



4 В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно два раза.

Ответ: _____.

5 Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,2.

Ответ: _____.

6 Найдите корень уравнения

$$2^{x-3} = \frac{1}{16}.$$

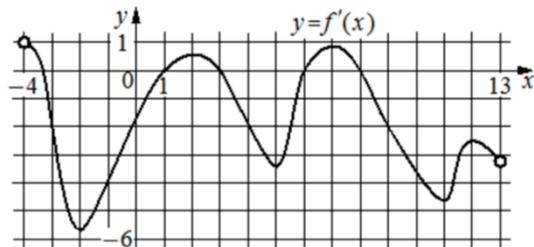
Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения

$$\log_{\sqrt[6]{13}} 13.$$

Ответ: _____.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 10$ или совпадает с ней.



Ответ: _____.

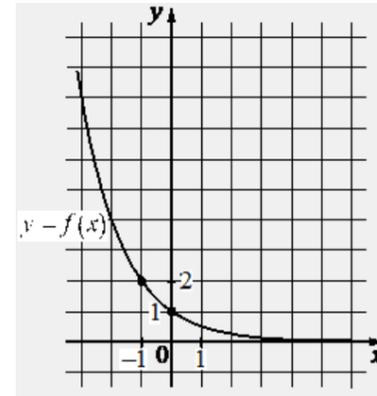
9 Два тела, массой $m = 2$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 8$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в Дж), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$, где m – масса (в кг), v – скорость (в м/с). Найдите, под каким углом 2α должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилась энергия, равная 32 Дж. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

10 Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 375 литров она заполняет на 10 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объемом 500 литров?

Ответ: _____.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(-3)$.



Ответ: _____.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 6)^3 - 3x$ на отрезке $[-5; 0]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение

$$4 \sin x \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin 2x + 3 \sin x = 0.$$
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

- 14** В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены середины M и N отрезков AB и AD соответственно.

- а) Докажите, что прямые $B_1 N$ и CM перпендикулярны.
 б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $B_1 N = 3\sqrt{5}$.

- 15** Решите неравенство

$$\frac{\log_7(49x^2) - 7}{\log_7^2 x - 4} \leq 1.$$

- 16** 15-го марта в банке был взят кредит на некоторую сумму на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 30-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
- к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какая сумма была взята в кредит, если общая сумма выплат после его погашения составила 555 тысяч рублей?

- 17** В треугольнике ABC провели высоту CC_1 и медиану AA_1 . Оказалось, что точки A, A_1, C, C_1 лежат на одной окружности.

- а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
 б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AA_1 : CC_1 = 4 : 3$ и $A_1 C_1 = 6$.

- 18** Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

выполняется при всех x .

- 19** Последовательность a_1, a_2, \dots, a_6 состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k – среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k -го. Известно, что $M_1 = 7, M_2 = 6$.

- а) Приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 6,4$.
 б) Существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 5$?
 в) Найдите наименьшее возможное значение M_3 .

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	20	
2	-0,96	
3	20,8	
4	0,375	
5	0,28	
6	-1	
7	6	
8	5	
9	60	
10	25	
11	8	
12	15	
13	а) $\pi n, \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z$ б) $-3\pi; -\frac{13\pi}{6}; -2\pi$	
14	2	
15	$(0; \frac{1}{49}) \cup \{7\} \cup (49; +\infty)$	
16	400 тыс.	
17	$12\sqrt{55}$	
18	$(-1; 5)$	
19	а) привели б) нет в) 5,2	



Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13 а) Решите уравнение $4 \sin x \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin 2x + 3 \sin x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$.

а) $4 \sin x \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin 2x + 3 \sin x = 0$
 $\sin x (4 \cos^2 x - 4\sqrt{3} \cos x + 3) = 0$
 $\sin x = 0$
 $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$
 $4 \cos^2 x - 4\sqrt{3} \cos x + 3 = 0$
 Пусть $\cos x = t$
 $4t^2 - 4\sqrt{3}t + 3 = 0$
 $D = 48 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 0$
 $t = \frac{4\sqrt{3}}{8}$
 $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) Отберём корни с помощью окружности.
 Получим $x = -3\pi$
 $x = -2\pi$
 $x = -2\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{13\pi}{6}$

Источники: Основная волна 2021, Формулы двойного угла.

