ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ФИЗИКА. 2025–2026 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 9 КЛАСС

Задание 1. Груз над водой, груз в воде (10 баллов)

Однородная доска длиной $L = 1{,}20$ м с прямоугольным сечением площадью $S = 24\,\text{см}^2$ уравновешена горизонтально на единственной опоре. Точка опоры находится на расстоянии $0{,}4L$ от левого конца доски. К доске на расстоянии $0{,}2L$ от того же конца подвешен алюминиевый груз. Плотности древесины и алюминия равны соответственно $\rho_д = 750\,\text{кг/м}^3$ и $\rho_{ал} = 2700\,\text{кг/м}^3$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10\,\text{м/с}^2$.

1. Найдите массу доски M. Ответ выразите в кг, округлив до сотых долей. (2 балла)

2. Определите массу груза m, при которой система находится в равновесии. Ответ выразите в кг, округлив до сотых долей. (2 балла)

3. Найдите силу реакции опоры N_0 в этом положении. Ответ выразите в Н, округлив до десятых долей. (2 балла)

4. Груз полностью погружают в воду плотностью $\rho_в = 1000\,\text{кг/м}^3$, при этом точку его подвеса смещают на расстояние Δx, чтобы доска осталась в горизонтальном положении равновесия. Точка опоры не меняется. Определите расстояние Δx. Ответ выразите в м, округлив до сотых долей. (2 балла)

5. Найдите отношение силы реакции опоры N_1 в новом состоянии равновесия к её значению N_0 в первоначальном состоянии, $\dfrac{N_1}{N_0}$. Ответ округлите до тысячных долей. (2 балла)

Задание 1. Груз над водой, груз в воде (10 баллов)

Однородная доска длиной $L = 1{,}30\,\text{м}$ с прямоугольным сечением площадью $S = 20\,\text{см}^2$ уравновешена горизонтально на единственной опоре. Точка опоры находится на расстоянии $0{,}75L$ от левого конца доски. К доске на расстоянии $0{,}9L$ от того же конца подвешен алюминиевый груз. Плотности древесины и алюминия равны соответственно $\rho_\text{д} = 680\,\text{кг}/\text{м}^3$ и $\rho_\text{ал} = 2700\,\text{кг}/\text{м}^3$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10\,\text{м}/\text{с}^2$.

1. Найдите массу доски M. Ответ выразите в кг, округлив до сотых долей. (2 балла)

2. Определите силу реакции опоры N_0. Ответ выразите в Н, округлив до десятых долей. (2 балла)

3. Груз полностью погружают в масло плотностью $\rho_\text{м} = 820\,\text{кг}/\text{м}^3$. На какое расстояние Δx нужно перенести точку подвеса груза, чтобы восстановить равновесие? Точка опоры не меняется. Ответ выразите в м, округлив до тысячных долей. (2 балла)

4. Найдите силу натяжения нити T, удерживающей груз, после полного погружения и смещения точки подвеса. Ответ выразите в Н, округлив до сотых долей. (2 балла)

5. Найдите отношение силы реакции опоры N_1 после погружения и смещения к её значению N_0 в первоначальном состоянии, $\dfrac{N_1}{N_0}$. Ответ округлите до тысячных долей. (2 балла)

Задание 1. Груз над водой, груз в воде (10 баллов)

Однородная доска длиной $L = 1{,}10\,\text{м}$ с прямоугольным сечением площадью $S = 18\,\text{см}^2$ уравновешена горизонтально на единственной опоре. К доске на расстоянии $0{,}25L$ от левого конца подвешен алюминиевый груз массой $m = 0{,}65\,\text{кг}$. Плотности древесины и алюминия равны соответственно $\rho_\text{д} = 700\,\text{кг/м}^3$ и $\rho_\text{ал} = 2700\,\text{кг/м}^3$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10\,\text{м/с}^2$. Затем груз полностью погружают в воду плотностью $\rho_\text{в} = 1000\,\text{кг/м}^3$, после чего для восстановления равновесия опору перемещают в новое положение.

1. Найдите массу доски M. Ответ выразите в кг, округлив до сотых долей. (2 балла)

2. На каком расстоянии $x_\text{оп}$ от левого конца доски находится опора в первоначальном состоянии? Ответ выразите в м, округлив до тысячных долей. (2 балла)

3. Найдите силу реакции опоры N_0 в первоначальном состоянии. Ответ выразите в Н, округлив до десятых долей. (2 балла)

4. На каком расстоянии $x'_\text{оп}$ от левого конца доски будет находиться опора в новом положении? Ответ выразите в м, округлив до тысячных долей. (2 балла)

5. Найдите отношение силы реакции опоры N_1 в новом состоянии к её значению N_0 в первоначальном состоянии, $\dfrac{N_1}{N_0}$. Ответ округлите до тысячных долей. (2 балла)

Задание 1. Груз над водой, груз в воде (10 баллов)

Однородная доска массой $M = 1{,}80$ кг и длиной $L = 1{,}20$ м уравновешена горизонтально на единственной опоре. Точка опоры находится на расстоянии $0{,}4L$ от левого конца доски. К доске на расстоянии $0{,}2L$ от того же конца подвешен алюминиевый груз. Плотности древесины и алюминия равны соответственно $\rho_{\text{д}} = 720$ кг/м^3 и $\rho_{\text{ал}} = 2700$ кг/м^3. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Затем груз полностью погружают в жидкость неизвестной плотности $\rho_{\text{ж}}$ и смещают точку подвеса груза на $\Delta x = 0{,}12$ м влево вдоль доски, так что равновесие системы восстанавливается.

1. Найдите площадь поперечного сечения доски S. Ответ выразите в см^2, округлив до целого числа.
   (2 балла)

2. Определите массу груза m. Ответ выразите в кг, округлив до сотых долей.
   (2 балла)

3. Найдите плотность жидкости $\rho_{\text{ж}}$. Ответ выразите в кг/м^3, округлив до целого числа. (2 балла)

4. Найдите силу реакции опоры N_1 после погружения и смещения груза. Ответ выразите в Н, округлив до сотых долей. (2 балла)

5. Найдите отношение сил реакции опоры $\dfrac{N_1}{N_0}$, где N_0 — реакция до погружения. Ответ округлите до тысячных долей. (2 балла)

Задание 1. Груз над водой, груз в воде (10 баллов)

Однородная доска длиной L и массой $M = 2{,}16\,\text{кг}$ с прямоугольным сечением площадью $S = 24\,\text{см}^2$ уравновешена горизонтально на единственной опоре. К доске на расстоянии $0{,}25L$ от левого конца подвешен алюминиевый груз массой $m = 1{,}05\,\text{кг}$. Плотности древесины и алюминия равны соответственно $\rho_\text{д} = 750\,\text{кг/м}^3$ и $\rho_\text{ал} = 2700\,\text{кг/м}^3$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10\,\text{м/с}^2$. После полного погружения груза в воду плотностью $\rho_\text{в} = 1000\,\text{кг/м}^3$ точку опоры переносят вдоль доски так, чтобы система вновь пришла в равновесие.

1. Найдите длину доски L. Ответ выразите в м, округлив до десятых долей. (2 балла)

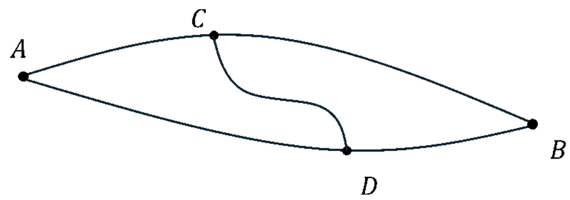
2. На каком расстоянии $x_\text{оп}$ от левого конца доски находится опора в первоначальном состоянии? Ответ выразите в м, округлив до тысячных долей. (2 балла)

3. Определите силу Архимеда F_A, действующую на груз в воде. Ответ выразите в Н, округлив до сотых долей. (2 балла)

4. На каком расстоянии $x'_\text{оп}$ от левого конца доски будет находиться опора в новом положении? Ответ выразите в м, округлив до тысячных долей. (2 балла)

5. Найдите отношение силы реакции опоры N_1 после погружения к её значению N_0 в первоначальном состоянии, $\dfrac{N_1}{N_0}$. Ответ округлите до сотых долей. (2 балла)

Задание 2. Оптимальный маршрут туриста (10 баллов)



Железнодорожные станции A, B, C и D связаны несколькими маршрутами. От станции A до станции B с промежуточной остановкой на станции C ходит поезд «Аист». Он отправляется от A с интервалами 2 ч, начиная с 5:30, а весь маршрут занимает у «Аиста» 280 минут. Также из A в B, но с остановкой в D, ходит поезд «Журавль». Интервалы его следования составляют 50 минут, первый «Журавль» отправляется в 5:50, а весь маршрут занимает у него 240 минут. Временем остановок поездов можно пренебречь. На всём своём маршруте «Аисты» следуют с постоянной средней скоростью. Средняя скорость «Журавлей» также постоянна, но отличается от скорости «Аистов».

Между станциями C и D курсируют в обоих направлениях электрички «Беркут». От станции C в направлении D и от станции D в направлении C «Беркуты» отправляются одновременно с интервалами 30 минут, начиная с 6:00. Маршрут между C и D занимает у них 20 минут.

В приведённой ниже таблицы указаны расстояния между станциями и стоимость проезда от одной до другой.

Участок	Длина, км	Стоимость, руб
AC	180	140
CB	270	210
AD	220	320
DB	190	120
CD	60	80

Турист прибыл на станцию A в 9:20, ему нужно добраться до станции B. Временем пересадок между поездами и электричками можно пренебречь.

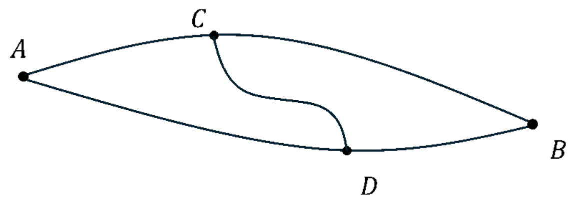
6. Найдите минимальную стоимость проезда от A до B. Ответ выразите в рублях, округлив до целого числа. (2 балла)

7. Найдите минимальное общее время пути по маршруту A → D → C → B (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (2 балла)

8. Найдите среднюю скорость по маршруту A → D → C → B, считая всё время с момента прибытия туриста на станцию A до прибытия в B (включая ожидания). Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (3 балла)

9. Найдите минимально возможное время пути из A в B для любых маршрутов (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (3 балла)

Задание 2. Оптимальный маршрут туриста (10 баллов)



Железнодорожные станции A, B, C и D связаны несколькими маршрутами. От станции A до станции B с промежуточной остановкой на станции C ходит поезд «Аист». Он отправляется от A с интервалами 2 ч 20 мин, начиная с 6:00, а весь маршрут занимает у «Аиста» 300 минут. Также из A в B, но с остановкой в D, ходит поезд «Журавль». Интервалы его следования составляют 45 минут, первый «Журавль» отправляется в 6:15, а весь маршрут занимает у него 255 минут. Временем остановок поездов можно пренебречь. На всём своём маршруте «Аисты» следуют с постоянной средней скоростью. Средняя скорость «Журавлей» также постоянна, но отличается от скорости «Аистов».

Между станциями C и D курсируют в обоих направлениях электрички «Беркут». От станции C в направлении D и от станции D в направлении C «Беркуты» отправляются одновременно с интервалами 30 минут, начиная с 6:00. Маршрут между C и D занимает у них 25 минут.

В приведённой ниже таблице указаны расстояния между станциями и стоимость проезда от одной до другой.

Участок	Длина, км	Стоимость, руб
AC	160	130
CB	260	220
AD	230	310
DB	180	130
CD	55	75

Турист прибыл на станцию A в 10:40, ему нужно добраться до станции B. Временем пересадок между поездами и электричками можно пренебречь.

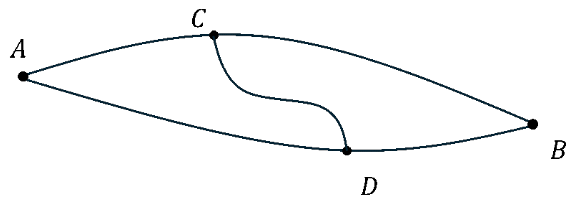
6. Найдите минимальную стоимость проезда от A до B. Ответ выразите в рублях, округлив до целого числа. (2 балла)

7. Найдите минимальное общее время пути по маршруту A $\to$ D $\to$ C $\to$ B (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (2 балла)

8. Найдите среднюю скорость по маршруту A $\to$ D $\to$ C $\to$ B, считая всё время с момента прибытия туриста на станцию A до прибытия в B (включая ожидания). Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (3 балла)

9. Найдите минимально возможное время пути из A в B для любых маршрутов (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (3 балла)

Задание 2. Оптимальный маршрут туриста (10 баллов)



Железнодорожные станции A, B, C и D связаны несколькими маршрутами. От станции A до станции B с промежуточной остановкой на станции C ходит поезд «Аист». Он отправляется от A с интервалами 1 ч 50 мин, начиная с 5:45, а весь маршрут занимает у «Аиста» 320 минут. Также из A в B, но с остановкой в D, ходит поезд «Журавль». Интервалы его следования составляют 55 минут, первый «Журавль» отправляется в 6:10, а весь маршрут занимает у него 280 минут. Временем остановок поездов можно пренебречь. На всём своём маршруте «Аисты» следуют с постоянной средней скоростью. Средняя скорость «Журавлей» также постоянна, но отличается от скорости «Аистов».

Между станциями C и D курсируют в обоих направлениях электрички «Беркут». От станции C в направления D и от станции D в направлении C «Беркуты» отправляются одновременно с интервалами 30 минут, начиная с 6:00. Маршрут между C и D занимает у них 15 минут.

В приведённой ниже таблице указаны расстояния между станциями и стоимость проезда от одной до другой.

Участок	Длина, км	Стоимость, руб
AC	170	150
CB	250	200
AD	240	330
DB	170	110
CD	65	85

Турист прибыл на станцию A в 9:15, ему нужно добраться до станции B. Временем пересадок между поездами и электричками можно пренебречь.

