

**Единый государственный экзамен  
по МАТЕМАТИКЕ  
Профильный уровень**

**Инструкция по выполнению работы**

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8 . 

10	-	0	,	8															
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

*Желаем успеха!*

**Справочные материалы**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

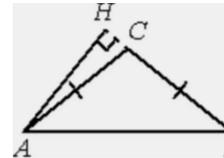
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Часть 1**

*Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.*

- 1** В треугольнике  $ABC$   $AC = BC$ ,  $AB = 20$ , высота  $AH$  равна 8. Найдите синус угла  $BAC$ .

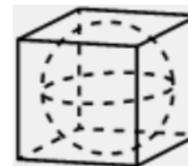


Ответ: \_\_\_\_\_.

- 2** Даны векторы  $\vec{a} (14; -2)$  и  $\vec{b} (5; -8)$ . Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 3** Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 16. Найдите его объём.



Ответ: \_\_\_\_\_.





**4** На конференцию приехали 2 учёных из Дании, 7 из Польши и 3 из Венгрии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четвертым окажется доклад учёного из Венгрии.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**5** Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,06. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**6** Найдите корень уравнения  $(x + 3)^9 = 512$ .

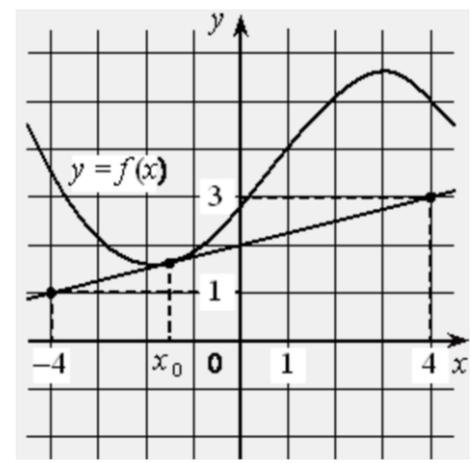
Ответ: \_\_\_\_\_.

**7** Найдите значение выражения

$$\frac{(\sqrt{7} + \sqrt{5})^2}{60 + 10\sqrt{35}}$$

Ответ: \_\_\_\_\_.

**8** На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

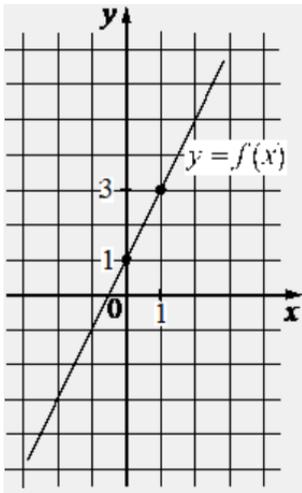
**9** Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$ , где  $T_1$  — температура нагревателя (в кельвинах),  $T_2$  — температура холодильника (в кельвинах). При какой температуре нагревателя  $T_1$  КПД этого двигателя будет 25%, если температура холодильника  $T_2 = 276$  К? Ответ дайте в градусах Кельвина.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**10** Из городов А и В навстречу друг другу одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в город В на 12 часов раньше, чем велосипедист приехал в город А, а встретились они через 2 часа 30 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из города В в город А велосипедист?

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 11 На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = kx + b$ . Найдите значение  $f(5)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 12 Найдите точку максимума функции

$$y = 17 + 15x - 2x^{\frac{3}{2}}.$$

Ответ: \_\_\_\_\_.

**Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.**

**Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.**

Часть 2

**Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.**

- 13 а) Решите уравнение

$$49 \cos^2 x = 7\sqrt{2} \cos x.$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[2\pi; 3\pi]$ .

- 14 На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1 E : EA = 3 : 1$ , на ребре  $BB_1$  – точка  $F$  так, что  $B_1 F : FB = 1 : 3$ , а на ребре  $B_1 C_1$  – точка  $T$  так, что  $B_1 T : TC_1 = 1 : 2$ . Известно, что  $AB = 4$ ,  $AD = 3$ ,  $AA_1 = 4$ .

- а) Докажите, что плоскость  $EFT$  проходит через вершину  $D_1$ .  
б) Найдите угол между плоскостью  $EFT$  и плоскостью  $BB_1 C_1$ .

