученном диапазоне.

Решение 2. Равенство $t^2 + 5t - 6 = at$ означает что парабола $t^2 + 5t - 6$ и прямая $y = at$ имеют общую точку — и эта точка должна лежать от $t = 2$ до $t = 4$. Парабола $t^2 + 5t - 6$ выпукла вниз и пересекает ось Oy ниже нуля, а значит подходит весь отрезок значений a, от пересечения прямой $y = at$ с параболой в точке $t = 2$ до точки $t = 4$ — и только он. Наклон a при этом варьируется от $\frac{2^2+5\cdot 2-6}{2}$ до $\frac{4^2+5\cdot 4-6}{4}$, то есть $a \in [4; 7,5]$.

Замечание. Для параболы $y = (t-13)^2$ подобный вопрос: при каких значениях параметра a прямая $y = at$ пересекает параболу на отрезке $[12, 14]$? Если подставить крайние точки $t = 12$ и $t = 14$ и взять диапазон между ними, получим $a \in [\frac{1}{14}, \frac{1}{12}]$. Однако, очевидно, подходят и $a < \frac{1}{14}$.

Задача 8. Гора имеет форму конуса с вершиной в точке C. Точка O — центр основания, точка A лежит на основании конуса, а точка B — на отрезке CA, причем $CA = 180$, $AB = 20$, $OA = 30$. Железная дорога проложена по кратчайшему пути вокруг горы из точки A в точку B. Точка H — ближайшая к вершине горы из всех точек железной дороги. Найдите длину пути BH.



Ответ: $\frac{560}{\sqrt{73}}$.

Решение. Кратчайшим путём вокруг горы на развёртке конуса будет отрезок AB. Точка H ближайшая к вершине C, а значит CH — высота в треугольнике ABC. Длина окружности основания равна $2\pi OA = 2\pi \cdot 30 = 60\pi$, поэтому $\angle ACB = \frac{2\pi OA}{CA} = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3} = 60°$.

Итак, в треугольнике ABC известны длины сторон $AC = 180$, $BC = 160$ и угол $\angle C = \frac{\pi}{3}$, а надо найти BH. По теореме косинусов

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\angle C} = \sqrt{32400 + 25600 - 28800} = 20\sqrt{73}.$$

По теореме синусов

$$\frac{\sin\angle C}{AB} = \frac{\sin\angle B}{AC}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 20\sqrt{73}} = \frac{\sin\angle B}{180},$$

откуда $\sin\angle B = \frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{73}}$ и $\cos\angle B = \frac{7}{2\sqrt{73}}$.

Наконец, треугольник CBH прямоугольный и $BH = BC \cdot \cos\angle B = 160 \cdot \frac{7}{2\sqrt{73}} = \frac{560}{\sqrt{73}}$.

Задача 9. График функции $y(x) = -x^4 + 2x^3 + 3x^2 - \frac{8}{3}x + 3$ имеет две точки максимума и одну точку минимума. К графику провели касательную с двумя точками касания. Найдите длину отрезка касательной между точками касания.

Ответ: 5.

Решение. Пусть касание происходит в точках $x = a$ и $x = b$, $a < b$. График функции $y(x)$ всюду ниже бикасательной. Поэтому разность касательной и функции всюду положительна и обращается в ноль в точках касания, а значит имеет вид

$$y_1(x) = (x-a)(x-b)(x^2 + cx + d).$$

Парабола $y_2 = (x-a)(x-b)$ отрицательна внутри отрезка $[a, b]$ и положительна вне его, а функция $y(x)$ всюду неотрицательна. Чтобы соблюсти знак $y(x)$, парабола $y_3(x) = y/y_1 = x^2 + cx+d$ должна быть также отрицательной внутри отрезка $[a, b]$ и положительной вне его, а значит $y_3 = y_2$ и $y_1(x) = (x-a)(x-b)^2$.

Перемножая получаем, что

$$y_1(x) = x^4 - 2(a+b)x^3 + (a^2+4ab+b^2)x^2 - 2ab(a+b)x + a^2b^2.$$

Функция y_1 получена как разность линейной функции и $y(x)$, а значит коэффициенты y_1 при степенях x^4, x^3 и x^2 противоположны соответствующим коэффициентам $y(x)$. Для x^3 и x^2 получаем:

$$\begin{cases} -2(a+b) = -2 \\ a^2+4ab+b^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 1 \\ 2ab = -4 \end{cases}$$

Эти уравнения имеют две пары корней, но поскольку $a < b$, подходит только $a = -1$ и $b = 2$. Отсюда можно найти координаты точек касания $\left(-1, \frac{17}{3}\right)$ и $\left(2, \frac{29}{3}\right)$ и, наконец, искомое расстояние между ними:

$$\sqrt{\left(2-(-1)\right)^2 + \left(\frac{29}{3} - \frac{17}{3}\right)^2} = 5.$$

Задача 10. В классе 28 учеников, у каждого ровно 3 друга среди одноклассников. Однажды на каникулах 7 учеников подписались на канал по олимпиадной математике. После этого ученики стали общаться между собой. Когда ученик узнаёт, что хотя бы двое из его друзей уже подписались на канал, он также подписывается на этот канал. Могло ли в итоге случиться, что весь класс подписался на канал?