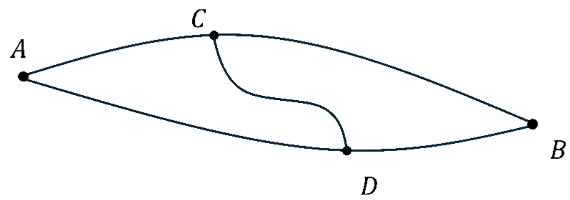
6. Найдите минимальную стоимость проезда от A до B. Ответ выразите в рублях, округлив до целого числа. (2 балла)

7. Найдите минимальное общее время пути по маршруту A $\to$ D $\to$ C $\to$ B (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (2 балла)

8. Найдите среднюю скорость по маршруту A $\to$ D $\to$ C $\to$ B, считая всё время с момента прибытия туриста на станцию A до прибытия в B (включая ожидания). Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (3 балла)

9. Найдите минимально возможное время пути из A в B для любых маршрутов (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (3 балла)

Задание 2. Оптимальный маршрут туриста (10 баллов)



Железнодорожные станции A, B, C и D связаны несколькими маршрутами. От станции A до станции B с промежуточной остановкой на станции C ходит поезд «Аист». Он отправляется от A с интервалами 2 ч 10 мин, начиная с 6:20, а весь маршрут занимает у «Аиста» 310 минут. Также из A в B, но с остановкой в D, ходит поезд «Журавль». Интервалы его следования составляют 40 минут, первый «Журавль» отправляется в 6:40, а весь маршрут занимает у него 330 минут. Временем остановок поездов можно пренебречь. На всём своём маршруте «Аисты» следуют с постоянной средней скоростью. Средняя скорость «Журавлей» также постоянна, но отличается от скорости «Аистов».

Между станциями C и D курсируют в обоих направлениях электрички «Беркут». От станции C в направлении D и от станции D в направлении C «Беркуты» отправляются одновременно с интервалами 30 минут, начиная с 6:00. Маршрут между C и D занимает у них 20 минут.

В приведённой ниже таблице указаны расстояния между станциями и стоимость проезда от одной до другой.

Участок	Длина, км	Стоимость, руб
AC	160	140
CB	240	190
AD	210	320
DB	160	120
CD	70	90

Турист прибыл на станцию A в 9:10, ему нужно добраться до станции B. Временем пересадок между поездами и электричками можно пренебречь.

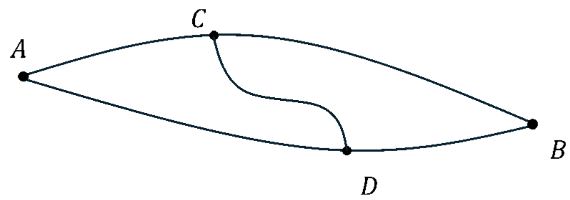
6. Найдите минимальную стоимость проезда от A до B. Ответ выразите в рублях, округлив до целого числа. (2 балла)

7. Найдите минимальное общее время пути по маршруту A → D → C → B (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (2 балла)

8. Найдите среднюю скорость по маршруту A → D → C → B, считая всё время с момента прибытия туриста на станцию A до прибытия в B (включая ожидания). Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (3 балла)

9. Найдите минимально возможное время пути из A в B для любых маршрутов (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (3 балла)

Задание 2. Оптимальный маршрут туриста (10 баллов)



Железнодорожные станции A, B, C и D связаны несколькими маршрутами. От станции A до станции B с промежуточной остановкой на станции C ходит поезд «Аист». Он отправляется от A с интервалами 1 ч 45 мин, начиная с 6:00, а весь маршрут занимает у «Аиста» 295 минут. Также из A в B, но с остановкой в D, ходит поезд «Журавль». Интервалы его следования составляют 35 минут, первый «Журавль» отправляется в 6:15, а весь маршрут занимает у него 265 минут. Временем остановок поездов можно пренебречь. На всём своём маршруте «Аисты» следуют с постоянной средней скоростью. Средняя скорость «Журавлей» также постоянна, но отличается от скорости «Аистов».

Между станциями C и D курсируют в обоих направлениях электрички «Беркут». От станции C в направлении D и от станции D в направлении C «Беркуты» отправляются одновременно с интервалами 30 минут, начиная с 6:00. Маршрут между C и D занимает у них 18 минут.

В приведённой ниже таблице указаны расстояния между станциями и стоимость проезда от одной до другой:

Участок	Длина, км	Стоимость, руб
AC	150	135
CB	230	195
AD	200	310
DB	150	115
CD	75	95

Турист прибыл на станцию A в 8:50, ему нужно добраться до станции B. Временем пересадок между поездами и электричками можно пренебречь.

6. Найдите минимальную стоимость проезда от A до B. Ответ выразите в рублях, округлив до целого числа. (2 балла)

7. Найдите минимальное общее время пути по маршруту A → D → C → B (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (2 балла)

8. Найдите среднюю скорость по маршруту A → D → C → B, считая всё время с момента прибытия туриста на станцию A до прибытия в B (включая ожидания). Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (3 балла)

9. Найдите минимально возможное время пути из A в B для любых маршрутов (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (3 балла)

Задание 3. Теплообмен со средой (10 баллов)

Теплоизолированный калориметр с теплоёмкостью $C = 30{,}0$ Дж/°С находится в тепловом равновесии с налитой в него водой массой $m_в = 300$ г при температуре $t_в = 45°С$. В калориметр помещают лёд массой $m_л = 200$ г с температурой $t_л = -10°С$. Удельная теплоёмкость воды составляет $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг $\cdot°$ С), удельная теплоёмкость льда — $c_л = 2{,}1$ кДж/(кг$\cdot$°С), удельная теплота плавления льда — $\lambda = 330$ кДж/кг.

10. Найдите массу растаявшего льда. Ответ выразите в граммах, округлив до целых. (3 балла)

11. С помощью встроенного нагревателя к содержимому калориметра подводят количество теплоты $Q = 35$ кДж. Определите температуру калориметра θ_1 после установления равновесия. Ответ выразите в °С, округлив до десятых долей. (3 балла)

12. Теплоизоляция калориметра с водой нарушается, так что мощность теплообмена P между калориметром и окружающей средой определяется по формуле $P = K \cdot |\theta_1 - t_{окр}|$, где $t_{окр} = 20°С$ — температура окружающей среды, $K = 85$ Дж/(мин $\cdot°$ С). Определите температуру калориметра θ_2 спустя время $\Delta\tau = 2$ мин после нарушения теплоизоляции. Ответ выразите в °С, округлив до десятых долей. (4 балла)

Задание 3. Теплообмен со средой (10 баллов)

Теплоизолированный калориметр с теплоёмкостью $C = 25{,}0$ Дж/°С находится в тепловом равновесии с налитой в него водой массой $m_в = 300$ г при температуре $t_в = 45$°С. В калориметр помещают лёд массой $m_л = 250$ г при температуре $t_л = 0$°С. Удельная теплоёмкость воды составляет $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда — $\lambda = 330$ кДж/кг.

10. Найдите массу растаявшего льда. Ответ выразите в граммах, округлив до целых. (3 балла)

11. С помощью встроенного нагревателя к содержимому калориметра подводят количество теплоты $Q = 26$ кДж. Определите температуру калориметра θ_1 после установления равновесия. Ответ выразите в °С, округлив до десятых долей. (3 балла)

12. Теплоизоляция калориметра с водой нарушается, так что мощность теплообмена P между калориметром и окружающей средой определяется по формуле $P = K \cdot |\theta_1 - t_{окр}|$, где $t_{окр} = 25$°С — температура окружающей среды, $K = 85$ Дж/(мин·°С). Определите температуру калориметра θ_2 спустя время $\Delta\tau = 2$ мин после нарушения теплоизоляции. Ответ выразите в °С, округлив до десятых долей. (4 балла)

Задание 3. Теплообмен со средой (10 баллов)

Теплоизолированный калориметр с теплоёмкостью $C = 25{,}0$ Дж/°C находится в тепловом равновесии с налитой в него водой массой $m_в = 300$ г при температуре $t_в = 60$°C. В калориметр помещают лёд массой $m_л = 150$ г при температуре $t_л = 0$°C. Удельная теплоёмкость воды составляет $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда — $\lambda = 330$ кДж/кг.

10. Найдите массу растаявшего льда. Ответ выразите в граммах, округлив до целых. (3 балла)

11. С помощью встроенного нагревателя к содержимому калориметра подводят количество теплоты $Q = 40$ кДж. Определите температуру калориметра θ_1 после установления равновесия. Ответ выразите в °C, округлив до десятых долей. (3 балла)

12. Теплоизоляция калориметра с водой нарушается, так что мощность теплообмена P между калориметром и окружающей средой определяется по формуле $P = K \cdot |\theta_1 - t_{окр}|$, где $t_{окр} = 20$°C — температура окружающей среды, $K = 85$ Дж/(мин·°C). Определите температуру калориметра θ_2 спустя время $\Delta\tau = 2$ мин после нарушения теплоизоляции. Ответ выразите в °C, округлив до десятых долей. (4 балла)

Задание 3. Теплообмен со средой (10 баллов)

Теплоизолированный калориметр с теплоёмкостью $C = 35{,}0$ Дж/°C находится в тепловом равновесии с налитой в него водой массой $m_{\text{в}} = 300$ г при температуре $t_{\text{в}} = 45°\text{C}$. В калориметр помещают лёд массой $m_{\text{л}} = 190$ г при температуре $t_{\text{л}} = -15°\text{C}$. Удельная теплоёмкость воды составляет $c_{\text{в}} = 4{,}2$ кДж/(кг $\cdot$° C), удельная теплоёмкость льда — $c_{\text{л}} = 2{,}1$ кДж/(кг$\cdot$°C), удельная теплота плавления льда — $\lambda = 330$ кДж/кг.

10. Найдите массу растаявшего льда. Ответ выразите в граммах, округлив до целых. (3 балла)

11. Какое количество теплоты Q нужно подвести к системе, чтобы в калориметре осталась только вода при 0°C? Если тепло отводится, укажите отрицательное значение. Ответ выразите в кДж, округлив до сотых долей. (3 балла)

12. После того, как к калориметру подвели теплоту Q из предыдущего вопроса, теплоизоляция нарушается. Мощность теплообмена P между калориметра и окружающей средой определяется по формуле $P = K \cdot |\theta_1 - t_{\text{окр}}|$, где $t_{\text{окр}} = 20°\text{C}$ — температура окружающей среды, $K = 85$ Дж/(мин$\cdot$°C). Определите температуру калориметра θ_2 спустя время $\Delta\tau = 2$ мин после нарушения теплоизоляции. Ответ выразите в °C, округлив до десятых долей. (4 балла)

Задание 3. Теплообмен со средой (10 баллов)

Теплоизолированный калориметр с теплоёмкостью $C = 35{,}0$ Дж/°С находится в тепловом равновесии с налитой в него водой массой $m_в = 300$ г при температуре $t_в = 50$°С. В калориметр помещают лёд массой $m_л = 100$ г при температуре $t_л = 0$°С. Удельная теплоёмкость воды составляет $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда — $\lambda = 330$ кДж/кг.

10. Найдите массу растаявшего льда. Ответ выразите в граммах, округлив до целых. (3 балла)

11. С помощью встроенного нагревателя к содержимому калориметра подводят количество теплоты $Q = 20$ кДж. Определите температуру калориметра θ_1 после установления равновесия. Ответ выразите в °С, округлив до десятых долей. (3 балла)

12. Теплоизоляция калориметра с водой нарушается, так что мощность теплообмена P между калориметром и окружающей средой определяется по формуле $P = K \cdot |\theta_1 - t_{окр}|$, где $t_{окр} = 0$°С — температура окружающей среды, $K = 85$ Дж/(мин $\cdot$° С). Определите температуру калориметра θ_2 спустя время $\Delta\tau = 2$ мин после нарушения теплоизоляции. Ответ выразите в °С, округлив до десятых долей. (4 балла)

Задание 4. Четыре резистора (10 баллов)

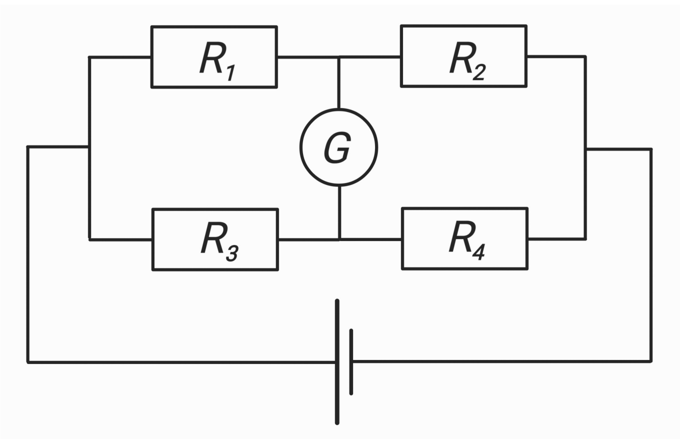
В изображённой на рисунке схеме известны сопротивления резисторов $R_1 = 120$ Ом, $R_2 = 180$ Ом, $R_3 = 75$ Ом и напряжение идеального источника $U = 12$ В. Гальванометр G показывает нуль (ток через него не течёт).

