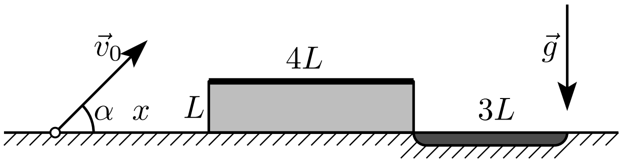
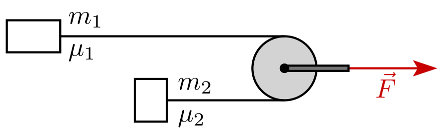
Задача 10.1. Попрыгунчик. Мальчик бросает мяч от поверхности земли под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту с начальной скоростью v_0. На расстоянии x от точки броска стоит здание высотой L с плоской твёрдой горизонтальной крышей, а за зданием находится яма. Мальчик хочет, чтобы мяч отскочил от крыши и попал в яму. Длина здания $4L$, длина ямы $3L$, начальная скорость мяча $v_0 = 4\sqrt{\dfrac{Lg}{3}}$.



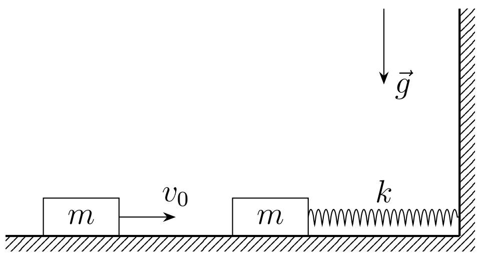
1) Какое количество N отскоков мяча от крыши возможно?
2) Определите, какой диапазон расстояний l от точки броска до здания соответствуют каждому значению N.
3) Определите возможные значения x, при которых мяч попадёт в яму.

Ускорение свободного падения равно g. Отскок мяча от крыши считайте абсолютно упругим. Сопротивлением воздуха пренебречь. От земли, стен здания и ямы мяч не отскакивает.

Задача 10.2. Ускорения на блоке. На горизонтальной поверхности находится система, состоящая из двух грузов массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 300$ г. Грузы связаны нерастяжимой нитью пренебрежимо малой массы, перекинутой через очень лёгкий блок. На ось блока действует горизонтальная сила F, постепенно увеличивающаяся от нулевого значения. Определите ускорения тел и оси блока в зависимости от величины силы F. Коэффициенты трения скольжения тел по поверхности известны и равны $\mu_1 = 0{,}2$ для первого тела и $\mu_2 = 0{,}1$ для второго тела. Свободные участки нити горизонтальны. Трение в блоке отсутствует. На рисунке представлен вид системы сверху. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



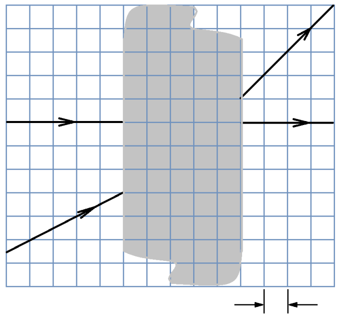
Задача 10.3. Максимумы деформаций. На горизонтальной шероховатой поверхности покоится брусок массой $m = 0{,}5$ кг. Брусок соединён с вертикальной стенкой с помощью горизонтальной и перпендикулярной стенке недеформированной пружины. Жёсткость пружины $k = 72$ Н/м. В сторону покоящегося бруска движется такой же брусок. Между брусками происходит абсолютно неупругое столкновение, в результате которого они не слипаются. Прямо перед столкновением скорость движущегося бруска $v_0 = 6$ м/с. В процессе движения брусков после столкновения величина максимального сжатия пружины оказалась равной $x_1 = 34$ см, при этом бруски со стенкой не сталкивались. Считайте горизонтальную поверхность однородной. Явлением застоя, сопротивлением воздуха и временем столкновения можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



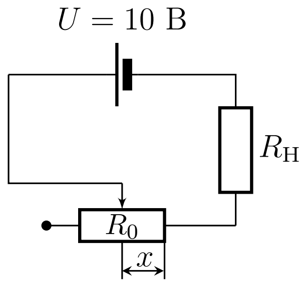
1) Какое количество теплоты Q выделилось в результате столкновения брусков?
2) Найдите коэффициент трения μ между брусками и горизонтальной поверхностью.
3) Определите максимальное удлинение пружины x_2 в процессе движения брусков.

Задача 10.4. Вести из архивов. В архиве некоторой малоизвестной оптической лаборатории был найден рисунок, изображающий ход двух лучей через тонкую идеальную линзу. К сожалению, на наиболее важной части рисунка чернила очень выцвели. В записях нашли фразу о том, что один из лучей идёт по главной оптической оси. Определите:

- положение оптического центра линзы O;
- тип линзы (собирающая или рассеивающая);
- фокусное расстояние линзы F.



Задача 10.5. Неопределённый резистор. Школьник собрал цепь из идеального источника питания с постоянным напряжением $U = 10$ В, нагрузочного резистора $R_\text{Н}$ и реостата с максимальным сопротивлением R_0. Сопротивление реостата изменятся по закону $R = R_0 \cdot x$, где x — положение ползунка реостата, выраженное в долях от его полной длины, $0 \leq x \leq 1$. Школьник измерил зависимость мощности $P_\text{Н}$, выделяющейся на нагрузочном резисторе $R_\text{Н}$, от положения ползунка x. Экспериментально полученные им результаты приведены в таблице ниже.