Ответ: а) πn ; б) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $-3\pi; -\frac{13\pi}{6}; -2\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	
	2

14 В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены середины M и N отрезков AB и AD соответственно.
 а) Докажите, что прямые $B_1 N$ и CM перпендикулярны.
 б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $B_1 N = 3\sqrt{5}$.

Источники: Основная волна 2022

а) $B_1 N$ — это проекция $B_1 N$ на плоскость $ABCD$.

Рассмотрим квадрат $ABCD$.

Пусть $\angle BCM = \alpha$
 Пусть $\angle B_1 N M = \beta$
 $\triangle CBM \sim \triangle ABN$ по 2 катетам
 $\angle ABN = \alpha$
 $\angle CBN = 90^\circ - \alpha$
 $\triangle CBK$:
 $\angle CKB = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$
 $B_1 N \perp CM$
 $B_1 N$ — проекция $B_1 N$ на CM
 по ТТП $B_1 N \perp CM$

б) Пусть $CM = k$
 $BM = x = AM = AN = DN$
 $\triangle CBM = \triangle ABN$ по 2 катетам
 значит $\angle ABN = \alpha$
 $\angle CBN = 90^\circ - \alpha$
 $\triangle CBK$:
 $\angle CKB = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$
 $B_1 N \perp CM$
 $B_1 N$ — проекция $B_1 N$ на CM
 по ТТП $B_1 N \perp CM$

Источники: Основная волна 2022, Формулы двойного угла.

Ответ: 2.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ №20



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>b</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

15 Решите неравенство

$$\frac{\log_7(49x^2) - 7}{\log_7^2 x - 4} \leq 1.$$

$$\log_7 49 + \log_7 x^2 - 7 - \frac{1}{1} (\log_7^2 x - 4) \leq 0$$

$$\log_7^2 x - 4$$

$$2 + 2 \log_7 |x| - 7 - \log_7^2 x + 4 \leq 0$$

$$\log_7^2 x - 4$$

Пусть $\log_7 x = t$

$$\frac{-t^2 + 2t - 1}{t^2 - 4} \leq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 - 4} \geq 0$$

$$\frac{(t-1)^2}{(t-2)(t+2)} \geq 0$$

$\log_7 x < \log_7 \frac{1}{49}$ $\log_7 x = \log_7 7$ $\log_7 x > \log_7 49$
 $0 < x < \frac{1}{49}$ $x = 7$ $x > 49$

Ответ: $(0; \frac{1}{49}) \cup \{7\} \cup (49; +\infty)$

ИСТОЧНИКИ

ГПЭ (старый банк)
ГПЭ (новый банк)
Досрочная волна 2022
Основная волна 2017

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

- $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$
- $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$
- $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

ФСУ

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ №20



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16 15-го марта в банке был взят кредит на некоторую сумму на 31 месяц. Условия его возврата таковы:
 - 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
 - 15-го числа 30-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
 - к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

ИСТОЧНИКИ
 ГПР (старый банк)
 ГПР (новый банк)
 Основная волна 2018
 Основная волна (Резерв) 2021

Пусть S - сумма кредита
 7-е число - день платежа
 x - это сумма уменьшения долга каждые 30 мес.

*Первые 30 выплат
 обр. арифм. прогр.
 О.С.В. = 555 тыс
 первые 30 выплат + 31-я = 555
 выплата*

Какая сумма была взята в кредит, если общая сумма выплат после его погашения составила 555 тысяч рублей?

0,02S + x + 0,02S + 0,42x : 2 = 30 + 102 = 555

*(0,02S + 0,71x) · 30 = 453
 0,6 · S + 21,3x = 453
 0,6 · (100 + 30x) + 21,3x = 453
 60 + 18x + 21,3x = 453
 39,3x = 393
 x = 10 тыс.
 S = 100 + 30x = 400 тыс.*

Дата	Сумма долга
15 м	S
15 м	102S
15 м	S - x
15 м	102S - 102x
15 м	S - 2x
15 м	102S - 2,04x
15 м	S - 3x
15 м	S - 29x
15 м	102S - 29,58x
15 м	S - 30x = 100
15 м	102
15 м	0

⇒ Сб. 0,02S + 0,96x
⇒ Сб. 1,02S - (S - x) = 0,02S + x
⇒ Сб. 1,02S - 1,02x - (S - 2x) = 0,02S + 0,96x
⇒ Сб. 0,02S + 0,96x
⇒ Сб. 0,02S + 10,42x
S = 100 + 30x
⇒ Сб. 102

Ответ: 400 тыс.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2

17 В треугольнике ABC провели высоту CC_1 и медиану AA_1 . Оказалось, что точки A, A_1, C, C_1 лежат на одной окружности.
 а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
 б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AA_1 : CC_1 = 4 : 3$ и $A_1C_1 = 6$.