13. Найдите сопротивление R_4. Ответ выразите в омах, округлив до десятых. (2 балла)

14. Определите ток I через резистор R_3. Ответ выразите в мА, округлив до целого. (2 балла)

15. Рассчитайте полную мощность, выделяемую в цепи. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)

16. Рассчитайте мощности, выделяемые на каждом резисторе. В ответе укажите максимальную из вычисленных мощностей. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)



Задание 4. Четыре резистора (10 баллов)

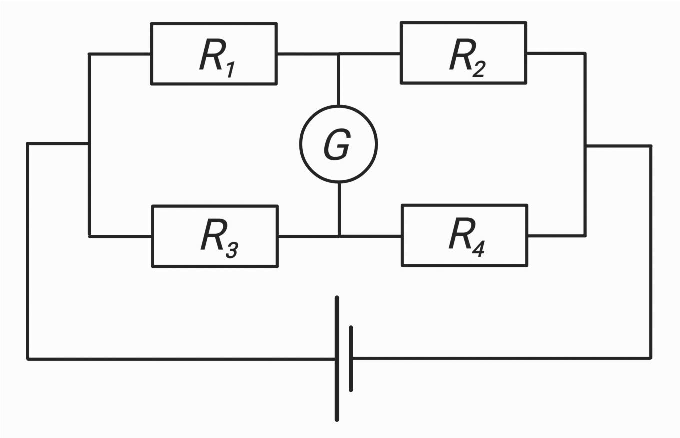
В изображённой на рисунке схеме известны сопротивления резисторов $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 250$ Ом, $R_4 = 200$ Ом и напряжение идеального источника $U = 18$ В. Гальванометр G показывает нуль (ток через него не течёт).

13. Найдите сопротивление R_3. Ответ выразите в омах, округлив до десятых. (2 балла)

14. Определите ток I через резистор R_3. Ответ выразите в мА, округлив до целого. (2 балла)

15. Рассчитайте полную мощность, выделяемую в цепи. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)

16. Рассчитайте мощности, выделяемые на каждом резисторе. В ответе укажите минимальную из вычисленных мощностей. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)



Задание 4. Четыре резистора (10 баллов)

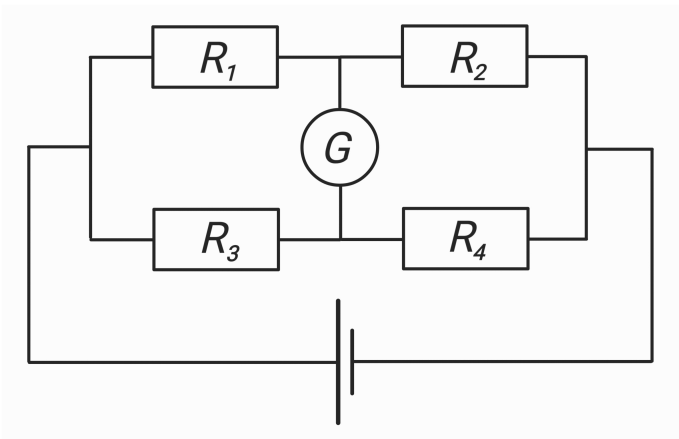
В изображённой на рисунке схеме известны сопротивления резисторов $R_1 = 150$ Ом, $R_3 = 82$ Ом, $R_4 = 120$ Ом и напряжение идеального источника $U = 24$ В. Гальванометр G показывает нуль (ток через него не течёт).

13. Найдите сопротивление R_2. Ответ выразите в омах, округлив до десятых. (2 балла)

14. Определите ток I через резистор R_1. Ответ выразите в мА, округлив до целого. (2 балла)

15. Рассчитайте полную мощность, выделяемую в цепи. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)

16. Рассчитайте мощности, выделяемые на каждом резисторе. В ответе укажите минимальную из вычисленных мощностей. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)



Задание 4. Четыре резистора (10 баллов)

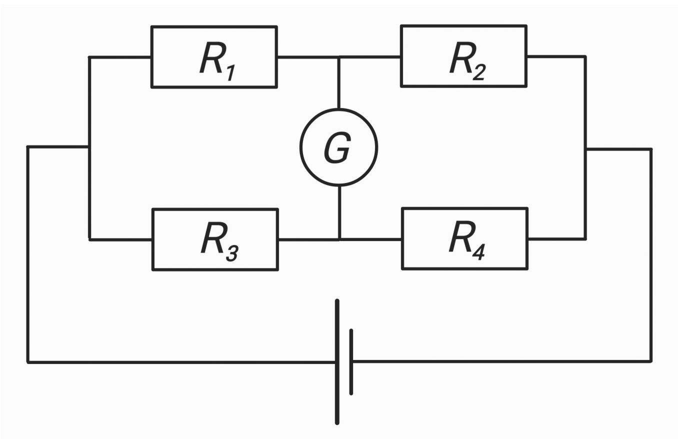
В изображённой на рисунке схеме известны сопротивления резисторов $R_2 = 220$ Ом, $R_3 = 68$ Ом, $R_4 = 150$ Ом и напряжение идеального источника $U = 15$ В. Гальванометр G показывает нуль (ток через него не течёт).

13. Найдите сопротивление R_1. Ответ выразите в омах, округлив до десятых. (2 балла)

14. Определите ток I через резистор R_4. Ответ выразите в мА, округлив до целого. (2 балла)

15. Рассчитайте полную мощность, выделяемую в цепи. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)

16. Рассчитайте мощности, выделяемые на каждом резисторе. В ответе укажите максимальную из вычисленных мощностей. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)



Задание 4. Четыре резистора (10 баллов)

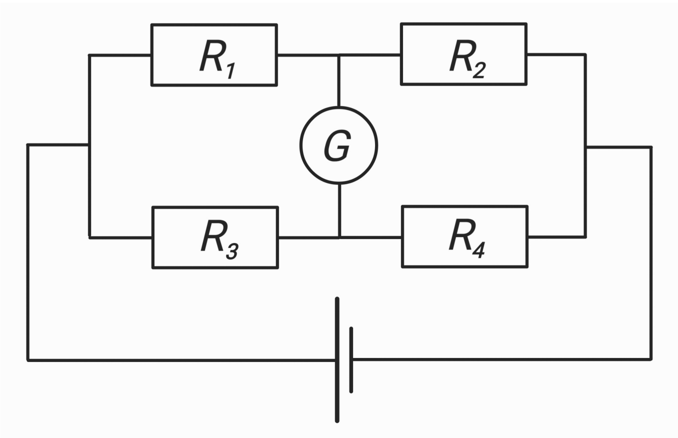
В изображённой на рисунке схеме известны сопротивления резисторов $R_1 = 200$ Ом, $R_2 = 300$ Ом, $R_4 = 150$ Ом. Ток через резистор R_1 равен 0,10 А. Напряжение источника идеальное. Гальванометр G показывает нуль (ток через него не течёт).

13. Найдите напряжение источника U. Ответ выразите в вольтах, округлив до десятых. (2 балла)

14. Найдите ток I через резистор R_4. Ответ выразите в мА, округлив до целого. (2 балла)

15. Рассчитайте полную мощность, выделяемую в цепи. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)

16. Рассчитайте мощности, выделяемые на каждом резисторе. В ответе укажите максимальную из вычисленных мощностей. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)



Задание 5. Катер и плот (10 баллов)

Между пунктами A и B, находящимися на одной реке на расстоянии $S = 18$ км, курсирует катер, мгновенно разворачиваясь без остановок в пунктах. В тот момент, когда катер выходит из пункта A, вместе с ним также отправляется плот в направлении пункта B. Скорость катера относительно воды равна $V_к = 21$ км/ч, скорость течения реки равна $V_т = 3$ км/ч.

17. На каком расстоянии d_1 от A произойдёт первая встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)

18. На каком расстоянии d_2 от A произойдёт вторая встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)

19. Сколько раз встретятся катер и плот, не считая встречу в начальный момент времени? (3 балла)

20. Каково максимальное расстояние $L_{\max}$ между катером и плотом до прибытия плота в пункт B? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (3 балла)

Задание 5. Катер и плот (10 баллов)

Между пунктами A и B на одной реке, удалёнными друг от друга на $S = 24\,\text{км}$, непрерывно курсирует катер, мгновенно разворачиваясь без остановок в пунктах. В момент выхода катера из A одновременно отправляется плот в сторону B. Скорость катера относительно воды составляет $V_\text{к} = 18\,\text{км/ч}$, скорость течения реки — $V_\text{т} = 3\,\text{км/ч}$.

17. Через какое время от начала движения произойдёт первая встреча? Ответ выразите в часах, округлив до десятых долей. (2 балла)

18. Через какое время от начала движения произойдёт вторая встреча? Ответ выразите в часах, округлив до десятых долей. (2 балла)

19. Сколько раз встретятся катер и плот, не считая встречу в начальный момент времени? (3 балла)

20. Каково максимальное расстояние L_max между катером и плотом до прибытия плота в пункт B? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (3 балла)

Задание 5. Катер и плот (10 баллов)

Между пунктами A и B, находящимися на одной реке на расстоянии $S = 30$ км, непрерывно курсирует катер, мгновенно разворачиваясь без остановок в пунктах. В момент выхода катера из A одновременно с ним отправляется по течению плот в направлении B. Скорость катера относительно воды составляет $V_к = 21$ км/ч, скорость течения реки — $V_т = 3$ км/ч.

17. На каком расстоянии от B произойдёт первая встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)

18. На каком расстоянии от B произойдёт третья встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)

19. Сколько раз встретятся катер и плот, не считая встречу в начальный момент времени? (3 балла)

20. Каково максимальное расстояние $L_{\max}$ между катером и плотом до прибытия плота в пункт B? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (3 балла)

Задание 5. Катер и плот (10 баллов)

Между пунктами A и B находящимися на одной реке на расстоянии $S = 36$ км, непрерывно курсирует катер, мгновенно разворачиваясь без остановок в пунктах. В момент выхода катера из A вместе с ним отправляется по течению плот к пункту B. Скорость течения реки составляет $V_\text{т} = 4$ км/ч. Известно, что первая встреча катера с плотом произошла на расстоянии $d_1 = 9$ км от пункта A.

17. Определите скорость катера $V_\text{к}$ относительно воды. Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (2 балла)

18. На каком расстоянии от пункта A произошла вторая встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)

19. Сколько раз встретятся катер и плот, не считая встречу в начальный момент времени? (3 балла)

20. Каково максимальное расстояние $L_{\max}$ между катером и плотом до прибытия плота в пункт B? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (3 балла)

Задание 5. Катер и плот (10 баллов)

Между пунктами A и B, находящимися на одной реке на расстоянии $S = 20\,\text{км}$, непрерывно курсирует катер, мгновенно разворачиваясь без остановок в пунктах. В момент выхода катера из A одновременно с ним отправляется плот по течению к B. Скорость катера относительно воды составляет $V_\text{к} = 28\,\text{км/ч}$, скорость течения реки — $V_\text{т} = 4\,\text{км/ч}$.

17. На каком расстоянии от A произойдёт третья встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)

18. Через какое время от начала движения произойдёт четвёртая встреча? Ответ выразите в часах, округлив до десятых долей. (2 балла)

19. Сколько раз встретятся катер и плот, не считая встречу в начальный момент времени? (3 балла)

20. Каково максимальное расстояние $L_{\max}$ между катером и плотом до прибытия плота в пункт B? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (3 балла)

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ФИЗИКА. 2025–2026 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 9 КЛАСС

КРИТЕРИИ И РЕШЕНИЯ

Груз над водой, груз в воде (10 баллов)

Однородная доска длиной $L = 1{,}20\,\text{м}$ с прямоугольным сечением площадью $S = 24\,\text{см}^2$ уравновешена горизонтально на единственной опоре. Точка опоры находится на расстоянии $0{,}4L$ от левого конца доски. К доске на расстоянии $0{,}2L$ от того же конца подвешен алюминиевый груз. Плотности древесины и алюминия равны соответственно $\rho_\text{д} = 750\,\text{кг/м}^3$ и $\rho_\text{ал} = 2700\,\text{кг/м}^3$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10\,\text{м/с}^2$.

1. Найдите массу доски M. Ответ выразите в кг, округлив до сотых долей. (2 балла)

2. Определите массу груза m, при которой система находится в равновесии. Ответ выразите в кг, округлив до сотых долей. (2 балла)

3. Найдите силу реакции опоры N_0 в этом положении. Ответ выразите в Н, округлив до десятых долей. (2 балла)

4. Груз полностью погружают в воду плотностью $\rho_\text{в} = 1000\,\text{кг/м}^3$, при этом точку его подвеса смещают на расстояние Δx, чтобы доска осталась в горизонтальном положении равновесия. Точка опоры не меняется. Определите расстояние Δx. Ответ выразите в м, округлив до сотых долей. (2 балла)

5. Найдите отношение силы реакции опоры N_1 в новом состоянии равновесия к её значению N_0 в первоначальном состоянии, $\dfrac{N_1}{N_0}$. Ответ округлите до тысячных долей. (2 балла)

Ответы: 1) $M = 2{,}16$ кг; 2) $m = 1{,}08$ кг; 3) $N_0 = 32{,}4$ Н; 4) 0,14 м;
5) $\dfrac{N_1}{N_0} = 0{,}877$.

Груз над водой, груз в воде (10 баллов)

Однородная доска длиной $L = 1{,}30\,\text{м}$ с прямоугольным сечением площадью $S = 20\,\text{см}^2$ уравновешена горизонтально на единственной опоре. Точка опоры находится на расстоянии $0{,}75L$ от левого конца доски. К доске на расстоянии $0{,}9L$ от того же конца подвешен алюминиевый груз. Плотности древесины и алюминия равны соответственно $\rho_\text{д} = 680\,\text{кг/м}^3$ и $\rho_\text{ал} = 2700\,\text{кг/м}^3$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10\,\text{м/с}^2$.

1. Найдите массу доски M. Ответ выразите в кг, округлив до сотых долей. (2 балла)

2. Определите силу реакции опоры N_0. Ответ выразите в Н, округлив до десятых долей. (2 балла)

3. Груз полностью погружают в масло плотностью $\rho_\text{м} = 820\,\text{кг/м}^3$. На какое расстояние Δx нужно перенести точку подвеса груза, чтобы восстановить равновесие? Точка опоры не меняется. Ответ выразите в м, округлив до тысячных долей. (2 балла)

4. Найдите силу натяжения нити T, удерживающей груз, после полного погружения и смещения точки подвеса. Ответ выразите в Н, округлив до сотых долей. (2 балла)

5. Найдите отношение силы реакции опоры N_1 после погружения и смещения к её значению N_0 в первоначальном состоянии, $\dfrac{N_1}{N_0}$. Ответ округлите до тысячных долей. (2 балла)

Ответы: 1) $M = 1{,}77$ кг; 2) $N_0 = 47{,}1$ Н; 3) $\Delta x = 0{,}085$ м ; 4) $T = 20{,}52$ Н; 5) $\dfrac{N_1}{N_0} = 0{,}810$.