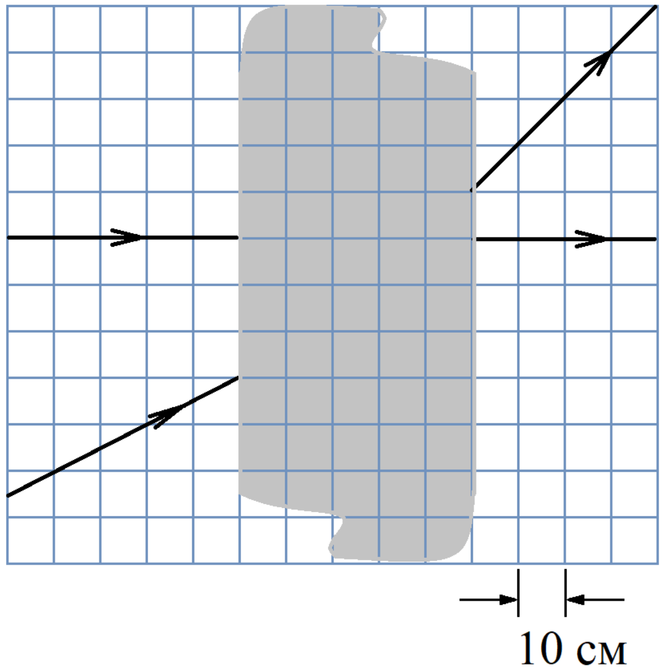


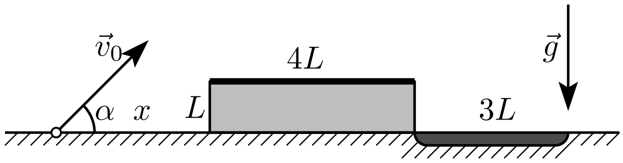
x	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$P_\text{Н}$, Вт	0,38	0,29	0,21	0,16	0,13	0,11

1) Получите теоретическое выражение для мощности на нагрузочном резисторе $P_\text{Н}$ как функцию положения ползунка реостата x.
2) Выражение из п. 1) преобразуйте к виду $y = k \cdot x + b$, где x задаёт положение ползунка реостата, а y зависит от мощности $P_\text{Н}$.
3) Постройте график экспериментальной зависимости $y(x)$ на имеющемся листке с сеткой и графически определите параметры k и b. С помощью данных параметров определите сопротивление нагрузочного резистора $R_\text{Н}$ и максимальное сопротивление реостата R_0.
4) Определите, какое минимальное положение $x_\text{мин}$ можно выставить на реостате в данной схеме подключения, если предельная допустимая мощность на реостате (при $x = 1$) составляет $P_\text{пред} = 1{,}5$ Вт. Ответ округлите до сотых.

Лист для построения графиков

К задаче 10.4.





Задача 10.1. Попрыгунчик. Мальчик бросает мяч от поверхности земли под углом $\alpha = 45°$ к горизонту с начальной скоростью v_0. На расстоянии x от точки броска стоит здание высотой L с плоской твёрдой горизонтальной крышей, а за зданием находится яма. Мальчик хочет, чтобы мяч отскочил от крыши и попал в яму. Длина здания $4L$, длина ямы $3L$, начальная скорость мяча $v_0 = 4\sqrt{\dfrac{Lg}{3}}$.

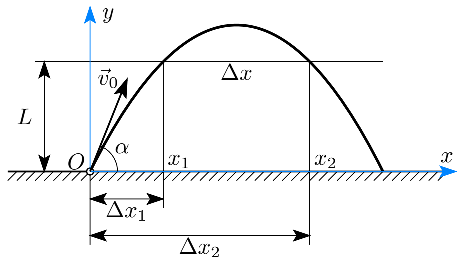
1) Какое количество N отскоков мяча от крыши возможно?
2) Определите, какой диапазон расстояний l от точки броска до здания соответствуют каждому значению N.
3) Определите возможные значения x, при которых мяч попадёт в яму.

Ускорение свободного падения равно g. Отскок мяча от крыши считайте абсолютно упругим. Сопротивлением воздуха пренебречь. От земли, стен здания и ямы мяч не отскакивает.

Решение. Поскольку отскок мяча от крыши абсолютно упругий, скорость мяча при падении на крышу будет равна по модулю скорости при отскоке, и траектория мяча после отскока будет той же параболой, что и траектория при броске, но смещённой по горизонтали.

Введём систему координат xOy, как показано на рисунке. Рассмотрим уравнение траектории мяча в этой системе координат:

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = x - \frac{3}{16}\frac{x^2}{L}. \qquad (1)$$



Найдём расстояние Δx между точками отскоков (если их больше одного). Для этого найдём координаты x при высоте, равной L:

$$L = x - \frac{3}{16}\frac{x^2}{L} \;\Rightarrow\; \frac{3}{16L}\cdot x^2 - x + L = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot\dfrac{3L}{16L}}}{2\cdot\dfrac{3}{16L}} = \frac{8L}{3}\left(1 \pm \frac{1}{2}\right). \qquad (2)$$

Расстояние между точками отскоков:

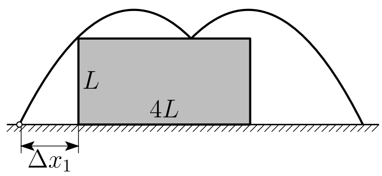
$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{8L}{3}. \qquad (3)$$

Длина крыши $4L$ больше Δx, но меньше $2\Delta x$, следовательно, может произойти один или два отскока мяча от крыши.