Ответ: Нет.

Решение. Предположим противное, что весь класс подписался на канал. Рассмотрим *количество дружб среди подписчиков*. Каждый новый подписчик увеличивает его хотя бы на 2. В итоге это количество составляет $28 \cdot 3/2 = 42$, а всего добавился $28 - 7 = 21$ подписчик, а значит каждый добавлял *ровно* по 2 дружбы. Но последний подписчик добавил 3 дружбы — противоречие.

Вариант III

Задача 1. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 2029 в ряд так, что для любого $k = 1, 2, \ldots, 2029$ сумма первых k чисел в этом ряду нацело делится на k-е число в ряду?

Ответ: Подходит расстановка

$$1015 \quad 1 \quad 1016 \quad 2 \quad 1017 \quad 3 \quad \ldots \quad \underset{a_{2k-1}}{k+1014} \quad \underset{a_{2k}}{k} \quad \ldots \quad 2028 \quad 1014 \quad \underset{a_{2029}}{2029}$$

Решение. В ряду $a_1, \ldots, a_{2029}$ обозначим через S_i сумму начального отрезка ряда: $S_i = a_1 + a_2 + \ldots a_i$.

Заметим, что $S_{2029} = \frac{1}{2} \cdot 2030 \cdot 2029$ — кратно $a_{2029} = 2029$.

Далее, для $k \leqslant 1014$ рассмотрим два случая.

Для отрезков чётной длины $2k$ последнее число равно $a_{2k} = k$ и сумма

$$\begin{aligned} S_{2k} &= (1014 + 1 + 1) + (1014 + 2 + 2) + \ldots + (1014 + k + k) = \\ &= 1014k + 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + k) = \\ &= 1014k + k(k+1) = \\ &= k(1015 + k) \end{aligned}$$

— кратна $a_{2k} = k$.

Для отрезков нечётной длины $2k - 1$ последнее число равно $a_{2k-1} = 1014 + k$ и

$$S_{2k-1} = S_{2k} - a_{2k} = k(1015 + k) - k = k(1014 + k)$$

— кратно $a_{2k-1} = 1014 + k$.

Задача 2. На окружности через равные промежутки отметили 256 точек и провели все возможные хорды между ними. Хорду с концами в отмеченных точках назовем «чётной», если на большей дуге, которую она стягивает, лежит чётное число точек. В противном случае хорда «нечётная». Рядом с каждой вершиной написано число. Сумма квадратов этих чисел равна 64. На каждой хорде написано произведение чисел, стоящих на её концах. Сумма чисел на «чётных» хордах равна a, сумма чисел на «нечётных» хордах равна b. Найдите наибольшее возможное значение величины $a - b$.

Ответ: 32.

Решение. Обозначим числа по кругу $x_1, x_2, \ldots, x_{256}$, тогда

$$a = \sum_{\substack{k-l \\ \text{нечётно}}} x_k x_l, \quad b = \sum_{\substack{k-l \\ \text{чётно}}} x_k x_l.$$

Заметим, что

$$(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{255} - x_{256})^2 = \sum_{i=1}^{256} x_i^2 - 2(a - b) = 64 - 2(a - b) \geqslant 0,$$

а значит $a - b \leqslant 32$.

Равенство достигается при $\sum\limits_{i=1}^{256/2} x_{2i} = \sum\limits_{j=1}^{256/2} x_{2j-1}$, в частности при $x_1 = x_2 = \ldots = x_{256} = \frac{1}{2}$.

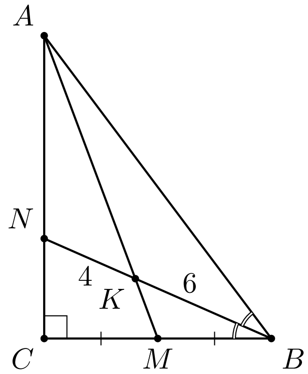
Задача 3. У Димы имеется сосуд, заполненный раствором кислоты в воде. Процентное содержание кислоты в растворе равно $27,1\%$. Дима несколько раз совершает следующую операцию.