Груз над водой, груз в воде (10 баллов)

Однородная доска длиной $L = 1{,}10\,\text{м}$ с прямоугольным сечением площадью $S = 18\,\text{см}^2$ уравновешена горизонтально на единственной опоре. К доске на расстоянии $0{,}25L$ от левого конца подвешен алюминиевый груз массой $m = 0{,}65\,\text{кг}$. Плотности древесины и алюминия равны соответственно $\rho_\text{д} = 700\,\text{кг/м}^3$ и $\rho_\text{ал} = 2700\,\text{кг/м}^3$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10\,\text{м/с}^2$. Затем груз полностью погружают в воду плотностью $\rho_\text{в} = 1000\,\text{кг/м}^3$, после чего для восстановления равновесия опору перемещают в новое положение.

1. Найдите массу доски M. Ответ выразите в кг, округлив до сотых долей. (2 балла)

2. На каком расстоянии $x_\text{оп}$ от левого конца доски находится опора в первоначальном состоянии? Ответ выразите в м, округлив до тысячных долей. (2 балла)

3. Найдите силу реакции опоры N_0 в первоначальном состоянии. Ответ выразите в Н, округлив до десятых долей. (2 балла)

4. На каком расстоянии $x'_\text{оп}$ от левого конца доски будет находиться опора в новом положении? Ответ выразите в м, округлив до тысячных долей. (2 балла)

5. Найдите отношение силы реакции опоры N_1 в новом состоянии к её значению N_0 в первоначальном состоянии, $\dfrac{N_1}{N_0}$. Ответ округлите до тысячных долей. (2 балла)

Ответы: 1) $M = 1{,}39$ кг; 2) $x_\text{оп} = 0{,}462$ м; 3) $N_0 = 20{,}4$ Н; 4) $x'_\text{оп} = 0{,}487$ м; 5) $\dfrac{N'}{N_0} = 0{,}882$.

Груз над водой, груз в воде (10 баллов)

Однородная доска массой $M = 1{,}80$ кг и длиной $L = 1{,}20$ м уравновешена горизонтально на единственной опоре. Точка опоры находится на расстоянии $0{,}4L$ от левого конца доски. К доске на расстоянии $0{,}2L$ от того же конца подвешен алюминиевый груз. Плотности древесины и алюминия равны соответственно $\rho_{\text{д}} = 720$ кг/м^3 и $\rho_{\text{ал}} = 2700$ кг/м^3. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Затем груз полностью погружают в жидкость неизвестной плотности $\rho_{\text{ж}}$ и смещают точку подвеса груза на $\Delta x = 0{,}12$ м влево вдоль доски, так что равновесие системы восстанавливается.

1. Найдите площадь поперечного сечения доски S. Ответ выразите в см^2, округлив до целого числа.
   (2 балла)

2. Определите массу груза m. Ответ выразите в кг, округлив до сотых долей.
   (2 балла)

3. Найдите плотность жидкости $\rho_{\text{ж}}$. Ответ выразите в кг/м^3, округлив до целого числа. (2 балла)

4. Найдите силу реакции опоры N_1 после погружения и смещения груза. Ответ выразите в Н, округлив до сотых долей. (2 балла)

5. Найдите отношение сил реакции опоры $\dfrac{N_1}{N_0}$, где N_0 — реакция до погружения. Ответ округлите до тысячных долей. (2 балла)

Ответы: 1) $S = 21$ см^2; 2) $m = 0{,}90$ кг; 3) $\rho_{\text{ж}} = 900$ кг/м^3; 4) $N_1 = 24{,}00$ Н; 5) $\dfrac{N_1}{N_0} = 0{,}889$.

Груз над водой, груз в воде (10 баллов)

Однородная доска длиной L и массой $M = 2{,}16\,\text{кг}$ с прямоугольным сечением площадью $S = 24\,\text{см}^2$ уравновешена горизонтально на единственной опоре. К доске на расстоянии $0{,}25L$ от левого конца подвешен алюминиевый груз массой $m = 1{,}05\,\text{кг}$. Плотности древесины и алюминия равны соответственно $\rho_\text{д} = 750\,\text{кг/м}^3$ и $\rho_\text{ал} = 2700\,\text{кг/м}^3$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10\,\text{м/с}^2$. После полного погружения груза в воду плотностью $\rho_\text{в} = 1000\,\text{кг/м}^3$ точку опоры переносят вдоль доски так, чтобы система вновь пришла в равновесие.

1. Найдите длину доски L. Ответ выразите в м, округлив до десятых долей. (2 балла)

2. На каком расстоянии $x_\text{оп}$ от левого конца доски находится опора в первоначальном состоянии? Ответ выразите в м, округлив до тысячных долей. (2 балла)

3. Определите силу Архимеда F_A, действующую на груз в воде. Ответ выразите в Н, округлив до сотых долей. (2 балла)

4. На каком расстоянии $x'_\text{оп}$ от левого конца доски будет находиться опора в новом положении? Ответ выразите в м, округлив до тысячных долей. (2 балла)

5. Найдите отношение силы реакции опоры N_1 после погружения к её значению N_0 в первоначальном состоянии, $\dfrac{N_1}{N_0}$. Ответ округлите до сотых долей. (2 балла)

Ответы: 1) $L = 1{,}2$ м; 2) $x_\text{оп} = 0{,}502$ м; 3) $F_A = 3{,}89$ Н; 4) $x'_\text{оп} = 0{,}530$ м; 5) $\dfrac{N_1}{N_0} = 0{,}88$.

Типовое решение для сюжета «Груз над водой, груз в воде»

Уникальные вопросы, встречающиеся в данных задачах

1. Нахождение параметров доски M, S или L при известной $\rho_д$ и одном из S, L, M.
2. Нахождение подвешенного груза m, обеспечивающей равновесие при заданных положениях опоры и точки подвеса (в воздухе).
3. Нахождение положения опоры $x_{оп}$ в воздухе при заданном m и координате точки подвеса $x_г$.
4. Нахождение силы реакции опоры N_0 в воздухе.
5. После полного погружения груза в жидкость плотности $\rho_ж$:
   (a) нахождение Архимеда F_A и натяжение нити T;
   (b) нахождение смещения точки подвеса Δx при фиксированной опоре для восстановления равновесия;
   (c) нахождение смещения опоры (или её новое положение) при фиксированной точке подвеса;
   (d) нахождение отношения реакций $\dfrac{N_1}{N_0}$.
6. Обратные постановки: по известному Δx ; по N_1/N_0 и т. п.

Модель, обозначения и базовые равенства

Прямая тонкая однородная доска длиной L (сечением S, плотностью $\rho_д$), центр масс доски находится в точке $x_{цм} = \frac{L}{2}$. Опора находится в точке $x_{оп}$. Точка подвеса груза — $x_г$ (после смещения — $x'_г$). Ускорение свободного падения равно g. Груз — сплошной алюминиевый ($\rho_{ал}$), массой m, объём равен $V_г = \dfrac{m}{\rho_{ал}}$ (при полном погружении).

Статика: для равновесия необходимо выполнение правила моментов. При этом удобно работать с плечами сил относительно точки опоры:

$$d_р = \left|x_{цм} - x_{оп}\right|, \qquad d_г = \left|x_{оп} - x_г\right|, \qquad d'_г = \left|x_{оп} - x'_г\right|.$$

Система в воздухе до погружения груза в жидкость

1. Связи между M, S, L:

$$M = \rho_д S L, \qquad S = \frac{M}{\rho_д L}, \qquad L = \frac{M}{\rho_д S}$$

2. Неизвестная масса груза для равновесия (опора и точка подвеса заданы):

$$m = M\,\frac{d_\text{р}}{d_\text{г}} \;=\; M\,\frac{|x_\text{цм} - x_\text{оп}|}{|x_\text{оп} - x_\text{г}|}$$

3. Положение опоры при заданных $M, m, x_\text{г}$:

$$x_\text{оп} = \frac{M\,x_\text{цм} + m\,x_\text{г}}{M + m}$$

4. Реакция опоры:

$$N_0 = (M + m)g$$

Полное погружение груза в жидкость ($\rho_\text{ж}$), восстановление равновесия

1. Сила Архимеда и натяжение нити:

$$F_A = \rho_\text{ж}\,g\,V_\text{г} = \rho_\text{ж}\,g\,\frac{m}{\rho_\text{ал}}$$

   На груз, погружённый в жидкость, действуют сила тяжести mg и сила Архимеда F_A, направленная противоположно. Со стороны нити на груз действует сила натяжения T. Условие равновесия груза:

$$T + F_A = mg \quad \Rightarrow \quad T = mg - F_A.$$

   Эта сила T и приложена к доске в точке подвеса.

2. Реакция опоры после погружения. На доску действуют сила тяжести Mg, сила натяжения нити T (приложенная в точке подвеса и направленная вниз) и сила реакции опоры N_1. Условие вертикального равновесия доски:

$$N_1 = Mg + T = Mg + (mg - F_A) = (M + m)g - F_A.$$

   Отношение реакций:

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{(M + m)g - F_A}{(M + m)g} = 1 - \frac{F_A}{(M + m)g}.$$

3. Смещение точки подвеса при фиксированной опоре ($x_\text{оп} = \text{const}$). Условие равенства моментов сил, действующих на доску, относительно точки опоры после погружения груза:

$$Mg \cdot d_\text{р} = T \cdot d'_\text{г},$$

   где $d_\text{р} = |x_\text{цм} - x_\text{оп}|$, $d'_\text{г} = |x_\text{оп} - x'_\text{г}|$, а $T = mg - F_A$. Подставляя выражение для T, получаем

$$Mg \cdot d_\text{р} = (mg - F_A) \cdot d'_\text{г}.$$

Отсюда находим новое плечо силы натяжения:

$$d'_г = \frac{Mg \cdot d_р}{mg - F_A} = \frac{M \cdot d_р}{m - \frac{F_A}{g}}.$$

Рассмотрим два случая.

Случай A. Груз и центр масс доски находятся по одну сторону от опоры (например, слева: $x_г < x_{оп}$, $x_{цм} < x_{оп}$):

$$x'_г = x_{оп} - d'_г = x_{оп} - \frac{M \cdot |x_{цм} - x_{оп}|}{m - \frac{F_A}{g}},$$

$$\Delta x = x'_г - x_г = \left(x_{оп} - \frac{M \cdot |x_{цм} - x_{оп}|}{m - \frac{F_A}{g}} \right) - x_г.$$

Случай B. Груз и центр масс доски находятся по разные стороны от опоры (например, $x_г < x_{оп}$, $x_{цм} > x_{оп}$). Моменты сил направлены в разные стороны. Условие моментов (с учётом знаков) приведёт к тому, что новое плечо $d'_г$ может как увеличиваться, так и уменьшаться в зависимости от соотношения сил.

4. Смещение/новое положение опоры при фиксированной точке подвеса ($x_г = \text{const}$). Обозначим новое положение опоры $x'_{оп}$. Условие равенства моментов сил, действующих на доску, относительно новой точки опоры:

$$Mg \cdot (x_{цм} - x'_{оп}) = T \cdot (x'_{оп} - x_г),$$

где $T = mg - F_A$. (Предполагается, что все точки лежат на одной прямой и $x_{цм} < x'_{оп} < x_г$ или наоборот.) Решаем уравнение относительно $x'_{оп}$:

$$Mg \cdot x_{цм} - Mg \cdot x'_{оп} = T \cdot x'_{оп} - T \cdot x_г,$$

$$Mg \cdot x_{цм} + T \cdot x_г = (Mg + T) \cdot x'_{оп},$$

$$x'_{оп} = \frac{Mg \cdot x_{цм} + T \cdot x_г}{Mg + T} = \frac{Mg \cdot x_{цм} + (mg - F_A) \cdot x_г}{Mg + (mg - F_A)}.$$

Обратные задачи

1. По известному смещению точки подвеса Δx (при фиксированной опоре) найти $\rho_ж$. Пусть $d'_г = |x_{оп} - x'_г|$, где $x'_г = x_г + \Delta x$. Из правила моментов:

$$Mg \cdot d_р = T \cdot d'_г = (mg - F_A) \cdot d'_г.$$

Выражаем F_A:

$$mg - F_A = \frac{Mg \cdot d_р}{d'_г} \quad \Rightarrow \quad F_A = mg - \frac{Mg \cdot d_р}{d'_г}.$$

С другой стороны, $F_A = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{г}} = \rho_{\text{ж}} g \frac{m}{\rho_{\text{ал}}}$. Приравниваем эти выражения

$$\rho_{\text{ж}} g \frac{m}{\rho_{\text{ал}}} = mg - \frac{Mg \cdot d_{\text{р}}}{d'_{\text{г}}}.$$

Сокращаем g и выражаем $\rho_{\text{ж}}$:

$$\rho_{\text{ж}} = \rho_{\text{ал}} \left(1 - \frac{M \cdot d_{\text{р}}}{m \cdot d'_{\text{г}}}\right) = \rho_{\text{ал}} \left(1 - \frac{M \cdot |x_{\text{цм}} - x_{\text{оп}}|}{m \cdot |x_{\text{оп}} - (x_{\text{г}} + \Delta x)|}\right).$$

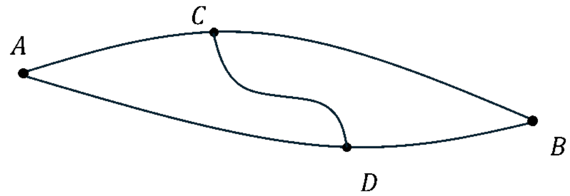
2. По известному отношению реакций $\dfrac{N_1}{N_0}$ восстановить F_A и $\rho_{\text{ж}}$. Из формулы для отношения реакций получаем

$$\frac{N_1}{N_0} = 1 - \frac{F_A}{(M+m)g} \quad \Rightarrow \quad F_A = \left(1 - \frac{N_1}{N_0}\right)(M+m)g.$$

Зная $F_A = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{г}} = \rho_{\text{ж}} g \frac{m}{\rho_{\text{ал}}}$, находим

$$\rho_{\text{ж}} = \frac{F_A}{g} \cdot \frac{\rho_{\text{ал}}}{m} = \left(1 - \frac{N_1}{N_0}\right)(M+m) \cdot \frac{\rho_{\text{ал}}}{m}.$$

Оптимальный маршрут туриста (10 баллов)



Железнодорожные станции A, B, C и D связаны несколькими маршрутами. От станции A до станции B с промежуточной остановкой на станции C ходит поезд «Аист». Он отправляется от A с интервалами 2 ч, начиная с 5:30, а весь маршрут занимает у «Аиста» 280 минут. Также из A в B, но с остановкой в D, ходит поезд «Журавль». Интервалы его следования составляют 50 минут, первый «Журавль» отправляется в 5:50, а весь маршрут занимает у него 240 минут. Временем остановок поездов можно пренебречь. На всём своём маршруте «Аисты» следуют с постоянной средней скоростью. Средняя скорость «Журавлей» также постоянна, но отличается от скорости «Аистов».