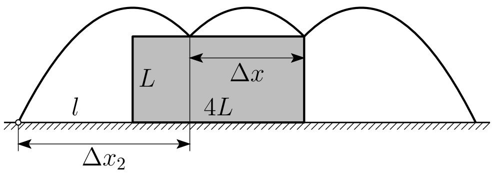
Для удобства дальнейшего решения введём следующие обозначения: Δx_1 — расстояние по горизонтали от точки броска до первой точки на высоте L, Δx_2 — расстояние от точки броска до второй точки на высоте L (см. рисунок). Тогда

$$\Delta x_1 = x_1 = \frac{4L}{3}, \qquad \Delta x_2 = \Delta x + \Delta x_1 = \frac{8L}{3} + \frac{4L}{3} = 4L. \qquad (4)$$

Рассмотрим, при каких l может произойти один отскок. Чтобы мяч отскочил от крыши, он должен перелететь через край крыши, то есть $l > \Delta x_1 = \dfrac{4L}{3}$.

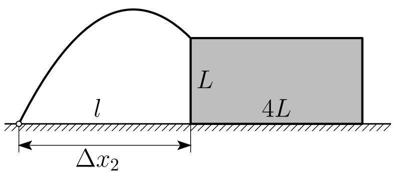


Теперь рассмотрим условие для второго отскока. Второй отскок появится вблизи дальнего от места броска края крыши. При этом $l + 4L = \Delta x_2 + \Delta x$, $l = \Delta x_2 + \Delta x - 4L = 4L + \dfrac{8L}{3} - 4L = \dfrac{8L}{3}$. Таким образом, один отскок мяча возможен при



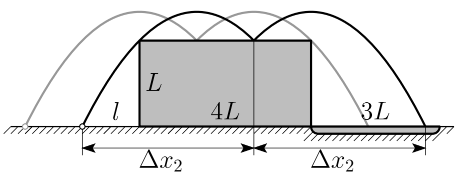
$$\frac{4L}{3} < l < \frac{8L}{3}, \quad \text{или } l \in \left(\frac{4L}{3}, \frac{8L}{3}\right). \tag{5}$$

Наконец, мяч вообще не будет ударяться о крышу, если он не долетит до её края при $l > \Delta x_2 = 4L$. Таким образом, два отскока возможны при



$$\frac{8L}{3} < l < 4L, \quad \text{или } l \in \left(\frac{8L}{3}, 4L\right). \tag{6}$$

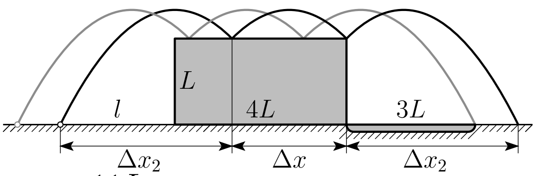
Рассмотрим условия попадания мяча в яму. При одном отскоке расстояние от места броска до точки падения мяча на землю будет равно $2\Delta x_2 = 8L$, а расстояние по горизонтали от дальнего края здания до точки броска равно $8L - l - 4L$, что должно быть меньше длины ямы $3L$:



$$8L - l - 4L < 3L \quad \Rightarrow \quad l > L. \tag{7}$$

Легко видеть, что это неравенство выполняется всегда при выполнении условия одного отскока мяча от крыши (неравенство (5)).

Теперь рассмотрим случай двух отскоков. Расстояние между точками броска и падения мяча на землю будет равно $2\Delta x_2 + \Delta x = 8L + \dfrac{8L}{3} = 10\dfrac{2}{3}L$. Расстояние по горизонтали от края здания до точки падения



$$10\frac{2}{3}L - l - 4L < 3L \quad \Rightarrow \quad l > \frac{11L}{3}. \tag{8}$$

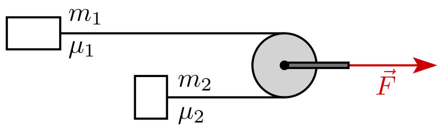
Совместно с неравенством (6), это выражение определяет условие попадания мяча в яму при двух отскоках: $\dfrac{11L}{3} < l < 4L$. Окончательно получаем условие попадания мяча в яму:

$$l \in \left(\frac{4L}{3}, \frac{8L}{3}\right) \cup \left(\frac{11L}{3}, 4L\right). \tag{9}$$

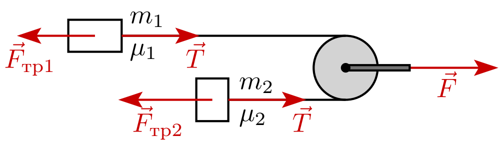
Критерии оценивания задачи 10.1. Попрыгунчик.

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Корректно записано уравнение траектории движения или иные кинематические соотношения, позволяющие определить расстояния $\Delta x, \Delta x_1, \Delta x_2$	Формула (1)	1
2	Определено расстояние между точками отскока мяча Δx	$\dfrac{8L}{3}$	2
3	Определено, что мяч будет отскакивать от крыши один или два раза		1
4	Определены расстояния $\Delta x_1, \Delta x_2$ или эквивалентные	$\Delta x_1 = \dfrac{4L}{3}, \Delta x_2 = 4L$	1
5	Определено условие одного отскока мяча от крыши	$l \in \left(\dfrac{4L}{3}, \dfrac{8L}{3}\right)$	1
6	Определено условие двух отскоков мяча от крыши	$l \in \left(\dfrac{8L}{3}, 4L\right)$	1
7	Определено условие попадания мяча в яму при одном отскоке	$l \in \left(\dfrac{4L}{3}, \dfrac{8L}{3}\right)$	1
8	Определено условие попадания мяча в яму при двух отскоках	$l \in \left(\dfrac{11L}{3}, 4L\right)$	1
9	Записано полное условие попадания мяча в яму	$l \in \left(\dfrac{4L}{3}, \dfrac{8L}{3}\right) \cup \left(\dfrac{11L}{3}, 4L\right)$ или аналогичное	1

Задача 10.2. Ускорения на блоке. На горизонтальной поверхности находится система, состоящая из двух грузов массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 300$ г. Грузы связаны нерастяжимой нитью пренебрежимо малой массы, перекинутой через очень лёгкий блок. На ось блока действует горизонтальная сила F, постепенно увеличивающаяся от нулевого значения. Определите ускорения тел и оси блока в зависимости от величины силы F. Коэффициенты трения скольжения тел по поверхности известны и равны $\mu_1 = 0{,}2$ для первого тела и $\mu_2 = 0{,}1$ для второго тела. Свободные участки нити горизонтальны. Трение в блоке отсутствует. На рисунке представлен вид системы сверху. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Решение. Расставим силы, действующие в системе. Силы тяжести и силы нормальной реакции не указаны.