Дима выливает из сосуда $\frac{1}{3}$ раствора, а затем доливает в освободившееся место кислоту. Сколько раз Дима совершил эту операцию, если процентное содержание кислоты в растворе стало равным $93,6\%$?

Ответ: 6.

Решение. Изначально воды в растворе $100 - 27,1 = 72,9$ %, а в конце $100 - 93,6 = 6,4$ %. Каждая операция уменьшает долю воды в $\frac{2}{3}$ раза. Ясно, что на это ушло 6 операций:

$$72,9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 6,4, \quad \text{т. к. } 729 = 3^6 \text{ и } 64 = 2^6.$$

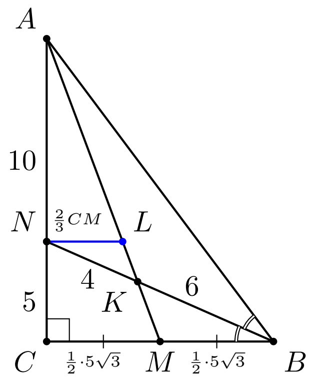


Задача 4.

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) медиана AM пересекает биссектрису BN в точке K. Известно, что $BK = 6$, $KN = 4$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: $\dfrac{75\sqrt{3}}{2}$

Решение. Выберем точку L на медиане AM так, что $NL \parallel BC$. Треугольники NLK и BMK подобны, а значит $NL : BM = 2 : 3$. Точка M — середина стороны BC, поэтому $BM = CM$ и, следовательно, $NL : CM = 2 : 3$.



Из подобия треугольников ANL и ACM следует, что и $AN : AC = 2 : 3$, а значит $AN : NC = 2 : 1$. Точка N — основание биссектрисы, и значит $AB : CB$ тоже равно $2 : 1$.

Решение 1. Если $BC = x$, то $AB = 2x$, $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 3x^2$, $NC = \frac{AC}{3} = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Из теоремы Пифагора для треугольника BNC получаем

$$100 = \frac{x^2}{3} + x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 5\sqrt{3},$$

$$BC = x = 5\sqrt{3}, \quad AC = \sqrt{3}x = 15,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{75\sqrt{3}}{2}$$

Решение 2. Из $AB : CB = 2 : 1$ следует что $\angle B = 60°$. Теперь легко найти все длины. Поскольку $\angle NBC = \frac{1}{2}\angle B = 30°$, катет N вдвое меньше гипотенузы $BN = 4 + 6 = 10$. Отсюда $NC = \frac{10}{2} = 5$, $AN = 2 \cdot NC = 10$ и $AC = \frac{10}{2} + 10 = 15$ и $BC = \sqrt{3} \cdot NC = 5\sqrt{3}$. Наконец,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$$

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} = 4 \\ x^2 + y^2 + 9z^2 = 9 \\ x + 2\sqrt{6}y - \sqrt{6}z = 6 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ или $\left(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Решение. Заметим, что в левых частях первых двух уравнений — суммы квадратов. Так можно записать квадраты длин векторов

$$\mathbf{a} = \left(\frac{2}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) \text{ и } \mathbf{b} = (x, y, 3z)\,.$$

Согласно условию, $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$. Заметим, что скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равно

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \tfrac{2}{x} \cdot x + \tfrac{1}{y} \cdot y + \tfrac{1}{z} \cdot 3z = 6,$$

что совпадает с $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$, а значит вектора коллинеарны, причем $\mathbf{a} = \frac{2}{3}\mathbf{b}$. Поэтому

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{3} \cdot x \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{3} \cdot y \\ \dfrac{1}{z} = 2 \cdot z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Подставим эти значения в третье уравнение (выбор знака перед каждым слагаемым независим):

$$\pm\sqrt{3} \pm 6 \mp \sqrt{3} = 6.$$

Равенство возможно только в двух случаях: $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ или $\left(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Задача 6. Решите уравнение

$$(\sin x - 2)(\cos x + 2) = -\frac{37}{8}.$$

Решение. Раскроем скобки:

$$\sin x \cos x + 2(\sin x - \cos x) = -\frac{5}{8}. \qquad (3)$$

Обозначим $t = \sin x - \cos x$, тогда $t^2 = \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 - 2\sin x \cos x$, а значит $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(1 - t^2)$. После замены переменной уравнение (3) примет вид

$$\tfrac{1}{2}(1 - t^2) + 2t = -\frac{5}{8} \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 4t - \frac{9}{4} = 0.$$

Оно имеет решения $t = -\frac{1}{2}$ и $t = \frac{9}{2}$. Второе не подходит, так как $|t| \leqslant \sqrt{2}$. Осталось найти значения x, при которых $t = -\frac{1}{2}$.

$$\sin x - \cos x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \pm \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}},\ k \in Z.$$

Задача 7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$2^{2x} + 5 \cdot 2^x = a \cdot 2^x + 6$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[1, 2]$.