Между станциями C и D курсируют в обоих направлениях электрички «Беркут». От станции C в направлении D и от станции D в направлении C «Беркуты» отправляются одновременно с интервалами 30 минут, начиная с 6:00. Маршрут между C и D занимает у них 20 минут.

В приведённой ниже таблицы указаны расстояния между станциями и стоимость проезда от одной до другой.

Участок	Длина, км	Стоимость, руб
AC	180	140
CB	270	210
AD	220	320
DB	190	120
CD	60	80

Турист прибыл на станцию A в 9:20, ему нужно добраться до станции B. Временем пересадок между поездами и электричками можно пренебречь.

6. Найдите минимальную стоимость проезда от A до B. Ответ выразите в рублях, округлив до целого числа. (2 балла)

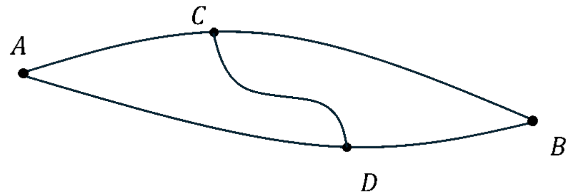
7. Найдите минимальное общее время пути по маршруту A → D → C → B (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (2 балла)

8. Найдите среднюю скорость по маршруту A → D → C → B, считая всё время с момента прибытия туриста на станцию A до прибытия в B (включая ожидания). Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (3 балла)

9. Найдите минимально возможное время пути из A в B для любых маршрутов (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (3 балла)

Ответы: 6) 340 руб; 7) 410 мин; 8) 80,5 км/ч; 9) 280 мин.

Оптимальный маршрут туриста (10 баллов)



Железнодорожные станции A, B, C и D связаны несколькими маршрутами. От станции A до станции B с промежуточной остановкой на станции C ходит поезд «Аист». Он отправляется от A с интервалами 2 ч 20 мин, начиная с 6:00, а весь маршрут занимает у «Аиста» 300 минут. Также из A в B, но с остановкой в D, ходит поезд «Журавль». Интервалы его следования составляют 45 минут, первый «Журавль» отправляется в 6:15, а весь маршрут занимает у него 255 минут. Временем остановок поездов можно пренебречь. На всём своём маршруте «Аисты» следуют с постоянной средней скоростью. Средняя скорость «Журавлей» также постоянна, но отличается от скорости «Аистов».

Между станциями C и D курсируют в обоих направлениях электрички «Беркут». От станции C в направлении D и от станции D в направлении C «Беркуты» отправляются одновременно с интервалами 30 минут, начиная с 6:00. Маршрут между C и D занимает у них 25 минут.

В приведённой ниже таблице указаны расстояния между станциями и стоимость проезда от одной до другой.

Участок	Длина, км	Стоимость, руб
AC	160	130
CB	260	220
AD	230	310
DB	180	130
CD	55	75

Турист прибыл на станцию A в 10:40, ему нужно добраться до станции B. Временем пересадок между поездами и электричками можно пренебречь.

6. Найдите минимальную стоимость проезда от A до B. Ответ выразите в рублях, округлив до целого числа. (2 балла)

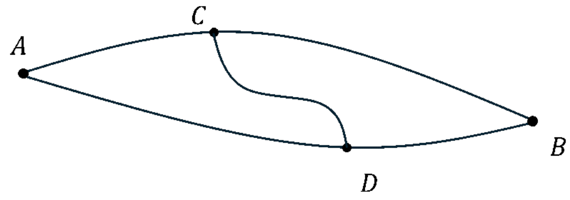
7. Найдите минимальное общее время пути по маршруту A $\to$ D $\to$ C $\to$ B (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (2 балла)

8. Найдите среднюю скорость по маршруту A $\to$ D $\to$ C $\to$ B, считая всё время с момента прибытия туриста на станцию A до прибытия в B (включая ожидания). Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (3 балла)

9. Найдите минимально возможное время пути из A в B для любых маршрутов (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (3 балла)

Ответы: 6) 335 руб; 7) 440 мин; 8) 74,3 км/ч; 9) 260 мин.

Оптимальный маршрут туриста (10 баллов)



Железнодорожные станции A, B, C и D связаны несколькими маршрутами. От станции A до станции B с промежуточной остановкой на станции C ходит поезд «Аист». Он отправляется от A с интервалами 1 ч 50 мин, начиная с 5:45, а весь маршрут занимает у «Аиста» 320 минут. Также из A в B, но с остановкой в D, ходит поезд «Журавль». Интервалы его следования составляют 55 минут, первый «Журавль» отправляется в 6:10, а весь маршрут занимает у него 280 минут. Временем остановок поездов можно пренебречь. На всём своём маршруте «Аисты» следуют с постоянной средней скоростью. Средняя скорость «Журавлей» также постоянна, но отличается от скорости «Аистов».

Между станциями C и D курсируют в обоих направлениях электрички «Беркут». От станции C в направления D и от станции D в направлении C «Беркуты» отправляются одновременно с интервалами 30 минут, начиная с 6:00. Маршрут между C и D занимает у них 15 минут.

В приведённой ниже таблице указаны расстояния между станциями и стоимость проезда от одной до другой.

Участок	Длина, км	Стоимость, руб
AC	170	150
CB	250	200
AD	240	330
DB	170	110
CD	65	85

Турист прибыл на станцию A в 9:15, ему нужно добраться до станции B. Временем пересадок между поездами и электричками можно пренебречь.

6. Найдите минимальную стоимость проезда от A до B. Ответ выразите в рублях, округлив до целого числа. (2 балла)

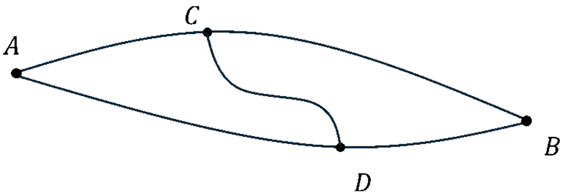
7. Найдите минимальное общее время пути по маршруту A $\to$ D $\to$ C $\to$ B (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (2 балла)

8. Найдите среднюю скорость по маршруту A $\to$ D $\to$ C $\to$ B, считая всё время с момента прибытия туриста на станцию A до прибытия в B (включая ожидания). Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (3 балла)

9. Найдите минимально возможное время пути из A в B для любых маршрутов (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (3 балла)

Ответы: 6) 345 руб; 7) 440 мин; 8) 75,7 км/ч; 9) 315 мин.

Оптимальный маршрут туриста (10 баллов)



Железнодорожные станции A, B, C и D связаны несколькими маршрутами. От станции A до станции B с промежуточной остановкой на станции C ходит поезд «Аист». Он отправляется от A с интервалами 2 ч 10 мин, начиная с 6:20, а весь маршрут занимает у «Аиста» 310 минут. Также из A в B, но с остановкой в D, ходит поезд «Журавль». Интервалы его следования составляют 40 минут, первый «Журавль» отправляется в 6:40, а весь маршрут занимает у него 330 минут. Временем остановок поездов можно пренебречь. На всём своём маршруте «Аисты» следуют с постоянной средней скоростью. Средняя скорость «Журавлей» также постоянна, но отличается от скорости «Аистов».

Между станциями C и D курсируют в обоих направлениях электрички «Беркут». От станции C в направлении D и от станции D в направлении C «Беркуты» отправляются одновременно с интервалами 30 минут, начиная с 6:00. Маршрут между C и D занимает у них 20 минут.

В приведённой ниже таблице указаны расстояния между станциями и стоимость проезда от одной до другой.

Участок	Длина, км	Стоимость, руб
AC	160	140
CB	240	190
AD	210	320
DB	160	120
CD	70	90

Турист прибыл на станцию A в 9:10, ему нужно добраться до станции B. Временем пересадок между поездами и электричками можно пренебречь.

6. Найдите минимальную стоимость проезда от A до B. Ответ выразите в рублях, округлив до целого числа. (2 балла)

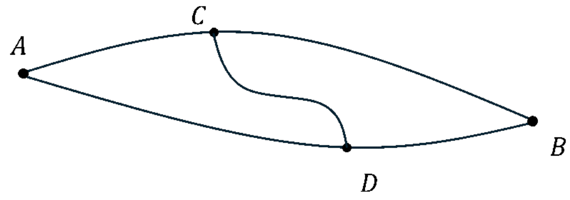
7. Найдите минимальное общее время пути по маршруту A $\to$ D $\to$ C $\to$ B (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (2 балла)

8. Найдите среднюю скорость по маршруту A $\to$ D $\to$ C $\to$ B, считая всё время с момента прибытия туриста на станцию A до прибытия в B (включая ожидания). Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (3 балла)

9. Найдите минимально возможное время пути из A в B для любых маршрутов (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (3 балла)

Ответы: 6) 330 руб; 7) 530 мин; 8) 58,9 км/ч; 9) 340 мин.

Оптимальный маршрут туриста (10 баллов)



Железнодорожные станции A, B, C и D связаны несколькими маршрутами. От станции A до станции B с промежуточной остановкой на станции C ходит поезд «Аист». Он отправляется от A с интервалами 1 ч 45 мин, начиная с 6:00, а весь маршрут занимает у «Аиста» 295 минут. Также из A в B, но с остановкой в D, ходит поезд «Журавль». Интервалы его следования составляют 35 минут, первый «Журавль» отправляется в 6:15, а весь маршрут занимает у него 265 минут. Временем остановок поездов можно пренебречь. На всём своём маршруте «Аисты» следуют с постоянной средней скоростью. Средняя скорость «Журавлей» также постоянна, но отличается от скорости «Аистов».

Между станциями C и D курсируют в обоих направлениях электрички «Беркут». От станции C в направлении D и от станции D в направлении C «Беркуты» отправляются одновременно с интервалами 30 минут, начиная с 6:00. Маршрут между C и D занимает у них 18 минут.

В приведённой ниже таблице указаны расстояния между станциями и стоимость проезда от одной до другой:

Участок	Длина, км	Стоимость, руб
AC	150	135
CB	230	195
AD	200	310
DB	150	115
CD	75	95

Турист прибыл на станцию A в 8:50, ему нужно добраться до станции B. Временем пересадок между поездами и электричками можно пренебречь.

6. Найдите минимальную стоимость проезда от A до B. Ответ выразите в рублях, округлив до целого числа. (2 балла)

7. Найдите минимальное общее время пути по маршруту A $\to$ D $\to$ C $\to$ B (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (2 балла)

8. Найдите среднюю скорость по маршруту A $\to$ D $\to$ C $\to$ B, считая всё время с момента прибытия туриста на станцию A до прибытия в B (включая ожидания). Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (3 балла)

9. Найдите минимально возможное время пути из A в B для любых маршрутов (включая время ожидания на станциях). Ответ выразите в минутах, округлив до целого числа. (3 балла)

Ответы: 6) 330 руб; 7) 440 мин; 8) 68,9 км/ч; 9) 285 мин.

«Оптимальный маршрут туриста» (типовое решение данной группы задач)

Есть четыре станции A, B, C, D. Поезд «Аист» ходит по ветке $A \to C \to B$ с периодом P_A (интервал между отправлениями из A) и полным временем в пути T_{ACB}. Поезд «Журавль» ходит по ветке $A \to D \to B$ с периодом P_J и полным временем T_{ADB}. Электричка «Беркут» ходит между C и D в обе стороны каждые 30 мин, время в пути T_{CD}. Даны длины участков и цены на каждый участок. Турист приходит на станцию A в момент T_0. Временем пересадок пренебрегаем.

Уникальные вопросы, встречающиеся в данных задачах

6. Минимальная стоимость поездки из A в B.
7. Минимальное общее время пути по маршруту $A \to D \to C \to B$ (включая время ожидания).
8. Средняя скорость на маршруте $A \to D \to C \to B$, считая всё время с момента прихода туриста на A.
9. Минимально возможное время пути из A в B среди всех маршрутов (с ожиданиями).

Решение

1. **Стоимость**
   Складываем цены по четырём маршрутам и берём минимум:
   $$\text{ACB: } C_{AC} + C_{CB}, \qquad \text{ADB: } C_{AD} + C_{DB},$$
   $$\text{ACDB: } C_{AC} + C_{CD} + C_{DB}, \quad \text{ADCB: } C_{AD} + C_{CD} + C_{CB}.$$

2. **Как найти время на каждом участке у «Аиста» и «Журавля»**
   Скорость поезда на своём длинном маршруте постоянна, поэтому времена на отрезках пропорциональны их длинам:
   $$t_{AD} = T_{ADB} \cdot \frac{AD}{AD + DB}, \quad t_{DB} = T_{ADB} - t_{AD};$$
   $$t_{AC} = T_{ACB} \cdot \frac{AC}{AC + CB}, \quad t_{CB} = T_{ACB} - t_{AC}.$$
   Эти четыре величины дальше используем в расчётах ожиданий и проездов.

