

- 3 В цилиндрический сосуд налили 500 куб. см воды. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде увеличился в 1,2 раза. Найдите объём детали. Ответ выразите в куб. см.

Ответ: _____.

- 4 На олимпиаде по русскому языку 350 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 140 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: _____.

- 5 В коробке 12 синих, 6 красных и 7 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Найдите вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры.

Ответ: _____.

- 6 Найдите корень уравнения

$$\sqrt{2x + 31} = 9.$$

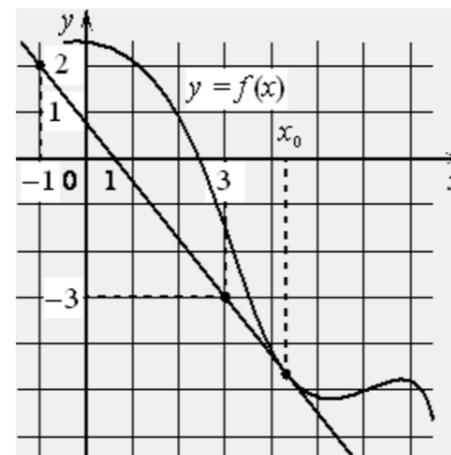
Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения

$$\frac{51 \cos 4^\circ}{\sin 86^\circ} + 8.$$

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 9 При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 170$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \cdot \frac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c – скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 12$ м/с и $v = 6$ м/с – скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 180 Гц?

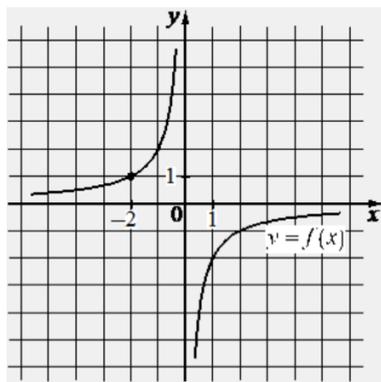
Ответ: _____.

- 10 Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 42 килограммов изюма, если виноград содержит 82% воды, а изюм содержит 19% воды?

Ответ: _____.



- 11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции

$$y = 8 \cos x + \frac{30}{\pi}x + 19 \text{ на отрезке } \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right].$$

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение

$$x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0.$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{3}; \sqrt{20}]$.

- 14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 6 : 1$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1 F : FB = 3 : 4$, а точка T – середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 30$, $AA_1 = 35$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
 б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

- 15 Решите неравенство

$$(3^{4x-x^2-3} - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 5) \geq 0.$$

- 16 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0,7S$	$0,4S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.



17 В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность с центром O .

- а) Докажите, что $\sin \angle AOD = \sin \angle BOC$.
 б) Найдите площадь трапеции, если $\angle BAD = 90^\circ$, а основания равны 5 и 7.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x - a| - 4, \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

19 На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 4, или на цифру 8. Сумма написанных чисел равна 2786.

- а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 4 и на 8?
 б) Может ли ровно четыре числа на доске оканчиваться на 8?
 в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 8, может быть на доске?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1



Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	15	
2	12	
3	100	
4	0,2	
5	0,24	
6	25	
7	59	
8	-1,25	
9	312	
10	189	
11	-0,2	
12	-5	
13	а) 2; 5 б) 2	
14	382,5	
15	$(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$	
16	11	
17	35	
18	$(-5; -4) \cup (-4; -3)$	
19	а) нет б) нет в) 9	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



13 а) Решите уравнение

$$x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{3}; \sqrt{20}]$.

а)
$$\frac{x+1}{\sqrt{x-1}} = \frac{x+1}{3}$$

①
$$\frac{x+1}{3} \geq 0 \quad | \cdot 3$$

②
$$x-1 = \left(\frac{x+1}{3}\right)^2 \quad | \cdot 9$$

①
$$x+1 \geq 0$$

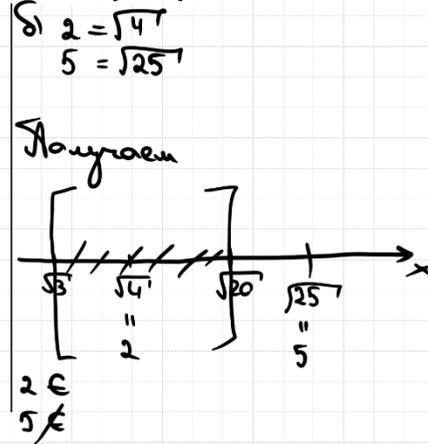
$$x \geq -1$$

②
$$(x-1) \cdot 9 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x = 5 \quad x = 2$$

Ответ: а) 2; 5.
б) 2.