Решение. Обозначим $t = 2^x$, тогда $t > 0$, а условие $x \in [1, 2]$ эквивалентно $t \in [2, 4]$. Исходное уравнение примет вид

$$t^2 + 5t = at + 6 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + (5 - a)t - 6 = 0.$$

Решение 1. Его корни имеют вид $t = \frac{1}{2}\left(a - 5 \pm \sqrt{(a-5)^2 + 24}\right)$. Левый корень отрицателен, что запрещено условием $t > 0$, а для правого условие $2 \leqslant t \leqslant 4$ равнозначно системе неравенств

$$2 \cdot 2 \leqslant a - 5 + \sqrt{a^2 - 10a + 49} \leqslant 2 \cdot 4,$$

$$9 - a \leqslant \sqrt{a^2 - 10a + 49} \leqslant 13 - a.$$

После возведения в квадрат из левого неравенства следует $a \geqslant 4$, а из правого $a \leqslant 7,5$.

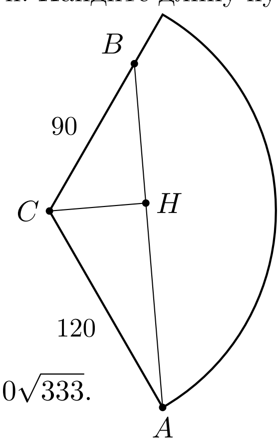
Необходима проверка. Подкоренное выражение неотрицательно всегда ($\sqrt{(a-5)^2 + 24}$). Правая часть $13 - a$ неотрицательна в полученном диапазоне.

Решение 2. Равенство $t^2 + 5t - 6 = at$ означает что парабола $t^2 + 5t - 6$ и прямая $y = at$ имеют общую точку — и эта точка должна лежать от $t = 2$ до $t = 4$. Парабола $t^2 + 5t - 6$ выпукла вниз и пересекает ось Oy ниже нуля, а значит подходит весь отрезок значений a, от пересечения прямой $y = at$ с параболой в точке $t = 2$ до точки $t = 4$ — и только он. Наклон a при этом варьируется от $\frac{2^2+5\cdot 2-6}{2}$ до $\frac{4^2+5\cdot 4-6}{4}$, то есть $a \in [4; 7,5]$.

Замечание. Для параболы $y = (t-13)^2$ подобный вопрос: при каких значениях параметра a прямая $y = at$ пересекает параболу на отрезке $[12, 14]$? Если подставить крайние точки $t = 12$ и $t = 14$ и взять диапазон между ними, получим $a \in [\frac{1}{14}, \frac{1}{12}]$. Однако, очевидно, подходят и $a < \frac{1}{14}$.

Задача 8. Гора имеет форму конуса с вершиной в точке C. Точка O — центр основания, точка A лежит на основании конуса, а точка B — на отрезке CA, причем $CA = 120$, $AB = 30$, $OA = 40$. Железная дорога проложена по кратчайшему пути вокруг горы из точки A в точку B. Точка H — ближайшая к вершине горы из всех точек железной дороги. Найдите длину пути BH.

Ответ: $\dfrac{450\sqrt{3}}{\sqrt{111}}$.



Решение. Кратчайшим путём вокруг горы на развёртке конуса будет отрезок AB. Точка H ближайшая к вершине C, а значит CH — высота в треугольнике ABC. Длина окружности основания равна $2\pi OA = 2\pi \cdot 40 = 80\pi$, поэтому $\angle ACB = \frac{2\pi OA}{CA} = \frac{80\pi}{120} = \frac{2\pi}{3} = 120°$.

Итак, в треугольнике ABC известны длины сторон $AC = 120$, $BC = 90$ и угол $\angle C = \frac{2\pi}{3}$, а надо найти BH. По теореме косинусов

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\angle C} = \sqrt{14\,400 + 8\,100 + 10\,800} = 10\sqrt{333}.$$

По теореме синусов

$$\frac{\sin\angle C}{AB} = \frac{\sin\angle B}{AC}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 10\sqrt{333}} = \frac{\sin\angle B}{120},$$

откуда $\sin\angle B = \frac{6}{\sqrt{111}}$ и $\cos\angle B = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{111}}$.

Наконец, треугольник CBH прямоугольный и $BH = BC \cdot \cos\angle B = 90 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{111}} = \dfrac{450\sqrt{3}}{\sqrt{111}}$.