3. **Как искать ближайший поезд/электричку после заданного времени**

   - Если известно время первого отправляющегося рейса T_{start} и период P, то расписание имеет вид
     $$T_{\text{start}}, \quad T_{\text{start}} + P, \quad T_{\text{start}} + 2P, \ \ldots$$
     Берём первый момент, который не меньше текущего времени.

- Удобно переводить время в минуты от полуночи, чтобы проще сравнивать и добавлять интервалы.

4. **Когда «Аист» проходит C, а «Журавль» — D**

   - Если «Аист» вышел из A в момент T_A, то в момент времени t_{AC} минут он будет в C, то есть в момент времени T_A+t_{AC}. Значит, моменты прохода C — это все T_A+t_{AC} для отправлений T_A по расписанию «Аиста».
   - Аналогично «Журавль», вышедший из A в момент T_J, пройдёт D в T_J+t_{AD}.

5. **Маршрут $A\to D\to C\to B$: как посчитать полное время** Начиная с момента прихода T_0:

   (a) Ждём ближайший «Журавль» из $A\Rightarrow$ получаем время его отправления T_{AD}^{dep}.

   (b) Едем по маршруту $A\to D$ за время $t_{AD}\Rightarrow$ прибываем на станцию D в момент$T_D=T_{AD}^{\text{dep}}+t_{AD}$.

   (c) Ждём ближайший «Беркут», следующий из D в $C\Rightarrow$ отправляемся в момент T_{DC}^{dep}, приезжаем на станцию C в момент $T_C=T_{DC}^{\text{dep}}+T_{CD}$.

   (d) Ждём ближайший проход «Аиста» через C (см. п. 4) $\Rightarrow$ получаем момент T_{CB}^{pass}.

   (e) Едем $C\to B$ время $t_{CB}\Rightarrow$ прибываем на станцию B через время $T_B=T_{CB}^{\text{pass}}+t_{CB}$.

   Полное время маршрута в минутах:

$$t_{\text{полн}}=(T_{AD}^{\text{dep}}-T_0)+t_{AD}+(T_{DC}^{\text{dep}}-T_D)+T_{CD}+(T_{CB}^{\text{pass}}-T_C)+t_{CB}.$$

6. Средняя скорость на $A\to D\to C\to B$. Полный путь:

$$S=AD+DC+CB.$$

   Полное время в часах:

$$t_h=\frac{t_{\text{полн}}}{60}.$$

   Средняя скорость:

$$v_{\text{ср}}=\frac{S}{t_h}.$$

7. **Минимально возможное время из A в B среди всех маршрутов** Считаем полные времена для четырёх вариантов и берём минимум:

   - ADB: ждём ближайший «Журавль» из A, затем добавляем T_{ADB}.
   - ACB: ждём ближайший «Аист» из A, затем добавляем T_{ACB}.

- $ACDB$: едем по маршруту $A \to C$ на «Аисте» (t_{AC}); далее на ближайшем «Беркуте» по маршруту $C \to D$ (T_{CD}); далее на ближайшем «Журавлу» через D (см. п. 4), затем по маршруту $D \to B$ за время t_{DB}.
- $ADCB$: зеркально к предыдущему, но сначала едем на «Журавлу» до станции D, потом на «Беркуте» по маршруту $D \to C$, затем на «Аисте» через C далее по участку $C \to B$.

Все ожидания ищем правилом из п. 3; времена на участках берём из п. 2; моменты проходов — из п. 4.

Теплообмен со средой (10 баллов)

Теплоизолированный калориметр с теплоёмкостью $C = 30{,}0$ Дж/°C находится в тепловом равновесии с налитой в него водой массой $m_в = 300$ г при температуре $t_в = 45°C$. В калориметр помещают лёд массой $m_л = 200$ г с температурой $t_л = -10°C$. Удельная теплоёмкость воды составляет $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг $\cdot$° C), удельная теплоёмкость льда — $c_л = 2{,}1$ кДж/(кг$\cdot$°C), удельная теплота плавления льда — $\lambda = 330$ кДж/кг.

10. Найдите массу растаявшего льда. Ответ выразите в граммах, округлив до целых. (3 балла)

11. С помощью встроенного нагревателя к содержимому калориметра подводят количество теплоты $Q = 35$ кДж. Определите температуру калориметра θ_1 после установления равновесия. Ответ выразите в °C, округлив до десятых долей. (3 балла)

12. Теплоизоляция калориметра с водой нарушается, так что мощность теплообмена P между калориметром и окружающей средой определяется по формуле $P = K \cdot |\theta_1 - t_{окр}|$, где $t_{окр} = 20°C$ — температура окружающей среды, $K = 85$ Дж/(мин $\cdot$° C). Определите температуру калориметра θ_2 спустя время $\Delta\tau = 2$ мин после нарушения теплоизоляции. Ответ выразите в °C, округлив до десятых долей. (4 балла)

Ответы: 10) $m_{пл} = 163$ г; 11) $\theta_1 = 10{,}7°C$; 12) $\theta_2 = 11{,}4°C$.

Теплообмен со средой (10 баллов)

Теплоизолированный калориметр с теплоёмкостью $C = 25{,}0$ Дж/°С находится в тепловом равновесии с налитой в него водой массой $m_\text{в} = 300$ г при температуре $t_\text{в} = 45$°С. В калориметр помещают лёд массой $m_\text{л} = 250$ г при температуре $t_\text{л} = 0$°С. Удельная теплоёмкость воды составляет $c_\text{в} = 4{,}2$ кДж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда — $\lambda = 330$ кДж/кг.

10. Найдите массу растаявшего льда. Ответ выразите в граммах, округлив до целых. (3 балла)

11. С помощью встроенного нагревателя к содержимому калориметра подводят количество теплоты $Q = 26$ кДж. Определите температуру калориметра θ_1 после установления равновесия. Ответ выразите в °С, округлив до десятых долей. (3 балла)

12. Теплоизоляция калориметра с водой нарушается, так что мощность теплообмена P между калориметром и окружающей средой определяется по формуле $P = K \cdot |\theta_1 - t_\text{окр}|$, где $t_\text{окр} = 25$°С — температура окружающей среды, $K = 85$ Дж/(мин·°С). Определите температуру калориметра θ_2 спустя время $\Delta\tau = 2$ мин после нарушения теплоизоляции. Ответ выразите в °С, округлив до десятых долей. (4 балла)

Ответы: 10) $m_\text{пл} = 175$ г; 11) $\theta_1 = 0{,}6$°С; 12) $\theta_2 = 2{,}3$°С.

Теплообмен со средой (10 баллов)

Теплоизолированный калориметр с теплоёмкостью $C = 25{,}0$ Дж/°С находится в тепловом равновесии с налитой в него водой массой $m_{\text{в}} = 300$ г при температуре $t_{\text{в}} = 60°\text{C}$. В калориметр помещают лёд массой $m_{\text{л}} = 150$ г при температуре $t_{\text{л}} = 0°\text{C}$. Удельная теплоёмкость воды составляет $c_{\text{в}} = 4{,}2$ кДж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда — $\lambda = 330$ кДж/кг.

10. Найдите массу растаявшего льда. Ответ выразите в граммах, округлив до целых. (3 балла)

11. С помощью встроенного нагревателя к содержимому калориметра подводят количество теплоты $Q = 40$ кДж. Определите температуру калориметра θ_1 после установления равновесия. Ответ выразите в °С, округлив до десятых долей. (3 балла)

12. Теплоизоляция калориметра с водой нарушается, так что мощность теплообмена P между калориметром и окружающей средой определяется по формуле $P = K \cdot |\theta_1 - t_{\text{окр}}|$, где $t_{\text{окр}} = 20°\text{C}$ — температура окружающей среды, $K = 85$ Дж/(мин·°С). Определите температуру калориметра θ_2 спустя время $\Delta\tau = 2$ мин после нарушения теплоизоляции. Ответ выразите в °С, округлив до десятых долей. (4 балла)

Ответы: 10) $m_{\text{пл}} = 150$ г; 11) $\theta_1 = 35{,}3°\text{C}$; 12) $\theta_2 = 33{,}9°\text{C}$.

Теплообмен со средой (10 баллов)

Теплоизолированный калориметр с теплоёмкостью $C = 35{,}0$ Дж/°С находится в тепловом равновесии с налитой в него водой массой $m_в = 300$ г при температуре $t_в = 45°$С. В калориметр помещают лёд массой $m_л = 190$ г при температуре $t_л = -15°$С. Удельная теплоёмкость воды составляет $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг $\cdot°$ С), удельная теплоёмкость льда — $c_л = 2{,}1$ кДж/(кг$\cdot°$С), удельная теплота плавления льда — $\lambda = 330$ кДж/кг.

10. Найдите массу растаявшего льда. Ответ выразите в граммах, округлив до целых. (3 балла)

11. Какое количество теплоты Q нужно подвести к системе, чтобы в калориметре осталась только вода при 0°С? Если тепло отводится, укажите отрицательное значение. Ответ выразите в кДж, округлив до сотых долей. (3 балла)

12. После того, как к калориметру подвели теплоту Q из предыдущего вопроса, теплоизоляция нарушается. Мощность теплообмена P между калориметра и окружающей средой определяется по формуле $P = K \cdot |\theta_1 - t_{окр}|$, где $t_{окр} = 20°$С — температура окружающей среды, $K = 85$ Дж/(мин$\cdot°$С). Определите температуру калориметра θ_2 спустя время $\Delta\tau = 2$ мин после нарушения теплоизоляции. Ответ выразите в °С, округлив до десятых долей. (4 балла)

Ответы: 10) $m_{пл} = 158$ г; 11) $Q = 10{,}41$ кДж; 12) $\theta_2 = 1{,}6°$С.

Теплообмен со средой (10 баллов)

Теплоизолированный калориметр с теплоёмкостью $C = 35{,}0$ Дж/°С находится в тепловом равновесии с налитой в него водой массой $m_\text{в} = 300$ г при температуре $t_\text{в} = 50$°C. В калориметр помещают лёд массой $m_\text{л} = 100$ г при температуре $t_\text{л} = 0$°C. Удельная теплоёмкость воды составляет $c_\text{в} = 4{,}2$ кДж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда — $\lambda = 330$ кДж/кг.

10. Найдите массу растаявшего льда. Ответ выразите в граммах, округлив до целых. (3 балла)

11. С помощью встроенного нагревателя к содержимому калориметра подводят количество теплоты $Q = 20$ кДж. Определите температуру калориметра θ_1 после установления равновесия. Ответ выразите в °С, округлив до десятых долей. (3 балла)

12. Теплоизоляция калориметра с водой нарушается, так что мощность теплообмена P между калориметром и окружающей средой определяется по формуле $P = K \cdot |\theta_1 - t_\text{окр}|$, где $t_\text{окр} = 0$°C — температура окружающей среды, $K = 85$ Дж/(мин $\cdot$° С). Определите температуру калориметра θ_2 спустя время $\Delta\tau = 2$ мин после нарушения теплоизоляции. Ответ выразите в °С, округлив до десятых долей. (4 балла)

Ответы: 10) $m_\text{пл} = 100$ г; 11) $\theta_1 = 30{,}2$°C; 12) $\theta_2 = 27{,}2$°C.

Типовое решение для сюжета «Теплообмен со средой: вода + лёд + калориметр»

Уникальные вопросы, встречающиеся в данных задачах

1. Масса расплавившегося льда после смешивания воды с льдом в калориметре. Определение режима равновесия: частичное плавление при 0°C или полное плавление при температуре выше 0°C.

2. Температура системы после подвода заданного количества теплоты Q нагревателем. Порядок расходования Q: доплавление оставшегося льда → нагрев воды и калориметра.

3. «Пороговые» вопросы: сколько тепла нужно отвести, чтобы получить только воду при 0°C (или остаться при 0°C с частью льда).

4. Изменение температуры за малый интервал времени при нарушении теплоизоляции, когда мощность теплообмена задана законом

$$P = K\,|\theta - t_{\text{окр}}|$$

(При этом берем θ из предыдущего пункта как константу на коротком промежутке), и требуется выразить новую температуру через $\Delta\tau$.

Обозначения

$m_{\text{в}},\ t_{\text{в}},\ c_{\text{в}}$	— масса, температура и удельная теплоёмкость воды,
$m_{\text{л}},\ t_{\text{л}},\ c_{\text{л}},\ \lambda$	— масса, температура, удельная теплоёмкость и теплота плавления льда
C	— теплоёмкость калориметра, $t_{\text{окр}}$ — температура среды,
Q	— тепло нагревателя (со знаком: $Q > 0$ — подводим, $Q < 0$ — отводим),
K	— коэффициент теплопередачи в формуле $P = K\|\theta - t_{\text{окр}}\|$,
$\Delta\tau$	— длительность теплообмена с окружающей средой.