14

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD, B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA = 6:1$, на ребре BB_1 – точка F так, что $B_1F:FB = 3:4$, а точка T – середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 30$, $AA_1 = 35$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

ИСТОЧНИКИ
ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Горюхи #14.2019.

а) Сечение пересек. паралл. грани по парал. пр.
Построим EK такую, что $EK \parallel FT$

ΔB_1FT - п/б. ΔEA_1K - п/б. $\Delta B_1FT \sim \Delta EA_1K$ (по 2 углам т.е. $A_1K = 30 = A_1E$ (...))

НО $A_1D_1 = 30$
значит т.к. – это и есть точка D_1

б) $EFTD_1$ – трапеция
 $FT = \sqrt{15^2 + 15^2} = 15\sqrt{2}$
 $D_1T = \sqrt{25^2 + 15^2}$ по т. Пиф.
 $EF = \sqrt{25^2 + 7^2}$
значит $EFTD_1$ – п/б. грани

$S = \frac{15\sqrt{2} + 30\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{17}{\sqrt{2}} = 382,5$

Ответ: 382,5.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3



15 Решите неравенство $(3^{4x-x^2-3} - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 5) \geq 0$.

ИСТОЧНИКИ

Досрочная волна (Резерв) 2016	
МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ	
БЫЛО	СТАЛО
$\log_a f \cdot \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$ f - g $	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$
ОС	
1	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
2	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
4	$a^2 - b^2 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
5	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
6	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
7	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(3^{4x-x^2-3} - 3^0) \cdot (\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+5) - \log_{\frac{1}{2}}1) \geq 0$$

$$\text{1) } (3-1)(4x-x^2-3-0) \cdot (\frac{1}{2}-1) \cdot (x^2-4x+5-1) \geq 0 \quad | \cdot (-2)$$

$$\text{2) } x^2-4x+5 > 0$$

$$\text{1) } (-x^2+4x-3)(x^2-4x+5) \leq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$(x^2-4x+3)(x-2)^2 \geq 0$$



$$\text{2) } x^2-4x+4+1 > 0$$

$$(x-2)^2+1 > 0$$

x - любое

Ответ: $(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В июне 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере 5 млн рублей, где 5 – целое число. Условия его возврата таковы: – каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года; – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; – в июне каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июнь 2016	Июнь 2017	Июнь 2018	Июнь 2019
Долг (в млн рублей)	S	0,7S	0,4S	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

ИСТОЧНИКИ

ГРП (старый банк)
ГРП (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2020
СтигГрад 27.01.2022
СтигГрад 29.01.2020
Досрочная волна 2019
СтигГрад 24.01.2019
СтигГрад 26.01.2017
Досрочная волна (Резерв) 2017
Основная волна 2016

Пусть x – часть кредита

Дата	Сумма долга
16.06	S
17.01	1,25 · S
18.01	0,7 · S
18.06	0,7 · S · 1,25 = 0,875 · S
19.01	0,4 · S
19.06	0,4 · S · 1,25 = 0,5 · S

Условия выплат:

$$\begin{cases} \frac{55}{100} S > 5 & | \cdot \frac{100}{55} \\ \frac{475}{1000} S > 5 & | \cdot \frac{1000}{475} \\ \frac{5}{10} S > 5 & | \cdot \frac{10}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S > \frac{5 \cdot 100}{55} = 9 \frac{1}{11} \\ S > \frac{5 \cdot 1000}{475} = 10 \frac{10}{19} \\ S > \frac{5 \cdot 10}{5} = 10 \end{cases}$$

Получаем $S_{\min} = 11$

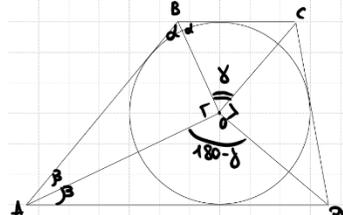
Ответ: 11.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



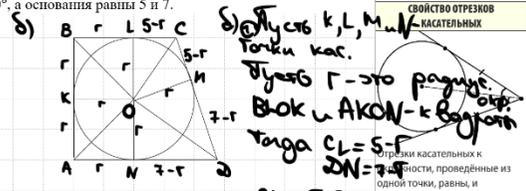
17 В трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность с центром O .