Так как нить и блок невесомы, трения в блоке нет, то сила натяжения нити T одинакова по всей длине и равна $F/2$.

$$T = \frac{F}{2} \tag{1}$$

С увеличением значения силы F увеличивается сила натяжения, когда сила натяжения превысит максимальное значение силы трения покоя для какого-либо из тел, тело придёт в движение. При различных значениях силы F возможны следующие случаи движения тел в системе:

Случай 1. Все тела покоятся.

Случай 2. Одно тело покоится, другое тело и блок движутся ускоренно.

Случай 3. Все тела движутся.

Рассмотрим случай 1. Определим максимальные значения сил трения покоя для обоих грузов

$$\begin{aligned} F^{\text{ск}}_{\text{тр max 1}} &= \mu_1 m_1 g; \qquad F^{\text{ск}}_{\text{тр max 1}} = 0{,}2 \cdot 0{,}2\ \text{кг} \cdot 10\ \text{м/с}^2 = 0{,}4\ \text{Н};\\ F^{\text{ск}}_{\text{тр max 2}} &= \mu_2 m_2 g; \qquad F^{\text{ск}}_{\text{тр max 2}} = 0{,}1 \cdot 0{,}3\ \text{кг} \cdot 10\ \text{м/с}^2 = 0{,}3\ \text{Н}. \end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, видим, что при $T \le 0{,}3$ Н и $F \le 0{,}6$ Н система покоится, ускорения всех тел равны нулю.

Если $0{,}3\ \text{Н} < T \le 0{,}4$ Н и $0{,}6\ \text{Н} < F \le 0{,}8$ Н, то второй груз и блок приходят в движение, а первое продолжает покоиться. Ускорение второго груза определим из второго закона Ньютона

$$\begin{aligned} m_2 a_2 &= T - \mu_2 m_2 g;\\ a_2 &= \frac{F}{2m_2} - \mu_2 g. \end{aligned} \tag{3}$$

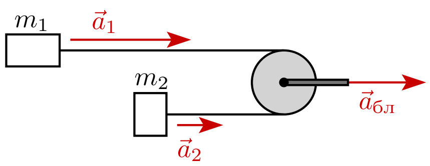
Из условия нерастяжимости нити следует, что в случае, когда первый груз неподвижен, ускорение оси блока $a_{\text{бл}}$ вдвое меньше ускорения второго груза:

$$a_{\text{бл}} = \frac{a_2}{2} = \frac{F}{4m_2} - \frac{\mu_2 g}{2} \tag{4}$$

Если $T > 0{,}4$ Н и $F > 0{,}8$ Н, то движутся оба груза. Ускорение второго груза мы уже нашли ранее, а ускорение первого определяется из второго закона Ньютона

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= T - \mu_1 m_1 g;\\ a_1 &= \frac{F}{2m_1} - \mu_1 g. \end{aligned} \tag{5}$$

Определим ускорение блока. Для этого воспользуемся «известным фактом», что при неподвижной оси блока ускорения грузов равны по модулю и противоположны по направлению. Блок может двигаться только вправо. Для того, чтобы воспользоваться «известным фактом», перейдём в систему отсчёта, связанную с блоком и движущуюся вправо с ускорением $a_{бл}$.



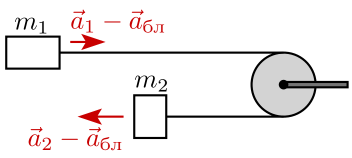
неподвижная система отсчёта

Ускорение первого груза в движущейся системе отсчёта равно

$$\vec{a}_1' = \vec{a}_1 - \vec{a}_{бл}. \tag{6}$$

Ускорение второго груза в этой системе отсчёта равно

$$\vec{a}_2' = \vec{a}_2 - \vec{a}_{бл}. \tag{7}$$



движущаяся система отсчёта
(в системе «блок»)

Так как в этой системе отсчёта блок неподвижен, то грузы движутся с одинаковыми по модулю, но противоположно направленными ускорениями, поэтому

$$\vec{a}_1' = -\vec{a}_2'. \tag{8}$$

Из записанных выражений находим ускорение оси блока

$$\vec{a}_{бл} = \frac{\vec{a}_2 + \vec{a}_1}{2}. \tag{9}$$

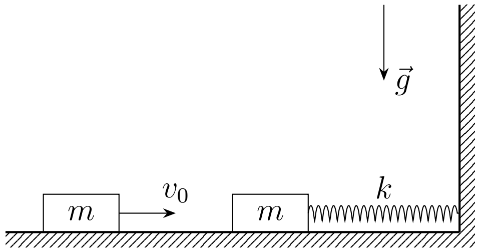
Проецируя на ось OX, получим

$$a_{бл} = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{2m_1} + \frac{F}{2m_2} - (\mu_1 + \mu_2)\,g\right). \tag{10}$$

Критерии оценивания задачи 10.2. Ускорения на блоке.