Шаг 1. Смешивание воды и льда (без нагревателя, сосуд теплоизолирован). Эффективная теплоёмкость «вода + калориметр»:

$$C_0 = m_{\text{в}}c_{\text{в}} + C \quad [\text{кДж}/{}^\circ\text{C}].$$

Доступная теплота при охлаждении воды и калориметра до 0°C:

$$Q_{\text{дост}} = C_0\,(t_{\text{в}} - 0).$$

Теплота на доведение льда до 0°C (если $t_{\text{л}} < 0$°C):

$$Q_{\text{наг}} = m_{\text{л}}c_{\text{л}}(0 - t_{\text{л}}),$$

Если $t_л = 0°C$, то $Q_{наг} = 0$. Оставшаяся на плавление теплота:

$$Q_{пл,\,доступ} = Q_{дост} - Q_{наг}.$$

Случай A: $0 \leq Q_{пл,\,доступ} < m_л \lambda$ (частичное плавление). Тогда равновесная температура составляет $\theta = 0°C$, масса расплавившегося льда равна

$$m_{пл} = \frac{Q_{пл,\,доступ}}{\lambda}, \qquad m_{ост} = m_л - m_{пл}.$$

Случай B: $Q_{пл,\,доступ} \geq m_л \lambda$ (полное плавление). Вся масса льда тает: $m_{пл} = m_л$. Избыток теплоты после плавления составляет

$$Q_{изб} = Q_{пл,\,доступ} - m_л \lambda.$$

Теперь нагреваются вода и калориметр с полной массой воды $m_в^* = m_в + m_л$:

$$C_1 = m_в^* c_в + C, \qquad \theta = \frac{Q_{изб}}{C_1}\ (> 0°C).$$

Шаг 2. Подвод тепла нагревателем Q и температура θ_1. Если после шага 1 остался лёд ($\theta = 0°C$, $m_{ост} > 0$), то

$$Q_1 = m_{ост} \lambda.$$

Если $0 \leq Q < Q_1$, идёт только плавление:

$$\theta_1 = 0°C, \qquad m'_{ост} = m_{ост} - \frac{Q}{\lambda}.$$

Если $Q \geq Q_1$, сначала доплавляется лёд, затем смесь нагревается:

$$Q_2 = Q - Q_1, \quad C_1 = (m_в + m_л) c_в + C, \quad \theta_1 = 0°C + \frac{Q_2}{C_1}.$$

Если после шага 1 весь лёд растаял ($\theta > 0°C$):

$$C_1 = (m_в + m_л) c_в + C, \qquad \theta_1 = \theta + \frac{Q}{C_1}.$$

Шаг 2' (пороговый вопрос). Сколько тепла нужно, чтобы получить только воду при $0°C$?

$$Q_{нуж} = \begin{cases} m_{ост}\lambda, & \text{если после первого шага} \theta = 0°C,\ m_{ост} > 0 \text{ (тепло подводим)}; \\ -C_1\,\theta, & \text{если после первого шага } \theta > 0°C \text{ (тепло отводим, } Q < 0). \end{cases}$$

Шаг 3. Кратковременный теплообмен с окружающей средой ($\Delta\tau$ мало). По условию мощность теплообмена берут по начальной разности температур:

$$P = K\,|\theta_1 - t_{\text{окр}}| \quad \text{(считаем постоянной на интервале } \Delta\tau).$$

Теплота, полученная системой (со знаком), составляет

$$Q_{\text{сист}} = \begin{cases} +\,P\,\Delta\tau, & \theta_1 < t_{\text{окр}} \text{ (среда нагревает систему);} \\ -\,P\,\Delta\tau, & \theta_1 > t_{\text{окр}} \text{ (система охлаждается).} \end{cases}$$

Если весь лёд растаял, то

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{Q_{\text{сист}}}{C_1}.$$

Если при $\theta_1 = 0°\text{C}$ лёд ещё есть, то при $t_{\text{окр}} > 0°\text{C}$ поступающее тепло сначала плавит лёд и масса образовавшейся из него воды определяется как

$$m = \min\left\{ m'_{\text{ост}},\ \frac{P\,\Delta\tau}{\lambda} \right\}.$$

Если $P\,\Delta\tau > \lambda m'_{\text{ост}}$, то остаток тепла нагревает воду:

$$\theta_2 = 0°\text{C} + \frac{P\,\Delta\tau - \lambda m'_{\text{ост}}}{C_1};$$

иначе остаёмся при $\theta_2 = 0°\text{C}$ с уменьшенным количеством льда. При $t_{\text{окр}} < 0°\text{C}$ возможна обратная картина: тепло уходит и часть воды может кристаллизоваться на величину $m_{\text{крист}} = \min\{m_{\text{в}} + m_{\text{л}} - m_{\text{лёд}},\ |Q_{\text{сист}}|/\lambda\}$.

Четыре резистора (10 баллов)

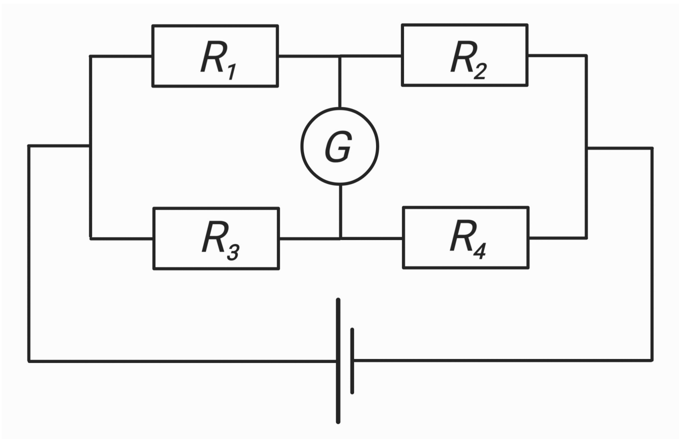
В изображённой на рисунке схеме известны сопротивления резисторов $R_1 = 120$ Ом, $R_2 = 180$ Ом, $R_3 = 75$ Ом и напряжение идеального источника $U = 12$ В. Гальванометр G показывает нуль (ток через него не течёт).

13. Найдите сопротивление R_4. Ответ выразите в омах, округлив до десятых. (2 балла)

14. Определите ток I через резистор R_3. Ответ выразите в мА, округлив до целого. (2 балла)

15. Рассчитайте полную мощность, выделяемую в цепи. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)

16. Рассчитайте мощности, выделяемые на каждом резисторе. В ответе укажите максимальную из вычисленных мощностей. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)



Ответы: 13) 112,5 Ом; 14) 64 мА; 15) 1,25 Вт; 16) 0,46 Вт.

Четыре резистора (10 баллов)

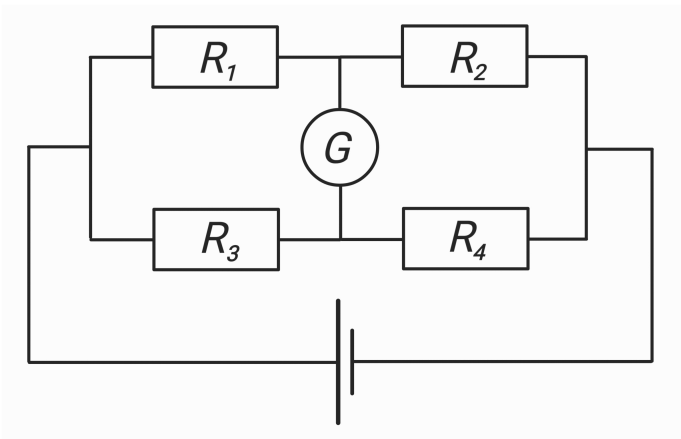
В изображённой на рисунке схеме известны сопротивления резисторов $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 250$ Ом, $R_4 = 200$ Ом и напряжение идеального источника $U = 18$ В. Гальванометр G показывает нуль (ток через него не течёт).

13. Найдите сопротивление R_3. Ответ выразите в омах, округлив до десятых. (2 балла)

14. Определите ток I через резистор R_3. Ответ выразите в мА, округлив до целого. (2 балла)

15. Рассчитайте полную мощность, выделяемую в цепи. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)

16. Рассчитайте мощности, выделяемые на каждом резисторе. В ответе укажите минимальную из вычисленных мощностей. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)



Ответы: 13) 80,0 Ом; 14) 64 мА; 15) 2,08 Вт; 16) 0,26 Вт.

Четыре резистора (10 баллов)

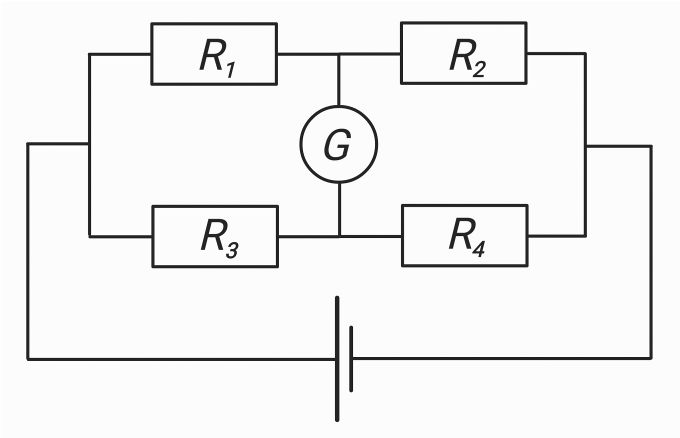
В изображённой на рисунке схеме известны сопротивления резисторов $R_1 = 150$ Ом, $R_3 = 82$ Ом, $R_4 = 120$ Ом и напряжение идеального источника $U = 24$ В. Гальванометр G показывает нуль (ток через него не течёт).

13. Найдите сопротивление R_2. Ответ выразите в омах, округлив до десятых. (2 балла)

14. Определите ток I через резистор R_1. Ответ выразите в мА, округлив до целого. (2 балла)

15. Рассчитайте полную мощность, выделяемую в цепи. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)

16. Рассчитайте мощности, выделяемые на каждом резисторе. В ответе укажите минимальную из вычисленных мощностей. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)



Ответы: 13) 219,5 Ом; 14) 65 мА; 15) 4,41 Вт; 16) 0,63 Вт.

Четыре резистора (10 баллов)

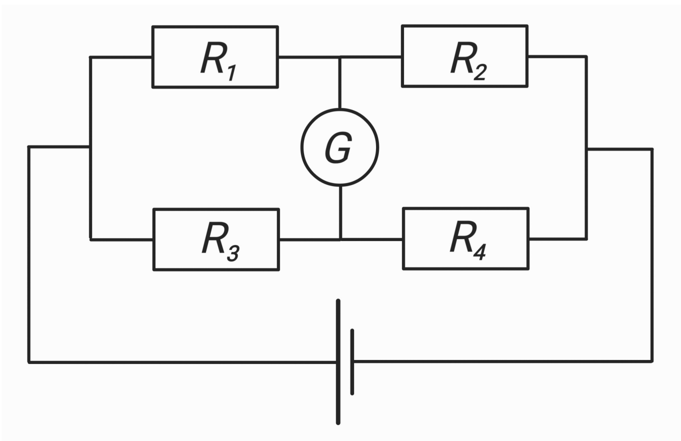
В изображённой на рисунке схеме известны сопротивления резисторов $R_2 = 220$ Ом, $R_3 = 68$ Ом, $R_4 = 150$ Ом и напряжение идеального источника $U = 15$ В. Гальванометр G показывает нуль (ток через него не течёт).

13. Найдите сопротивление R_1. Ответ выразите в омах, округлив до десятых. (2 балла)

14. Определите ток I через резистор R_4. Ответ выразите в мА, округлив до целого. (2 балла)

15. Рассчитайте полную мощность, выделяемую в цепи. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)

16. Рассчитайте мощности, выделяемые на каждом резисторе. В ответе укажите максимальную из вычисленных мощностей. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)



Ответы: 13) 99,7 Ом; 14) 69 мА; 15) 1,74 Вт; 16) 0,71 Вт.

Четыре резистора (10 баллов)

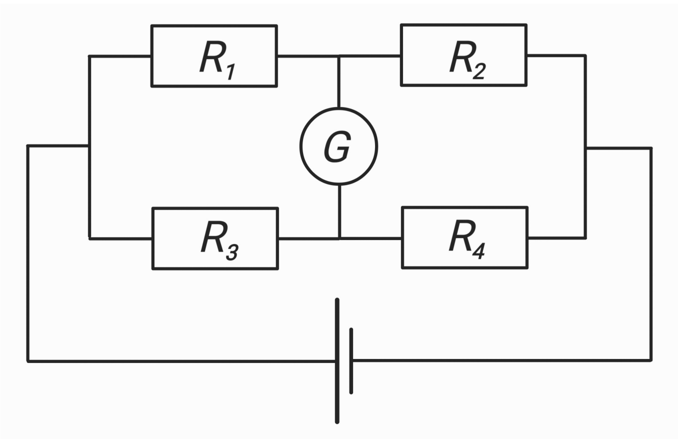
В изображённой на рисунке схеме известны сопротивления резисторов $R_1 = 200$ Ом, $R_2 = 300$ Ом, $R_4 = 150$ Ом. Ток через резистор R_1 равен 0,10 А. Напряжение источника идеальное. Гальванометр G показывает нуль (ток через него не течёт).

13. Найдите напряжение источника U. Ответ выразите в вольтах, округлив до десятых. (2 балла)

14. Найдите ток I через резистор R_4. Ответ выразите в мА, округлив до целого. (2 балла)

15. Рассчитайте полную мощность, выделяемую в цепи. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)

16. Рассчитайте мощности, выделяемые на каждом резисторе. В ответе укажите максимальную из вычисленных мощностей. Ответ выразите в ваттах, округлив до сотых. (3 балла)



Ответы: 13) 50,0 В; 14) 200 мА; 15) 15,00 Вт; 16) 6,00 Вт.

Типовое решение для сюжета «Четыре резистора»

Уникальные вопросы, встречающиеся в задачах

1. Определение неизвестного сопротивления по условию нулевого тока через гальванометр (баланс моста).

2. Нахождение токов в заданных резисторах.

3. Эквивалентное сопротивление всей схемы и полная мощность, выделяемая в цепи.

4. Мощности на каждом резисторе; выбор максимальной/минимальной из них.

5. Восстановление напряжения источника по известному току в одной из ветвей или через один из резисторов.

Модель и обозначения

Схема — мост Уитстона с нулевым током в гальванометре G. Верхний узел — плюс источника с напряжением U, нижний — минус. Левая ветвь — последовательно R_1 и R_2; правая ветвь — последовательно R_3 и R_4. Обозначим

$$R_A = R_1 + R_2, \qquad R_B = R_3 + R_4.$$

Найдем токи по ветвям (они одинаковы в последовательно соединённых резисторах своей ветви):

$$I_A = \frac{U}{R_A} \text{ (через } R_1, R_2), \qquad I_B = \frac{U}{R_B} \text{ (через } R_3, R_4).$$

Нулевой ток в G означает равенство потенциалов средних точек ветвей.