- а) Докажите, что $\sin \angle AOD = \sin \angle BOC$.
- б) Найдите площадь трапеции, если $\angle BAD = 90^\circ$, а основания равны 5 и 7.



а) AO, BO, CO, DO - биссектрисы
 по св-ву отр. кас., пров. к одной точке.
 Пусть $\angle AOD = \alpha = \angle BOC$
 $\angle BAO = \beta = \angle DAO$
 $2\alpha + 2\beta = 180$ (по св-ву трап.)
 $\alpha + \beta = 90$
 $\angle AOB = 180 - (\alpha + \beta) = 90$
 Аналогично $\angle COD = 90^\circ$

б) Пусть $\angle BOC = \gamma$
 $\text{Tanga } \angle AOD = 180 - \gamma$
 $\sin \gamma = \sin(180 - \gamma)$
 $\sin \angle BOC = \sin \angle AOD$



б) Пусть K, L, M, N - точки кас.
 Пусть r - это радиус отр. кас.
 Тогда $CL = 5 - r$
 $DN = 7 - r$
 $CM = 5 - r$
 $DM = 7 - r$
 (по св-ву отр. кас.)
 ② $\triangle COD$:
 $OM^2 = CM \cdot DM$
 $r^2 = (5-r)(7-r)$
 $r^2 = 35 - 12r + r^2$
 $12r = 35$
 $r = \frac{35}{12}$
 $S_{\text{трап}} = \frac{5+7}{2} \cdot 2 \cdot \frac{35}{12} = 35$

О - вет: 35

ИСТОЧНИКИ
 Основная волна (Резерв) 2017
 Основная волна 2015
 Свойство отрезков касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.
ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ
 1 ШАГ
 Если в скобке нечётное количество $\frac{\pi}{2}$, то функция меняется на кофункцию
 Если в скобке сколько-то π , то функция остаётся прежней
 ПРИМЕР:
 $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$
 $\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg } \alpha$
 2 ШАГ
 Определяем знак по указанной в скобках четверти (смотреть на изначальную функцию, а не на изменившуюся)
 ПРИМЕР:
 $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$
 Это IV четверть, в ней синус имеет знак минус, поэтому
 $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha$
ВЫСОТА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

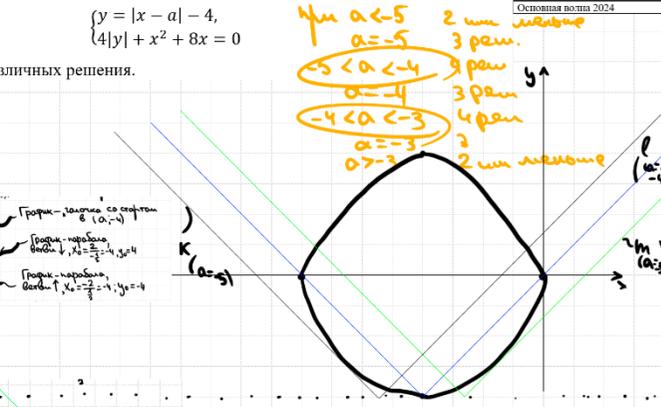
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x - a| - 4, \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

$$\begin{cases} y = |x - a| - 4 \\ |y| = -\frac{1}{4}x^2 - 2x \end{cases}$$



Найдём A для прямой k :
 $y = -x + a - 4$ звл. касат. для $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x$
 $-1 = \frac{x}{2} + 2$
 $-x + a - 4 = \frac{1}{4}x^2 + 2x$
 $6 + a - 4 = \frac{1}{4}36 - 12$
 $a = 9 - 12 - 2 = -5$

Найдём A для прямой l :
 $y = x - a - 4$ проходит через т.А (-4; -4)
 $-4 = -4 - a - 4$
 $a = -4$

Найдём A для прямой m :
 $y = x - a - 4$ звл. касат. для $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x$
 $1 = \frac{x}{2} + 2$
 $x - a - 4 = \frac{1}{4}x^2 + 2x$
 $-2 - a - 4 = 1 - 4$
 $-6 + 3 = a$
 $a = -3$

О-вет: $(-5; -4) \cup (-4; -3)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4