- 15 Решите неравенство

$$\frac{\log_3(3 - x) - \log_3(x + 2)}{\log_3^2(x)^2 + \log_3(x)^4 + 1} \geq 0.$$

- 16 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 9 282 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Алексей переводит в банк  $x$  рублей. Какой должна быть сумма  $x$ , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

- 17 В прямоугольную трапецию  $ABCD$  с прямым углом при вершине  $A$  и острым углом при вершине  $D$  вписана окружность с центром  $O$ . Прямая  $DO$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $M$ , а прямая  $CO$  пересекает сторону  $AD$  в точке  $K$ .

- а) Докажите, что  $\angle AMO = \angle DKO$ .  
б) Найдите площадь треугольника  $AOM$ , если  $BC = 10$  и  $AD = 15$ .



18 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy - x + 8) \cdot \sqrt{y - x + 8} = 0, \\ y = ax - 7 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

19 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3345.

- Может ли последовательность состоять из двух членов?
- Может ли последовательность состоять из трёх членов?
- Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

*Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.*

**СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:**

<b>ФИО:</b>	Евгений Пифагор
<b>Предмет:</b>	Математика
<b>Стаж:</b>	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
<b>Регалии:</b>	Набрал <a href="#">100 баллов</a> на ЕГЭ по математике профиль <a href="#">Результаты моих учеников</a> Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
<b>ВК:</b>	<a href="https://vk.com/shkolapifagora">https://vk.com/shkolapifagora</a>
<b>Ютуб:</b>	<a href="https://www.youtube.com/c/pifagor1">https://www.youtube.com/c/pifagor1</a>



### Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	0,4	
2	86	
3	32768	
4	0,25	
5	0,069	
6	-1	
7	0,2	
8	0,25	
9	368	
10	15	
11	11	
12	25	
13	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{9\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$	
14	$\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$	
15	$\left(-2; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$	
16	2928200	
17	30	
18	$(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{7}{8}\right] \cup \{1\} \cup \{2\}$	
19	а) нет б) да в) 477	

### Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



13 а) Решите уравнение

$$49\cos^2 x = 7\sqrt{2}\cos x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[2\pi; 3\pi]$ .

$$\begin{aligned} \text{а) } (7^2)\cos^2 x &= 7\sqrt{2}\cos x \\ 7^2\cos^2 x &= 7\sqrt{2}\cos x \\ 2\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x &= 0 \\ \cos x \cdot (2\cos x - \sqrt{2}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x = 0 & \quad 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z} & \quad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ & \quad x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Получим  
 $x = \frac{5\pi}{2}$   
 $x = \frac{2\pi^4}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$   
 Ответ: а)  $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$   
 б)  $\frac{9\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}$ .

**ИСТОЧНИКИ**

- Ященко 2022 (50 вар)
- Ященко 2020 (50 вар)
- Ященко 2019 (36 вар)
- Ященко 2019 (14 вар)
- Основная школа 2017

**СТЕПЕНИ**

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

14 На ребре  $AA_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD, B_1, C_1, D_1$  взята точка  $E$  так, что  $A_1E:EA = 3:1$ , на ребре  $BB_1$  — точка  $F$  так, что  $B_1F:FB = 1:3$ , а на ребре  $B_1C_1$  — точка  $T$  так, что  $B_1T:TC_1 = 1:2$ . Известно, что  $AB = 4, AD = 3, AA_1 = 4$ .

а) Докажите, что плоскость  $EFT$  проходит через вершину  $D_1$ .  
 б) Найдите угол между плоскостью  $EFT$  и плоскостью  $BB_1C_1$ .

а) 1) Плоскость сеч. пересекает паралл. грани по паралл. прямым  $FT \parallel EK$  где  $K \in A_1D_1$ .

2)  $\triangle B_1FT$  — равноуг. и р/б. значит  $\triangle A_1EK$  — равноуг. и р/б. значит  $A_1K = 3 = A_1E$

Итого  $A_1D_1 = 3$  значит  $K$  и  $D_1$  совпадают  $D_1 \in (EFT)$

б) Угол  $\alpha = \angle$  между плоскостями  $EFT$  и  $BB_1C_1$   
 $\cos \alpha = \frac{S_{PFTC_1}}{S_{EFTD_1}}$