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Сила натяжения нити равна $F/2$		0,5
2	Указано, что при различных значениях силы F возможны три варианта движения		1
3	В явном виде написано про равенство сил трения покоя и силы трения скольжения		0,5
4	Рассчитаны значения сил трения скольжения для каждого из тел	$F^{ск}_{тр\ max\ 1} = 0{,}4$ Н, $F^{ск}_{тр\ max\ 2} = 0{,}3$ Н.	0,5
5	Записано условие покоя системы	$F \le 0{,}6$ Н	1
6	Рассмотрен случай $0{,}6$ Н $< F \le 0{,}8$ Н: • отмечено, что второй груз движется, а первый покоится • найдено ускорение второго груза • найдено ускорение оси блока	 $\frac{F}{2m_2} - \mu_2 g$ $\frac{F}{4m_2} - \frac{\mu_2 g}{2}$	2,5 из них: 0,5 1 1
7	Рассмотрен случай $F > 0{,}8$ Н: • отмечено, что оба груза движутся • найдено ускорение первого груза • правильно и обоснованно найдено ускорение оси блока	 $\frac{F}{2m_1} - \mu_1 g$ $\frac{1}{2}\left(\frac{F}{2m_1} + \frac{F}{2m_2} - (\mu_1 + \mu_2)\,g\right)$	4 из них: 0,5 1 2,5

Задача 10.3. Максимумы деформаций. На горизонтальной шероховатой поверхности покоится брусок массой $m = 0{,}5$ кг. Брусок соединён с вертикальной стенкой с помощью горизонтальной и перпендикулярной стенке недеформированной пружины. Жёсткость пружины $k = 72$ Н/м. В сторону покоящегося бруска движется такой же брусок. Между брусками происходит абсолютно неупругое столкновение, в результате которого они не слипаются. Прямо перед столкновением скорость движущегося бруска $v_0 = 6$ м/с. В процессе движения брусков после столкновения величина максимального сжатия пружины оказалась равной $x_1 = 34$ см, при этом бруски со стенкой не сталкивались. Считайте горизонтальную поверхность однородной. Явлением застоя, сопротивлением воздуха и временем столкновения можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



1) Какое количество теплоты Q выделилось в результате столкновения брусков?
2) Найдите коэффициент трения μ между брусками и горизонтальной поверхностью.
3) Определите максимальное удлинение пружины x_2 в процессе движения брусков.

Решение. 1) Сразу после столкновения бруски движутся с одинаковой скоростью. Обозначим её за v. Поскольку сила трения является конечной, а столкновение – быстрым, для брусков выполняется закон сохранения импульса:

$$mv_0 = 2mv \Rightarrow v = v_0/2.$$

Выделившееся в результате столкновения количество теплоты Q равняется убыли кинетической энергии системы. Получим:

$$Q = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{2mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{4} = 4{,}5 \text{ Дж}.$$

2) После столкновения брусков оба они движутся по направлению к стенке, а пружина начинает сжиматься. Это приводит к тому, что при движении по направлению к стенке бруски будут контактировать друг с другом, т.е двигаться с равными скоростями, а значит, их можно рассматривать как единое целое.

Воспользуемся теоремой об изменении механической энергии для системы из брусков и пружины от момента сразу после столкновения до момента максимального сжатия пружины:

$$E_k + A_{\text{тр}} = W_p,$$

где $E_k = 2mv^2/2 = mv_0^2/4$ – суммарная кинетическая энергия брусков сразу после столкновения, $W_p = kx_1^2/2$ – потенциальная энергия пружины в момент максимального сжатия, а $A_{\text{тр}} = -2\mu mgx_1$ – работа сил трения, действующих на бруски. Таким образом:

$$\frac{mv_0^2}{4} - 2\mu mgx_1 = \frac{kx_1^2}{2},$$

откуда:

$$\mu = \frac{v_0^2}{8gx_1} - \frac{kx_1}{4mg} \approx 0{,}10.$$

3) После первой остановки бруски придут в движение в направлении от стены при условии, если сила упругости превысит сумму сил трения скольжения, действующих на бруски. Проверим, выполняется ли данное условие:

$$F_{\text{упр}} = kx_1 \approx 24 \text{ Н}, \; F_{\text{тр}} = 2\mu mg \approx 1 \text{ Н}.$$

Таким образом, бруски начнут движение в направлении от стены.

Пусть в некоторый момент удлинение пружины оказывается равным x, а бруски движутся без отрыва друг от друга с ускорением a_x в проекции на ось x, направленную от стены. Рассматривая систему как единое целое, из второго закона Ньютона получим:

$$2ma_x = -kx - 2\mu mg.$$

Рассмотрим брусок, не прикреплённый к пружине. Из второго закона Ньютона для него получим:

$$ma_x = N - \mu mg \Rightarrow N = ma_x + \mu mg = -\frac{kx}{2} < 0.$$

Найденная нами сила N взаимодействия брусков оказывается отрицательной при $x > 0$, что невозможно. Таким образом, в момент, когда пружина окажется недеформированной, бруски перестанут контактировать и далее будут двигаться по отдельности друг от друга.

Определим скорость u брусков в момент прекращения контакта между ними. Воспользуемся теоремой об изменении механической энергии для системы из брусков и пружины от момента начала движения от стены до момента прекращения контакта:

$$W_p + A_{\text{тр}} = E_k,$$

где $W_p = kx_1^2/2$, $E_k = 2mu^2/2$, $A_{\text{тр}} = -2\mu mgx_1$. Отсюда:

$$u = \sqrt{\frac{kx_1^2}{2m} - 2\mu gx_1} = \sqrt{\frac{kx_1^2}{m} - \frac{v_0^2}{4}} \approx 2{,}8\ \text{м/с}.$$

Величина u^2 оказывается положительной, поэтому в процессе движения пружина действительно вновь окажется недеформированной.