Задача 9. График функции $y(x) = -x^4 - 2x^3 + 3x^2 + \frac{16}{3}x + 3$ имеет две точки максимума и одну точку минимума. К графику провели касательную с двумя точками касания. Найдите длину отрезка касательной между точками касания.

Ответ: 5.

Решение. Пусть касание происходит в точках $x = a$ и $x = b$, $a < b$. График функции $y(x)$ всюду ниже бикасательной. Поэтому разность касательной и функции всюду положительна и обращается в ноль в точках касания, а значит имеет вид

$$y_1(x) = (x-a)(x-b)(x^2+cx+d).$$

Парабола $y_2 = (x-a)(x-b)$ отрицательна внутри отрезка $[a, b]$ и положительна вне его, а функция $y(x)$ всюду неотрицательна. Чтобы соблюсти знак $y(x)$, парабола $y_3(x) = y/y_1 = x^2 + cx + d$ должна быть также отрицательной внутри отрезка $[a, b]$ и положительной вне его, а значит $y_3 = y_2$ и $y_1(x) = (x-a)(x-b)^2$.

Перемножая получаем, что

$$y_1(x) = x^4 - 2(a+b)x^3 + (a^2+4ab+b^2)x^2 - 2ab(a+b)x + a^2b^2.$$

Функция y_1 получена как разность линейной функции и $y(x)$, а значит коэффициенты y_1 при степенях x^4, x^3 и x^2 противоположны соответствующим коэффициентам $y(x)$. Для x^3 и x^2 получаем:

$$\begin{cases} -2(a+b) = 2 \\ a^2+4ab+b^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = -1 \\ 2ab = -4 \end{cases}$$

Эти уравнения имеют две пары корней, но поскольку $a < b$, подходит только $a = -2$ и $b = 1$. Отсюда можно найти координаты точек касания $\left(-2, \frac{13}{3}\right)$ и $\left(1, \frac{25}{3}\right)$ и, наконец, искомое расстояние между ними:

$$\sqrt{(1-(-2))^2 + \left(\frac{25}{3} - \frac{13}{3}\right)^2} = 5.$$

Задача 10. В классе 20 учеников, у каждого ровно 3 друга среди одноклассников. Однажды на каникулах 5 учеников подписались на канал по олимпиадной математике. После этого ученики стали общаться между собой. Когда ученик узнаёт, что хотя бы двое из его друзей уже подписались на канал, он также подписывается на этот канал. Могло ли в итоге случиться, что весь класс подписался на канал?

Ответ: Нет.

Решение. Предположим противное, что весь класс подписался на канал. Рассмотрим *количество дружб среди подписчиков*. Каждый новый подписчик увеличивает его хотя бы на 2. В итоге это количество составляет $20 \cdot 3/2 = 30$, а всего добавились $20 - 5 = 15$ подписчиков, а значит каждый добавлял *ровно* по 2 дружбы. Но последний подписчик добавил 3 дружбы — противоречие.

Вариант IV

Задача 1. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 2031 в ряд так, что для любого $k = 1, 2, \ldots, 2031$ сумма первых k чисел в этом ряду нацело делится на k-е число в ряду?

Ответ: Подходит расстановка

$$1016 \quad 1 \quad 1017 \quad 2 \quad 1018 \quad 3 \quad \ldots \quad \underset{a_{2k-1}}{k+1015} \quad \underset{a_{2k}}{k} \quad \ldots \quad 2030 \quad 1015 \quad \underset{a_{2031}}{2031}$$

Решение. В ряду $a_1, \ldots, a_{2031}$ обозначим через S_i сумму начального отрезка ряда: $S_i = a_1 + a_2 + \ldots a_i$.

Заметим, что $S_{2031} = \frac{1}{2} \cdot 2030 \cdot 2029$ — кратно $a_{2029} = 2029$.

Далее, для $k \leqslant 1015$ рассмотрим два случая.

Для отрезков чётной длины $2k$ последнее число равно $a_{2k} = k$ и сумма

$$\begin{aligned} S_{2k} &= (1015+1+1) + (1015+2+2) + \ldots + (1015+k+k) = \\ &= 1015k + 2 \cdot (1+2+\ldots+k) = \\ &= 1015k + k(k+1) = \\ &= k(1016+k) \end{aligned}$$

— кратна $a_{2k} = k$.

Для отрезков нечётной длины $2k-1$ последнее число равно $a_{2k-1} = 1015 + k$ и

$$S_{2k-1} = S_{2k} - a_{2k} = k(1016+k) - k = k(1015+k)$$

— кратно $a_{2k-1} = 1015 + k$.