Рассмотрим  $EFTD_1$  п/б.  $FT \parallel D_1E$

Угол  $\alpha$  — угол между плоскостью сечения и плоскостью проекции сечения

$S_{EFTD_1} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 9$   
 $S_{PFTC_1} = \frac{3 \cdot 3}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} = 4$   
 $\cos \alpha = \frac{4}{9}$   
 $\alpha = \arccos\left(\frac{4}{9}\right)$   
 Ответ:  $\arccos\left(\frac{4}{9}\right)$

**ИСТОЧНИКИ**

- ГПР (старый банк)
- ГПР (новый банк)
- Ященко 2022 (50 вар)
- Ященко 2022 (14 вар)
- Ященко 2021 (10 вар)
- Ященко 2020 (10 вар)
- Ященко 2020 (14 вар)
- Ященко 2020 (36 вар)
- Ященко 2020 (50 вар)
- Ященко 2019 (50 вар)
- Ященко 2019 (14 вар)

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3



15 Решите неравенство

$$\frac{\log_3(3-x) - \log_3(x+2)}{\log_3^2(x)^2 + \log_3(x)^4 + 1} \geq 0.$$

$$\frac{\log_3(3-x) - \log_3(x+2)}{\log_3^2(x)^2 + 2\log_3(x)^2 + 1} \geq 0$$

$$\frac{\log_3(3-x) - \log_3(x+2)}{(\log_3(x)^2 - (-1))^2} \geq 0$$

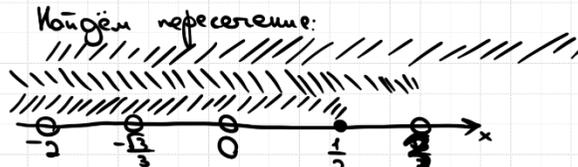
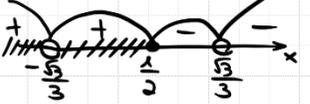
$$\frac{\log_3(3-x) - \log_3(x+2)}{(\log_3(x)^2 - \log_3(\frac{1}{3}))^2} \geq 0$$

$$\frac{(3-x) \cdot (3-x-x-2)}{(x^2 - \frac{1}{3}) \cdot (3-x) \cdot (x^2 - \frac{1}{3})} \geq 0$$

- ①  $3-x > 0$
- ②  $x+2 > 0$
- ③  $x^2 > 0$

- ①  $\frac{-2x+1}{(x^2 - \sqrt{\frac{1}{3}})^2} \geq 0$
- ②  $x < 3$
- ③  $x > -2$
- ④  $x^2 > 0$   
 $x \neq 0$

$$\frac{1-2x}{(x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 (x + \frac{1}{\sqrt{3}})^2} \geq 0$$



Ответ:  $(-2; -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (-\frac{\sqrt{3}}{3}; 0) \cup (0; \frac{1}{2}]$ .

**ИСТОЧНИКИ**

ГРП (старый банк)  
ГРП (новый банк)  
Демо 2025  
Основные волны 2023

**ФСУ**

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

**МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ**

ВЫЛО	СТАЛО
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$ f  -  g $	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

**СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ**

- $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$
- $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$
- $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$
- $\log_a a^b = \frac{1}{a} \cdot \log_a b$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	
	2

16

31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 9 282 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Алексей переводит в банк  $x$  рублей. Какой должен быть сумма  $x$ , чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Пусть 1 платеж -  $x$  рублей  
 $S = 9\,282\,000$

$$\frac{11^4}{10^4} \cdot S = \frac{11^3}{10^3}x + \frac{11^2}{10^2}x + \frac{11}{10}x + \frac{x}{1}$$

Дата	Сумма долга
31дек 14	$S$
31дек 15	$1,1 \cdot S$
1 янв 16	$1,1 \cdot S - x$
31дек 16	$1,1^2 \cdot S - 1,1x$
1 янв 17	$1,1^2 \cdot S - 1,1x - x$
31дек 17	$1,1^3 \cdot S - 1,1^2x - 1,1x$
1 янв 18	$1,1^3 \cdot S - 1,1^2x - 1,1x - x$
31дек 18	$1,1^4 \cdot S - 1,1^3x - 1,1^2x - 1,1x$
1 янв 19	$1,1^4 \cdot S - 1,1^3x - 1,1^2x - 1,1x - x = 0$

$$\frac{11^4}{10^4} \cdot S = \frac{1331x + 1210x + 110x + 1000x}{10^3}$$

$$\frac{11^4}{10^4} \cdot S = \frac{4641 \cdot x}{10^3}$$

$$x = \frac{11^4 \cdot S \cdot 10^3}{10^4 \cdot 4641} = \frac{14641 \cdot 9282 \cdot 1000}{10 \cdot 4641} = 2\,928\,200 \text{ р.}$$

Ответ: 2 928 200 р.