ИСТОЧНИКИ
 Основная волна 2020
 ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ

а) $\angle AC_1C = 90^\circ$ - вписанный
 значит AC - диаметр.
 тогда $\angle AA_1C = 90^\circ$
 (по т. о впис. угле)

б) $\triangle AA_1B \sim \triangle BCC_1$
 по 2 углам (...)
 $\frac{AA_1}{CC_1} = \frac{AB}{BC}$
 $\frac{4x}{3x} = \frac{AB}{12}$
 $AB = 16 = AC$

$\triangle ABC$:
 16, 16, 12
 12
 $S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$
Ответ: $12\sqrt{5}$!

ИСТОЧНИКИ
 Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается
 РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК
 Биссектриса, медиана и высота, проведенные к основанию, равны
 МЕДИАНА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ
 В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы
 ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ
 По двум углам
 ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	3



18 Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1} < 3$ выполняется при всех x .

ИСТОЧНИКИ
 ГИР (старый банк)
 Основная волна (Резерв) 2012

$\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1} < 3$

Заметим, что $(x+0,5)^2 + 0,75 > 0$ при любых x

Значит $\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1} < 3 \quad | \cdot (x^2+x+1)$

$x^2+ax+1 < 3(x^2+x+1)$

$-3x^2-3x-3 < x^2+ax+1 < 3x^2+3x+3$

$\begin{cases} -3x^2-3x-3 < x^2+ax+1 \\ x^2+ax+1 < 3x^2+3x+3 \end{cases}$

1) $4x^2+3x+ax+4 > 0$

2) $2x^2+3x-ax+2 > 0$

$\begin{cases} D_1 < 0 \\ D_2 < 0 \end{cases}$

$D_1 < 0$

$(3+a)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 < 0$

$(3+a)^2 - 8^2 < 0$

$(3+a-8)(3+a+8) < 0$

$(a-5)(a+11) < 0$

$D_2 < 0$

$(3-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 < 0$

$(3-a)^2 - 4^2 < 0$

$(3-a-4)(3-a+4) < 0$

$(-1-a)(7-a) < 0$

Каждое пересечение:

Ответ: $(-1; 5)$

С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	
	4

19 Последовательность a_1, a_2, \dots, a_6 состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k – среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k – го. Известно, что $M_1 = 7, M_2 = 6$.

ИСТОЧНИКИ
 Основная волна (Резерв) 2017
 Основная волна 2016

а) Приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 6,4$.

б) Существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 5$?

в) Найдите наименьшее возможное значение M_3 .

а) $M_1 = \frac{a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{5} = 7$

$M_2 = \frac{a_1+a_3+a_4+a_5+a_6}{5} = 6$

$M_3 = \frac{a_1+a_2+a_4+a_5+a_6}{5} = 6,4$

б) 1) $\begin{cases} a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = 35 \\ a_1+a_3+a_4+a_5+a_6 = 30 \\ a_1+a_2+a_4+a_5+a_6 = 32 \end{cases}$

2) $\begin{cases} a_2-a_1 = 5 \\ a_3-a_1 = 3 \end{cases}$

3) $a_2-a_3 = 2$

0 5 3 9 9 9

Ответ: а) приведем

б) 1) $\begin{cases} a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = 35 \\ a_1+a_3+a_4+a_5+a_6 = 30 \\ a_1+a_2+a_4+a_5+a_6 = 26 \end{cases}$

2) Покажем, что $M_3 = 5,2$ мало быть

1) $a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = 35$

2) $a_1+a_3+a_4+a_5+a_6 = 30$

3) $a_3-a_2 = 4$

0 5 9 7 7 7

Ответ: б) 5,2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах $a, б$ и $в$	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте $в$ и обоснованно получен верный ответ в пункте a или $б$	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах a и $б$ ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте $в$	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте a или $б$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	
	4