Применим теорему об изменении механической энергии для системы из пружины и прикреплённого к ней бруска от момента прекращения контакта между брусками до момента достижения максимального удлинения пружины:

$$E_k + A_{\text{тр}} = W_p,$$

где $E_k = mu^2/2$, $W_p = kx_2^2/2$, $A_{\text{тр}} = -\mu mgx_2$. Имеем:

$$\frac{kx_2^2}{2} = \frac{mu^2}{2} - \mu mgx_2 = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{8} - \left(\frac{mv_0^2}{8x_1} - \frac{kx_1}{4}\right)x_2.$$

Мы получили квадратное уравнение относительно x_2:

$$x_2^2 + \frac{x_2}{2}\left(\frac{mv_0^2}{2kx_1} - x_1\right) - \left(x_1^2 - \frac{mv_0^2}{4k}\right) = 0.$$

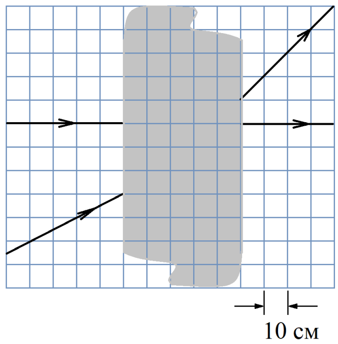
Решая полученное квадратное уравнение и выбирая положительный корень, находим:

$$x_2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{mv_0^2}{2kx_1} - x_1\right) + \sqrt{\frac{1}{16}\left(\frac{mv_0^2}{2kx_1} - x_1\right)^2 + \left(x_1^2 - \frac{mv_0^2}{4k}\right)} \approx 22\ \text{см}.$$

Критерии оценивания задачи 10.3. Максимумы деформаций.

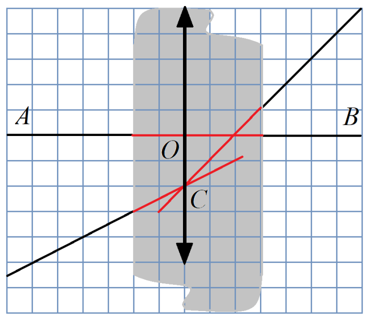
№	Критерий	Значение	Макс. балл
1.1	Определена скорость v брусков сразу после столкновения	$v = \dfrac{v_0}{2}$	0,75
1.2	Найдена суммарная кинетическая энергия брусков E_k сразу после столкновения	$E_k = \dfrac{mv_0^2}{4}$	0,25
1.3	Использовано, что выделившееся в результате столкновения количество теплоты Q равно убыли кинетической энергии системы		0,5
1.4	Найдено количество теплоты Q (*по* 0,25 *балла за выражение и численное значение*)	$Q = \dfrac{mv_0^2}{4} = 4{,}5$ Дж	0,5
2.1	Указано или используется, что после столкновения бруски движутся по направлению к стенке без отрыва друг от друга.		0,25
2.2	Записана теорема об изменении механической энергии для системы из брусков и пружины от момента сразу после столкновения до момента, когда сжатие пружины максимально.	$E_k + A_{\text{тр}} = W_p$	1,0
2.3	Записано выражение для потенциальной энергии упругой деформации пружины W_p в момент максимального сжатия	$W_p = \dfrac{kx_1^2}{2}$	0,25
2.4	Записано выражение для суммарной работы сил трения $A_{\text{тр}}$	$A_{\text{тр}} = -2\mu mgx_1$	0,5
2.5	Найден коэффициент трения μ (*по* 0,5 *балла за выражение и численное значение*)	$\mu = \dfrac{v_0^2}{8gx_1} - \dfrac{kx_1}{4mg} \approx 0{,}10.$	1,0
3.1	Явно проверено, что бруски после остановки начнут движение в направлении от стенки. *Если найдена скорость брусков в момент, когда пружина недеформирована и указано, что она является положительной – пункт оценивается в полный балл*		0,5

3.2	Показано, что в момент, когда пружина становится недеформированной, бруски прекращают контактировать друг с другом.		1,0
3.3	Записана теорема об изменении механической энергии для системы из брусков и пружины от момента, когда бруски начинают движение в направлении от стенки до момента, когда пружина становится недеформированной	$\frac{kx_1^2}{2} - 2\mu mgx_1 = \frac{2mu^2}{2}$	1,0
3.4	Проверено, что величина u^2 является положительной и сделан вывод, что пружина будет растянута		0,5
3.5	Записана теорема об изменении механической энергии системы из пружины и прикреплённого к ней бруска от момента прекращения контакта между брусками до момента максимального удлинения пружины	$\frac{mu^2}{2} - \mu mgx_2 = \frac{kx_2^2}{2}$	1,0
3.6	Найдено максимальное удлинение пружины x_2. *Ставится по* 0,5 *балла за численное значение и формульное выражение (в представленном или математически ему эквивалентном виде)*: $$x_2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{mv_0^2}{2kx_1} - x_1\right) + \sqrt{\frac{1}{16}\left(\frac{mv_0^2}{2kx_1} - x_1\right)^2 + \left(x_1^2 - \frac{mv_0^2}{4k}\right)} \approx 22 \text{ см}$$		1,0

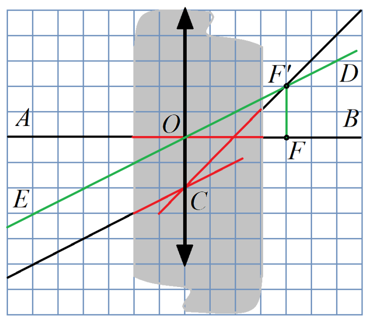


Задача 10.4. Вести из архивов. В архиве некоторой малоизвестной оптической лаборатории был найден рисунок, изображающий ход двух лучей через тонкую идеальную линзу. К сожалению, на наиболее важной части рисунка чернила очень выцвели. В записях нашли фразу о том, что один из лучей идёт по главной оптической оси. Определите:

- положение оптического центра линзы O;
- тип линзы (собирающая или рассеивающая);
- фокусное расстояние линзы F.