**ИСТОЧНИКИ**

Ященко 2022 (50 вар)  
 Ященко 2022 (14 вар)  
 Ященко 2020 (16 вар)  
 Ященко 2020 (36 вар)  
 Ященко 2020 (50 вар)  
 Ященко 2019 (36 вар)  
 Ященко 2019 (50 вар)  
 Ященко 2019 (14 вар)  
 Ященко 2019 (36 вар)  
 Ященко 2018 (20 вар)  
 Ященко 2017 (50 вар)  
 Демо 2016  
 Демо 2015

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	
	2



**17** В прямоугольную трапецию  $ABCD$  с прямым углом при вершине  $A$  и острым углом при вершине  $D$  вписана окружность с центром  $O$ . Прямая  $DO$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $M$ , а прямая  $CO$  пересекает сторону  $AD$  в точке  $K$ .

а) Докажите, что  $\angle AMO = \angle DKO$ .  
 б) Найдите площадь треугольника  $AOM$ , если  $BC = 10$  и  $AD = 15$ .

а) Пусть  $\angle CKD = d$   
 Тогда  $\angle BCK = d$  (накрест лежащие)

б) Пусть  $\angle CKD = d$   
 $\angle DCO = \angle BCO$   
 (по св-ву отв. кас. и по св-ву дуги одной окружности)  
 $\angle CDK = 180 - 2d$   
 $\angle CDO = 90 - d = \angle CKO$   
 $\triangle MAD$ :  
 $\angle AMD = 180 - 90 - (90 - d) = d$   
 $\angle AMO = d = \angle DKO$

б) 1)  $S_{AOM} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot r$   
 Найдём  $AM$  и  $r$   
 Пусть  $r = \Gamma$

2)  $\triangle AOM = \triangle BOC$   
 $AM = BC = 10$

3)  $\triangle COD$  - прямоугольный  
 $OG^2 = CG \cdot DG$   
 $r^2 = (10 - r) \cdot (15 - r)$   
 $r^2 = 150 - 10r - 15r + r^2$   
 $25 \cdot r = 150$   
 $r = 6$   
 Получаем  $S_{AOM} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30$   
 Ответ: б) 30.

**ИСТОЧНИКИ**  
 Основная волна 2017  
 СВОЙСТВО ОТРЕЗКОВ КАСАТЕЛЬНЫХ  
 Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.  
 СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА 180°  
 ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ  
 УСУ  
 Равны  
 НАКРЕСТ ЛЕЖАЩИЕ УГЛЫ  
 Если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны (признак параллельности прямых)  
 ВТОРОЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ  
 По стороне и двум углам

**18** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy - x + 8) \cdot \sqrt{y - x + 8} = 0, \\ y = ax - 7 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Имеет ровно два различных решения.

$$\begin{cases} xy - x + 8 = 0 \\ y - x + 8 = 0 \\ y - x + 8 \geq 0 \\ y = ax - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - \frac{8}{x} \\ y = x - 8 \\ y \geq x - 8 \\ y = ax - 7 \end{cases}$$

пусть  $f(x)$  - линия со стартом в  $(0; -7)$

1) Найдём координаты  $A$  и  $B$ :  
 $y = x - 8$  касается  $y = 1 - \frac{8}{x}$   
 $x - 8 = 1 - \frac{8}{x}$   
 $x - 9 + \frac{8}{x} = 0$   
 $x^2 - 9x + 8 = 0$   
 $x = 1$      $x = 8$   
 $y = -7$      $y = 0$   
 $A(1; -7)$      $B(8; 0)$

2) Найдём  $a$  для прямой  $k$ :  
 $y = ax - 7$  проходит через  $A(1; -7)$   
 $-7 = a \cdot 1 - 7$   
 $a = 0$   
 Найдём  $a$  для прямой  $l$ :  
 $y = ax - 7$  проходит через  $B(8; 0)$   
 $0 = 8a - 7$   
 $a = \frac{7}{8}$

3) Найдём  $a$  для прямой  $m$ :  
 $a = 1$ , т.к.  $m$  пер.  $y = x - 8$

4) Найдём  $a$  для прямой  $n$ :  
 $y = ax - 7$  касается  $y = 1 - \frac{8}{x}$   
 $\{ a = (1 - \frac{8}{x})' \}$   
 $\{ ax - 7 = 1 - \frac{8}{x} \}$      $a = 2$

Ответ:  $(-\infty; 0) \cup (0; \frac{7}{8}] \cup \{1\} \cup \{2\}$ .