Задача 2. На окружности через равные промежутки отметили 324 точки и провели все возможные хорды между ними. Хорду с концами в отмеченных точках назовем «чётной», если на большей дуге, которую она стягивает, лежит чётное число точек. В противном случае хорда «нечётная». Рядом с каждой вершиной написано число. Сумма квадратов этих чисел равна 16. На каждой хорде написано произведение чисел, стоящих на её концах. Сумма чисел на «чётных» хордах равна a, сумма чисел на «нечётных» хордах равна b. Найдите наибольшее возможное значение величины $a - b$.

Ответ: 8.

Решение. Обозначим числа по кругу $x_1, x_2, \ldots, x_{324}$, тогда

$$a = \sum_{\substack{k-l \\ \text{нечётно}}} x_k x_l, \quad b = \sum_{\substack{k-l \\ \text{чётно}}} x_k x_l.$$

Заметим, что

$$(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{323} - x_{324})^2 = \sum_{i=1}^{324} x_i^2 - 2(a-b) = 16 - 2(a-b) \geqslant 0,$$

а значит $a - b \leqslant 8$.

Равенство достигается при $\sum\limits_{i=1}^{324/2} x_{2i} = \sum\limits_{j=1}^{324/2} x_{2j-1}$, в частности при $x_1 = x_2 = \ldots = x_{324} = \frac{2}{9}$.

Задача 3. У Оли имеется сосуд, заполненный раствором кислоты в воде. Масса раствора равна 1 кг, масса кислоты в растворе равна 0,9 кг. Оля несколько раз совершает следующую операцию.

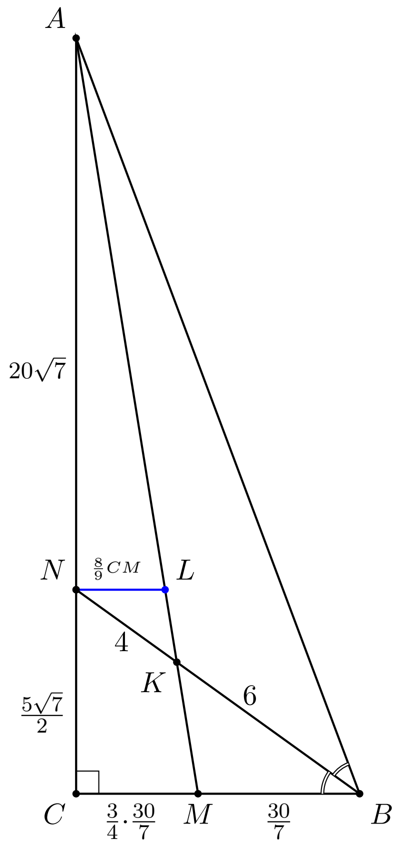
Оля доливает в сосуд 9 кг кислоты, а затем выливает из сосуда 9 кг раствора. Сколько раз Оля совершила эту операцию, если после всех операций в растворе оказалось 999, 99999 г кислоты?

Ответ: 7.

Решение. Изначально воды в растворе 100 г, а в конце 0, 00001 г. Каждая операция уменьшает долю воды в 10 раз. Между 100 и 0, 00001 разница в 7 порядков, так что понадобится 7 операций.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) на отрезке BC выбрана точка M так, что $BM : MC = 4 : 3$. Отрезок AM пересекает биссектрису BN в точке K. Известно, что $BK = 6$, $KN = 4$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: $\dfrac{675\sqrt{7}}{8}$



Решение. Выберем точку L на отрезке AM так, что $NL \parallel BC$. Треугольники NLK и BMK подобны, а значит $NL : BM = 2 : 3$. Поскольку $BM = \frac{4}{3} \cdot CM$ и, следовательно, $NL : CM = 8 : 9$.

Тогда из подобия треугольников ANL и ACM следует, что и $AN : AC = 8 : 9$, а значит $AN : NC = 8 : 1$. Точка N — основание биссектрисы, и значит $AB : CB$ тоже равно $8 : 1$.

Если $BC = x$, то $AB = 8x$, $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 63x^2$, $NC = \frac{AC}{9} = \frac{x\sqrt{7}}{3}$. Из теоремы Пифагора для треугольника BNC получаем

$$100 = \frac{7x^2}{9} + x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{15}{2},$$

$$BC = x = \frac{15}{2}, \quad AC = \frac{45\sqrt{7}}{2},$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{675\sqrt{7}}{8}$$

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{9}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} = 4 \\ x^2 + y^2 + 4z^2 = 9 \\ \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2z = 3 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ или $\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Решение. Заметим, что в левых частях первых двух уравнений — суммы квадратов. Так можно записать квадраты длин векторов

$$\mathbf{a} = \left(\frac{1}{x}, \frac{3}{y}, \frac{1}{z}\right) \text{ и } \mathbf{b} = (x, y, 2z)\,.$$