Решение. Известно, что луч, идущий по главной оптической оси, не преломляется. Следовательно, прямая AB является главной оптической осью линзы. Продолжим два других луча до точки пересечения C. Эта точка лежит на преломляющей поверхности линзы. Проведя перпендикуляр из точки C к главной оптической оси линзы AB, получим её поверхность.



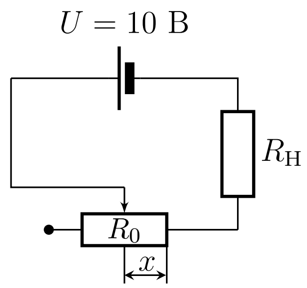
Для определения положения фокуса линзы сделаем следующее: через оптический центр линзы проведём прямую, параллельную падающему лучу. Эта прямая является побочной оптической осью линзы, луч, идущий по ней, не преломляется. Прямая EF' пересекается в преломлённым лучом в точке F', которая является побочным фокусом, то есть находится в фокальной плоскости линзы. Положение фокуса линзы F определим, опустив перпендикуляр из F' на главную оптическую ось.

Получаем, что фокусное расстояние линзы составляет 4 клетки, следовательно, равно $F = 40$ см. Линза собирающая.

Критерии оценивания задачи 10.4. Вести из архивов.

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Проведена оптическая ось линзы		1
2	Наклонные лучи продолжены до точки пересечения		1
3	Указано, что точка пересечения лучей из п. 2 лежит на преломляющей поверхности линзы		1
4	Восстановлен оптический центр линзы		1
5	Проведена побочная оптическая ось		1
6	Найден побочный фокус линзы		1
7	Восстановлена фокальная плоскость, определено положение фокуса		2
8	Указано, что линза собирающая		1
9	Определено фокусное расстояние	$F = 40$ см	1

Задача 10.5. Неопределённый резистор. Школьник собрал цепь из идеального источника питания с постоянным напряжением $U = 10$ В, нагрузочного резистора $R_{\text{Н}}$ и реостата с максимальным сопротивлением R_0. Сопротивление реостата изменятся по закону $R = R_0 \cdot x$, где x — положение ползунка реостата, выраженное в долях от его полной длины, $0 \le x \le 1$. Школьник измерил зависимость мощности $P_{\text{Н}}$, выделяющейся на нагрузочном резисторе $R_{\text{Н}}$, от положения ползунка x. Экспериментально полученные им результаты приведены в таблице ниже.



x	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$P_{\text{Н}}$, Вт	0,38	0,29	0,21	0,16	0,13	0,11

1) Получите теоретическое выражение для мощности на нагрузочном резисторе $P_{\text{Н}}$ как функцию положения ползунка реостата x.
2) Выражение из п. 1) преобразуйте к виду $y = k\cdot x+b$, где x задаёт положение ползунка реостата, а y зависит от мощности $P_{\text{Н}}$.
3) Постройте график экспериментальной зависимости $y(x)$ на имеющемся листке с сеткой и графически определите параметры k и b. С помощью данных параметров определите сопротивление нагрузочного резистора $R_{\text{Н}}$ и максимальное сопротивление реостата R_0.
4) Определите, какое минимальное положение $x_{\text{мин}}$ можно выставить на реостате в данной схеме подключения, если предельная допустимая мощность на реостате (при $x = 1$) составляет $P_{\text{пред}} = 1{,}5$ Вт. Ответ округлите до сотых.

Решение. Мощность тока определяется формулой:

$$P = I^2R. \tag{1}$$

Закон Ома:

$$I = \frac{U}{R_{\text{цепи}}}. \tag{2}$$

Соединение последовательное, то есть $R_{\text{цепи}} = R_{\text{Н}} + R_0x$. Тогда мощность тока на нагрузочном резисторе

$$P_{\text{Н}} = \frac{U^2R_{\text{Н}}}{(R_{\text{Н}} + R_0x)^2}. \tag{3}$$

Извлечём квадратный корень, умножим на $(R_{\text{Н}} + R_0x)$ и поделим на $\sqrt{P_{\text{Н}}R_{\text{Н}}}$, в результате чего получим