Решения системы уравнений:

- $a < 0$  - 2 реш.
- $a = 0$  - 1 реш.
- $0 < a < \frac{7}{8}$  - 2 р.
- $a = \frac{7}{8}$  - 2 р.
- $\frac{7}{8} < a < 1$  - 3 р.
- $a = 1$  - 2 р.
- $1 < a < 2$  - 3 р.
- $a = 2$  - 2 р.
- $a > 2$  - 1 р.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$	3
Получен обоснованный ответ в пункте $b$ ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , ИЛИ при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений $a$	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений $a$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4





**19** Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3345.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?  
 б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?  
 в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

**ИСТОЧНИКИ**

ЕГЭ (старый формат)  
 Ященко 2022 (16 вар)  
 Ященко 2021 (16 вар)  
 Ященко 2020 (16 вар)  
 Ященко 2019 (16 вар)  
 Ященко 2018 (10 вар)  
 Ященко 2018 (20 вар)

**а) Пусть  $x$  - первый член посл-ти**

**1 случай**  
 $x + 13x = 3345$   
 $14x = 3345$   
 $x = \frac{3345}{14} \notin \mathbb{N}$

**2 случай**  
 $x + \frac{1}{13}x = 3345$   
 $\frac{14}{13}x = 3345$   
 $x = \frac{3345 \cdot 13}{14} \notin \mathbb{N}$

**б) Пусть  $x$  - первый член посл-ти**

**1 случай**  
 $x + 13x + 169x = 3345$   
 $183x = 3345$   
 $x = \frac{3345}{183} = \frac{1115}{61} \notin \mathbb{N}$

**2 случай**  
 $x + 13x + x = 3345$   
 $15x = 3345$   
 $x = \frac{3345}{15} = \frac{1115}{5} = 223$   
 Да, например  $223 + 2899 + 223 = 3345$

**в) Ответ: а) нет.**

б) Сумма наименьших натур. чисел от 1 до  $n$  в 13 раз больше, чем от 1 до  $n-1$ .  
 $\Rightarrow$  нужно перебрать  $n$  и  $n-1$  для максимизации кол-ва членов посл-ти.

**1 случай**  
 $1 + 13 + 169 + \dots + 1 = 3345$   
 $n: 14 = 3345$ , где  $n$  - кол-во членов посл-ти.  
 $n = \frac{3345}{14} = \frac{669}{2} \notin \mathbb{N}$

**2 случай**  
 $1 + 13 + 1 + 13 + 1 + \dots + 1 + 13 = 3345$   
 $n: 14 = 3345$   
 $n \notin \mathbb{N}$

**3 случай**  
 $13 + 1 + 13 + 1 + \dots + 13 + 1 = 3345$   
 $n: 14 = 3345$   
 $n \notin \mathbb{N}$

**4 случай**  
 $13 + 1 + 13 + 1 + 13 + 1 + \dots + 13 = 3345$   
 $n: 14 + 13 = 3345$   
 $n: 14 = 3332$   
 $k = \frac{3332}{14} = \frac{1666}{7} = 238$  (натур.)

Получим 238 пар чисел  $(13, 1)$  и  $13$   
 $477$  членов последовательности

Докажем, что 478 и более членов последовательности быть не может.

Если в посл-ти 478 членов, то разделим их на 239 пар  
 первая - вторая, третья - четвертая и т.д.

Сумма двух членов посл-ти в каждой паре делится на 14 (т.к. это  $13+1=14$ )  
 $\Rightarrow$  сумма двух членов посл-ти в каждой паре не менее 14.

$\Rightarrow$  Сумма всех 478 членов посл-ти не менее  $14 \cdot 239 = 3346$ , т.е. больше, чем 3345, что противоречит условию.  
 $\Rightarrow$  477 - наибольшее кол-во членов посл-ти.  
 Ответ: в) 477.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4