Согласно условию, $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$. Заметим, что скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равно

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \tfrac{1}{x} \cdot x + \tfrac{3}{y} \cdot y + \tfrac{1}{z} \cdot 2z = 6,$$

что совпадает с $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$, а значит вектора коллинеарны, причем $\mathbf{a} = \frac{2}{3}\mathbf{b}$. Поэтому

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{3}\cdot x \\ \dfrac{3}{y} = \dfrac{2}{3}\cdot y \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{4}{3}\cdot z \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ y = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}} \\ z = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Подставим эти значения в третье уравнение (выбор знака перед каждым слагаемым независим):

$$\pm\sqrt{2} \pm 3 \pm \sqrt{3} = 3.$$

Равенство возможно только в двух случаях: $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ или $\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Задача 6. Решите уравнение

$$(\sin x - 1)(\cos x + 1) = -\frac{8}{9}.$$

Решение. Раскроем скобки:

$$\sin x\cos x + (\sin x - \cos x) = \frac{1}{9}. \tag{4}$$

Обозначим $t = \sin x - \cos x$, тогда $t^2 = \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 - 2\sin x\cos x$, а значит $\sin x\cos x = \frac{1}{2}(1-t^2)$. После замены переменной уравнение (4) примет вид

$$\tfrac{1}{2}(1-t^2) + t = \frac{1}{9} \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 2t - \frac{7}{9} = 0.$$

Оно имеет решения $t = -\frac{1}{3}$ и $t = \frac{7}{3}$. Второе не подходит, так как $|t| \leqslant \sqrt{2}$. Осталось найти значения x, при которых $t = -\frac{1}{3}$.

$$\sin x - \cos x = -\frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \pm \arccos\frac{1}{3\sqrt{2}},\ k \in Z.$$

Задача 7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{2}^{2x} + 5\cdot\sqrt{2}^{x} = a\cdot\sqrt{2}^{x} + 6$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[2,4]$.

Решение. Обозначим $t = \sqrt{2}^x$, тогда $t > 0$, а условие $x \in [2,4]$ эквивалентно $t \in [2,4]$. Исходное уравнение примет вид

$$t^2 + 5t = at + 6 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + (5-a)t - 6 = 0.$$

Решение 1. Его корни имеют вид $t = \frac{1}{2}\left(a - 5 \pm \sqrt{(a-5)^2 + 24}\right)$. Левый корень отрицателен, что запрещено условием $t > 0$, а для правого условие $2 \leqslant t \leqslant 4$ равнозначно системе неравенств

$$2\cdot 2 \leqslant a - 5 + \sqrt{a^2 - 10a + 49} \leqslant 2\cdot 4,$$

$$9 - a \leqslant \sqrt{a^2 - 10a + 49} \leqslant 13 - a,$$

После возведения в квадрат из левого неравенства следует $a \geqslant 4$, а из правого $a \leqslant 7,5$.

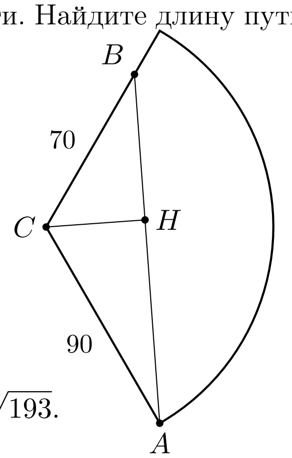
Необходима проверка. Подкоренное выражение неотрицательно всегда ($\sqrt{(a-5)^2+24}$). Правая часть $13-a$ неотрицательна в полученном диапазоне.

Решение 2. Равенство $t^2+5t-6=at$ означает что парабола t^2+5t-6 и прямая $y=at$ имеют общую точку — и эта точка должна лежать от $t=2$ до $t=4$. Парабола t^2+5t-6 выпукла вниз и пересекает ось Oy ниже нуля, а значит подходит весь отрезок значений a, от пересечения прямой $y=at$ с параболой в точке $t=2$ до точки $t=4$ — и только он. Наклон a при этом варьируется от $\frac{2^2+5\cdot2-6}{2}$ до $\frac{4^2+5\cdot4-6}{4}$, то есть $a\in[4;7,5]$.

Замечание. Для параболы $y=(t-13)^2$ подобный вопрос: при каких значениях параметра a прямая $y=at$ пересекает параболу на отрезке $[12,14]$? Если подставить крайние точки $t=12$ и $t=14$ и взять диапазон между ними, получим $a\in[\frac{1}{14},\frac{1}{12}]$. Однако, очевидно, подходят и $a<\frac{1}{14}$.