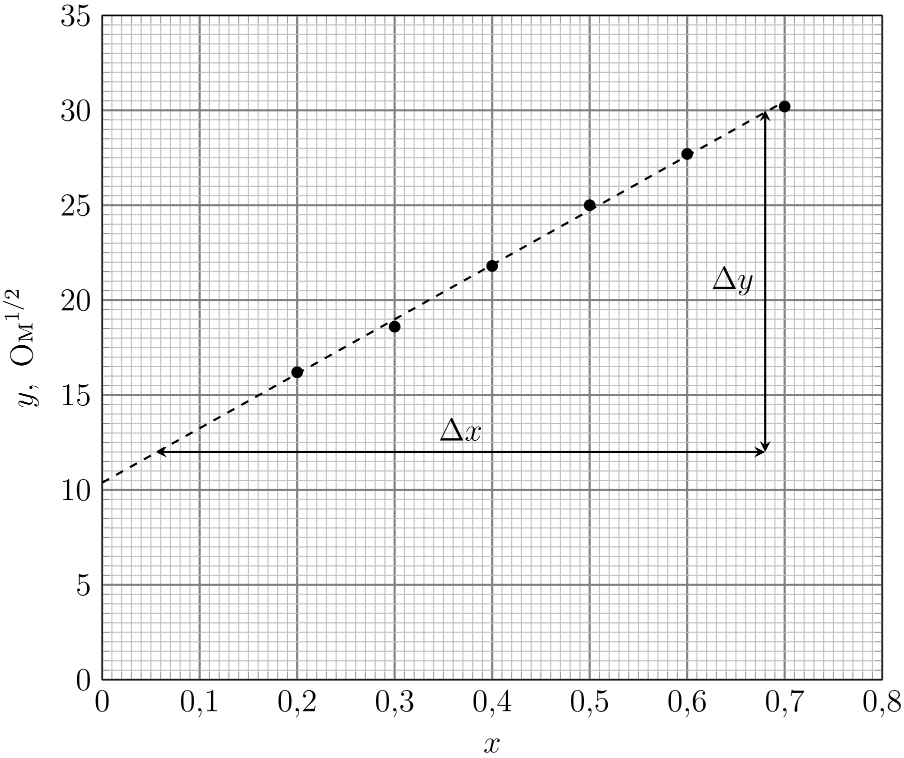
$$\frac{U}{\sqrt{P_{\text{Н}}}} = \frac{R_0}{\sqrt{R_{\text{Н}}}}x + \sqrt{R_{\text{Н}}}. \tag{4}$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением $y = kx + b$, установим, что

$$y = \frac{U}{\sqrt{P_{\text{Н}}}}, \quad k = \frac{R_0}{\sqrt{R_{\text{Н}}}}, \quad b = \sqrt{R_{\text{Н}}}. \tag{5}$$

График зависимости $y(x)$ будет иметь вид прямой линии (а выполненная нами процедура называется линеаризация), коэффициент k можно найти по угловому коэффициенту прямой, коэффициент b — по точке пересечения прямой с осью Oy. Вычисляем значения y, заносим их в таблицу, строим график:

$P_{\text{Н}}$, Вт	0,38	0,29	0,21	0,16	0,13	0,11
x	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
y, Ом$^{1/2}$	16,2	18,6	21,8	25,0	27,7	30,2



Как видно, точки не ложатся идеально на прямую линию, что связано с неточностью измеренных значений. По графику находим:

$$b \approx 10{,}5 \text{ Ом}^{1/2}, \quad k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30 - 12}{0{,}68 - 0{,}06} \approx 29 \text{ Ом}^{1/2}. \tag{6}$$

С помощь коэффициентов b и k найдём сопротивление нагрузочного резистора $R_{\text{Н}}$, максимальное сопротивление реостата R_0:

$$R_{\text{Н}} = b^2 \approx 110 \text{ Ом}, \quad R_0 = k\sqrt{R_{\text{Н}}} \approx 304 \text{ Ом}. \tag{7}$$

В последнем вопросе требуется определить значение $x_{\text{мин}}$ ползунка реостата, при котором реостат ещё выдерживает нагрузку. По условию, предельная мощность измерялась, когда ток шёл по всему реостату, т.е. когда $x = 1$.

$$P_{\text{пред}} = I^2_{\text{пред}} \cdot R_0. \tag{8}$$

Тогда предельный ток, который может проходить через витки реостата

$$I_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{P_{\text{пред}}}{R_0}} \approx 0{,}07 \text{ А}. \tag{9}$$

Предельная нагрузка на реостат определяется именно силой тока, а не номинальной мощностью $P_{\text{пред}}$, так как сопротивление реостата изменяется, и нужно пользоваться интенсивной величиной, а не экстенсивной. С другой стороны, сила тока в контуре:

$$I = \frac{U}{R_{\text{Н}} + R_0 \cdot x}. \tag{10}$$

Минимальное значение ползунка $x_{\text{мин}}$ определяется из условия $I = I_{\text{пред}}$:

$$x_{\text{мин}} = \left(\frac{U}{I_{\text{пред}}} - R_{\text{Н}}\right) \cdot \frac{1}{R_0} = \left(U\sqrt{\frac{R_0}{P_{\text{пред}}}} - R_{\text{Н}}\right) \cdot \frac{1}{R_0} \approx 0{,}11. \tag{11}$$

Критерии оценивания задачи 10.5. Неопределённый резистор.

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Выведена формула зависимости мощности на нагрузочном резисторе $P_{\text{Н}}$ от положения ползунка реостата.	Формула (3) или эквивалентная	2
2	Определена формула для величины y в линейной зависимости $y = kx + b$. Найдены выражения для коэффициентов k, b.	Формула (4) или эквивалентная	2
3	Построен график функции $y(x)$, что включает в себя: • подписаны оси, • поставлены точки, • выбран подходящий масштаб, чтобы график занимал большую часть места, • проведена прямая.		2, из них: 0,5 0,5 0,5 0,5
4	Определена величина $R_{\text{Н}}$ с точностью не хуже ± 20 Ом.	$R_{\text{Н}} = 110$ Ом	1
5	Определена величина R_0 с точностью не хуже ± 40 Ом.	$R_0 = 304$ Ом	1
6	Определение минимально допустимого положения ползунка $x_{\text{мин}}$: • Рассуждения о том, что ограничивающим фактором является сила тока через реостат. • Выражение для $x_{\text{мин}}$ • Определено значение $x_{\text{мин}}$	• Явно написано или использовано в формулах • Формула (11) или эквивалентная ей • $x_{\text{мин}} = 0{,}11$ с точностью до $\pm 0{,}02$	2, из них: 0,5 1 0,5