Задача 8. Гора имеет форму конуса с вершиной в точке C. Точка O — центр основания, точка A лежит на основании конуса, а точка B — на отрезке CA, причем $CA=90$, $AB=20$, $OA=30$. Железная дорога проложена по кратчайшему пути вокруг горы из точки A в точку B. Точка H — ближайшая к вершине горы из всех точек железной дороги. Найдите длину пути BH.

Ответ: $\dfrac{805}{\sqrt{193}}$.



Решение. Кратчайшим путём вокруг горы на развёртке конуса будет отрезок AB. Точка H ближайшая к вершине C, а значит CH — высота в треугольнике ABC. Длина окружности основания равна $2\pi OA=2\pi\cdot 30=60\pi$, поэтому $\angle ACB=\frac{2\pi OA}{CA}=\frac{60\pi}{90}=\frac{2\pi}{3}=120^\circ$.

Итак, в треугольнике ABC известны длины сторон $AC=90$, $BC=70$ и угол $\angle C=\frac{2\pi}{3}$, а надо найти BH. По теореме косинусов

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos\angle C}=\sqrt{8\,100+4\,900+6\,300}=10\sqrt{193}.$$

По теореме синусов

$$\frac{\sin\angle C}{AB}=\frac{\sin\angle B}{AC},\quad \frac{\sqrt3}{2\cdot10\sqrt{193}}=\frac{\sin\angle B}{90},$$

откуда $\sin\angle B=\frac{9\sqrt3}{2\sqrt{193}}$ и $\cos\angle B=\frac{23}{2\sqrt{193}}$.

Наконец, треугольник CBH прямоугольный и $BH=BC\cdot\cos\angle B=70\cdot\frac{23}{2\sqrt{193}}=\dfrac{805}{\sqrt{193}}$.

Задача 9. График функции $y(x)=-x^4-10x^3-33x^2-\frac{116}{3}x-6$ имеет две точки максимума и одну точку минимума. К графику провели касательную с двумя точками касания. Найдите длину отрезка касательной между точками касания.

Ответ: 5.

Решение. Пусть касание происходит в точках $x=a$ и $x=b$, $a<b$. График функции $y(x)$ всюду ниже бикасательной. Поэтому разность касательной и функции всюду положительна и обращается в ноль в точках касания, а значит имеет вид

$$y_1(x)=(x-a)(x-b)(x^2+cx+d).$$

Парабола $y_2=(x-a)(x-b)$ отрицательна внутри отрезка $[a,b]$ и положительна вне его, а функция $y(x)$ всюду неотрицательна. Чтобы соблюсти знак $y(x)$, парабола $y_3(x)=y/y_1=x^2+cx+d$ должна быть также отрицательной внутри отрезка $[a,b]$ и положительной вне его, а значит $y_3=y_2$ и $y_1(x)=(x-a)(x-b)^2$.

Перемножая получаем, что

$$y_1(x) = x^4 - 2(a+b)x^3 + (a^2 + 4ab + b^2)x^2 - 2ab(a+b)x + a^2b^2.$$

Функция y_1 получена как разность линейной функции и $y(x)$, а значит коэффициенты y_1 при степенях x^4, x^3 и x^2 противоположны соответствующим коэффициентам $y(x)$. Для x^3 и x^2 получаем:

$$\begin{cases} -2(a+b) = 10 \\ a^2 + 4ab + b^2 = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -5 \\ 2ab = 8 \end{cases}$$

Эти уравнения имеют две пары корней, но поскольку $a < b$, подходит только $a = -4$ и $b = -1$. Отсюда можно найти координаты точек касания $\left(-4, \frac{14}{3}\right)$ и $\left(-1, \frac{26}{3}\right)$ и, наконец, искомое расстояние между ними:

$$\sqrt{(-1-(-4))^2 + \left(\frac{26}{3} - \frac{14}{3}\right)^2} = 5.$$

Задача 10. В классе 32 ученика, у каждого ровно 3 друга среди одноклассников. Однажды на каникулах 8 учеников подписались на канал по олимпиадной математике. После этого ученики стали общаться между собой. Когда ученик узнаёт, что хотя бы двое из его друзей уже подписались на канал, он также подписывается на этот канал. Могло ли в итоге случиться, что весь класс подписался на канал?

Ответ: Нет.

Решение. Предположим противное, что весь класс подписался на канал. Рассмотрим *количество дружб среди подписчиков*. Каждый новый подписчик увеличивает его хотя бы на 2. В итоге это количество составляет $32 \cdot 3/2 = 48$, а всего добавились $32 - 8 = 24$ подписчика, а значит каждый добавлял *ровно* по 2 дружбы. Но последний подписчик добавил 3 дружбы — противоречие.