Баланс моста: как найти неизвестный резистор

Условие нулевого тока через G (условие баланса) эквивалентно следующему

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad \Longleftrightarrow \quad R_1 R_4 = R_2 R_3.$$

Отсюда мгновенно выражаются любые неизвестные:

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1}, \qquad R_3 = \frac{R_1 R_4}{R_2}, \qquad R_2 = \frac{R_1 R_4}{R_3}, \qquad R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4}.$$

При балансе ветви электрически независимы (перемычка не передаёт ток), поэтому их можно считать просто двумя последовательными цепями, подключёнными параллельно к одному источнику.

Токи, напряжения, эквивалентное сопротивление

Токи по ветвям:

$$I_A = \frac{U}{R_1 + R_2}, \qquad I_B = \frac{U}{R_3 + R_4}.$$

Токи через отдельные резисторы:

$$I_{R_1} = I_{R_2} = I_A, \qquad I_{R_3} = I_{R_4} = I_B.$$

Падения напряжения:

$$U_{R_1} = I_A R_1, \quad U_{R_2} = I_A R_2, \qquad U_{R_3} = I_B R_3, \quad U_{R_4} = I_B R_4,$$

при этом $U_{R_1} + U_{R_2} = U_{R_3} + U_{R_4} = U$.

Эквивалентное сопротивление всей цепи (параллель R_A и R_B):

$$R_\Sigma = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

Полная мощность:

$$P_\Sigma = \frac{U^2}{R_\Sigma} = U(I_A + I_B).$$

Мощности на каждом резисторе; как найти максимум/минимум

Мощность на резисторе R в своей ветви составляет $P = I^2 R$. Тогда

$$P_1 = I_A^2 R_1, \quad P_2 = I_A^2 R_2, \qquad P_3 = I_B^2 R_3, \quad P_4 = I_B^2 R_4.$$

Полезные соотношения при балансе:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2}, \qquad \frac{P_3}{P_4} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Чтобы выбрать максимальную/минимальную мощность, достаточно сравнить два значения из левой ветви $\{I_A^2 R_1,\ I_A^2 R_2\}$ и два из правой $\{I_B^2 R_3,\ I_B^2 R_4\}$, а затем сравнить наибольшие (или наименьшие) из ветвей между собой. Удобно сначала вычислить I_A и I_B, затем перемножить на соответствующие сопротивления.

Проверка: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = P_\Sigma$.

Восстановление напряжения источника по известному току

Если известен, например, ток через R_1, то это ток всей левой ветви: $I_{R_1} = I_A$. Напряжение источника составляет

$$U = I_A(R_1 + R_2).$$

Аналогично если известен ток через R_4 (правую ветвь), то $U = I_B(R_3 + R_4)$. Далее действуют общие формулы для мощностей и эквивалентного сопротивления.

Катер и плот (10 баллов)

Между пунктами A и B, находящимися на одной реке на расстоянии $S = 18$ км, курсирует катер, мгновенно разворачиваясь без остановок в пунктах. В тот момент, когда катер выходит из пункта A, вместе с ним также отправляется плот в направлении пункта B. Скорость катера относительно воды равна $V_к = 21$ км/ч, скорость течения реки равна $V_т = 3$ км/ч.

17. На каком расстоянии d_1 от A произойдёт первая встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)

18. На каком расстоянии d_2 от A произойдёт вторая встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)

19. Сколько раз встретятся катер и плот, не считая встречу в начальный момент времени? (3 балла)

20. Каково максимальное расстояние $L_{\max}$ между катером и плотом до прибытия плота в пункт B? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (3 балла)

Ответы: 17) $d_1 = 4.5$ км; 18) $d_2 = 6.0$ км; 19) 6; 20) $L_{\max} = 15.8$ км.

Катер и плот (10 баллов)

Между пунктами A и B на одной реке, удалёнными друг от друга на $S = 24\,\text{км}$, непрерывно курсирует катер, мгновенно разворачиваясь без остановок в пунктах. В момент выхода катера из A одновременно отправляется плот в сторону B. Скорость катера относительно воды составляет $V_\text{к} = 18\,\text{км/ч}$, скорость течения реки — $V_\text{т} = 3\,\text{км/ч}$.

17. Через какое время от начала движения произойдёт первая встреча? Ответ выразите в часах, округлив до десятых долей. (2 балла)

18. Через какое время от начала движения произойдёт вторая встреча? Ответ выразите в часах, округлив до десятых долей. (2 балла)

19. Сколько раз встретятся катер и плот, не считая встречу в начальный момент времени? (3 балла)

20. Каково максимальное расстояние $L_{\max}$ между катером и плотом до прибытия плота в пункт B? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (3 балла)

Ответы: 17) $t_1 = 2{,}3$ ч; 18) $t_2 = 3{,}2$ ч; 19) $N = 5$; 20) $L_{\max} = 20{,}6$ км.

Катер и плот (10 баллов)

Между пунктами A и B, находящимися на одной реке на расстоянии $S = 30$ км, непрерывно курсирует катер, мгновенно разворачиваясь без остановок в пунктах. В момент выхода катера из A одновременно с ним отправляется по течению плот в направлении B. Скорость катера относительно воды составляет $V_к = 21$ км/ч, скорость течения реки — $V_т = 3$ км/ч.

17. На каком расстоянии от B произойдёт первая встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)

18. На каком расстоянии от B произойдёт третья встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)

19. Сколько раз встретятся катер и плот, не считая встречу в начальный момент времени? (3 балла)

20. Каково максимальное расстояние $L_{\max}$ между катером и плотом до прибытия плота в пункт B? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (3 балла)

Ответы: 17) $d_1 = 22{,}5$ км; 18) $d_3 = 15{,}0$ км; 19) $N = 6$; 20) $L_{\max} = 26{,}3$ км.

Катер и плот (10 баллов)

Между пунктами A и B находящимися на одной реке на расстоянии $S = 36$ км, непрерывно курсирует катер, мгновенно разворачиваясь без остановок в пунктах. В момент выхода катера из A вместе с ним отправляется по течению плот к пункту B. Скорость течения реки составляет $V_т = 4$ км/ч. Известно, что первая встреча катера с плотом произошла на расстоянии $d_1 = 9$ км от пункта A.

17. Определите скорость катера $V_к$ относительно воды. Ответ выразите в км/ч, округлив до десятых долей. (2 балла)

18. На каком расстоянии от пункта A произошла вторая встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)

19. Сколько раз встретятся катер и плот, не считая встречу в начальный момент времени? (3 балла)

20. Каково максимальное расстояние $L_{\max}$ между катером и плотом до прибытия плота в пункт B? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (3 балла)

Ответы; 17) $V_к = 28{,}0$ км/ч; 18) $d_2 = 12{,}0$ км; 19) $N = 6$; 20) $L_{\max} = 31{,}5$ км.

Катер и плот (10 баллов)

Между пунктами A и B, находящимися на одной реке на расстоянии $S = 20$ км, непрерывно курсирует катер, мгновенно разворачиваясь без остановок в пунктах. В момент выхода катера из A одновременно с ним отправляется плот по течению к B. Скорость катера относительно воды составляет $V_{\text{к}} = 28$ км/ч, скорость течения реки — $V_{\text{т}} = 4$ км/ч.

17. На каком расстоянии от A произойдёт третья встреча? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (2 балла)

18. Через какое время от начала движения произойдёт четвёртая встреча? Ответ выразите в часах, округлив до десятых долей. (2 балла)

19. Сколько раз встретятся катер и плот, не считая встречу в начальный момент времени? (3 балла)

20. Каково максимальное расстояние $L_{\max}$ между катером и плотом до прибытия плота в пункт B? Ответ выразите в километрах, округлив до десятых долей. (3 балла)

Ответы: 17) $d_3 = 10{,}0$ км; 18) $t_4 = 3{,}3$ ч; 19) $N = 6$; 20) $L_{\max} = 17{,}5$ км.

Типовое решение для сюжета «Катер и плот»

1. Найти первую/вторую/третью встречу: момент времени от старта или место встречи (расстояние от A или от B).
2. Определить, сколько встреч произойдёт до прихода плота в пункт B.
3. Найти максимальное расстояние $L_{\max}$ между катером и плотом до момента прихода плота в B.
4. Обратная задача: по известному месту первой встречи d_1 найти скорость катера $V_{\text{к}}$.

Обозначения и модель

Ось x направлена от A к B, $x = 0$ — пункт A, $x = S$ — пункт B.

$v_\downarrow = V_{\text{к}} + V_{\text{т}}$ (катер вниз по течению), $v_\uparrow = V_{\text{к}} - V_{\text{т}} > 0$ (катер вверх по течению),

Плот идёт равномерно: $x_{\text{п}}(t) = V_{\text{т}}\, t$. Время прихода плота в B составляет

$$t_B = \frac{S}{V_{\text{т}}}.$$

Движение катера — «пила» из отрезков:

$$\begin{aligned}
&(\text{1-й спуск}) \quad x_{\text{к}}(t) = v_\downarrow t, \qquad 0 \le t \le \frac{S}{v_\downarrow};\\
&(\text{1-й подъём}) \quad x_{\text{к}}(t) = S - v_\uparrow\Big(t - \frac{S}{v_\downarrow}\Big), \qquad \frac{S}{v_\downarrow} \le t \le \frac{S}{v_\downarrow} + \frac{S}{v_\uparrow};\\
&\text{далее период } T = \frac{S}{v_\downarrow} + \frac{S}{v_\uparrow} \text{ повторяется.}
\end{aligned}$$

1. Первая и вторая встречи: вывод формул

Будем называть «спуском» движение катера по течению, а «подъемом» — движение против течения.

(a) Первая встреча: t_1 и d_1

Первая нетривиальная встреча происходит во время движения катера против течения (при движении по течению они находятся в одной точке лишь в момент старта). Решаем уравнение $x_{\text{к}}(t) = x_{\text{п}}(t)$ на участке подъёма:

$$S - v_\uparrow\left(t - \frac{S}{v_\downarrow}\right) = V_{\text{т}} t.$$

Переносим t-слагаемые влево, постоянные вправо:

$$v_\uparrow t + V_{\text{т}} t = S + \frac{v_\uparrow S}{v_\downarrow} \;\Rightarrow\; t\,(v_\uparrow + V_{\text{т}}) = S\left(1 + \frac{v_\uparrow}{v_\downarrow}\right).$$

Подставляем $v_\uparrow = V_\text{к} - V_\text{т}$ и $v_\downarrow = V_\text{к} + V_\text{т}$. Преобразуем выражение в левых скобках: $v_\uparrow + V_\text{т} = (V_\text{к} - V_\text{т}) + V_\text{т} = V_\text{к}$. Преобразуем выражение в правых скобках:

$$1 + \frac{v_\uparrow}{v_\downarrow} = 1 + \frac{V_\text{к} - V_\text{т}}{V_\text{к} + V_\text{т}} = \frac{(V_\text{к} + V_\text{т}) + (V_\text{к} - V_\text{т})}{V_\text{к} + V_\text{т}} = \frac{2V_\text{к}}{V_\text{к} + V_\text{т}}.$$

Отсюда получаем

$$t_1 = \frac{S \cdot \frac{2V_\text{к}}{V_\text{к}+V_\text{т}}}{V_\text{к}} = \frac{2S}{V_\text{к} + V_\text{т}}.$$

Координата встречи определяется плотом:

$$d_1 = x_\text{п}(t_1) = V_\text{т}\, t_1 = \frac{2S\, V_\text{т}}{V_\text{к} + V_\text{т}}.$$

(б) Вторая встреча t_2 и d_2

Вторая встреча происходит на следующем спуске катера (он стартует из A в момент $t_A^{(1)} = \frac{S}{v_\downarrow} + \frac{S}{v_\uparrow}$). На этом участке

$$x_\text{к}(t) = v_\downarrow \left(t - t_A^{(1)}\right), \qquad x_\text{п}(t) = V_\text{т} t.$$

Запишем условие равенства координат:

$$v_\downarrow t - v_\downarrow t_A^{(1)} = V_\text{т} t \;\Rightarrow\; t\,(v_\downarrow - V_\text{т}) = v_\downarrow t_A^{(1)}.$$

Подставим $v_\downarrow - V_\text{т} = (V_\text{к} + V_\text{т}) - V_\text{т} = V_\text{к}$ и $t_A^{(1)} = \frac{S}{v_\downarrow} + \frac{S}{v_\uparrow}$:

$$t_2 = \frac{v_\downarrow \left(\frac{S}{v_\downarrow} + \frac{S}{v_\uparrow}\right)}{V_\text{к}} = \frac{S + S\frac{v_\downarrow}{v_\uparrow}}{V_\text{к}} = \frac{S}{V_\text{к}}\left(1 + \frac{V_\text{к} + V_\text{т}}{V_\text{к} - V_\text{т}}\right) = \frac{2S}{V_\text{к} - V_\text{т}}.$$

Найдём координату этой встречи:

$$d_2 = x_\text{п}(t_2) = V_\text{т}\, t_2 = \frac{2S\, V_\text{т}}{V_\text{к} - V_\text{т}}.$$

(в) Обобщение на все встречи

Повторяя рассуждение для каждого последующего подъёма и спуска, получаем две серии:

$$t_{2m-1} = \frac{2m\,S}{V_\text{к} + V_\text{т}} \quad \text{(встречи на подъёмах)}, \qquad t_{2m} = \frac{2m\,S}{V_\text{к} - V_\text{т}} \quad \text{(встречи на спусках)},$$

Точки на реке для этих встреч определяется плотом: $d_n = V_\text{т}\, t_n$. Если в задаче требуется найти расстояние от B, берём $S - d_n$.

2. Сколько встреч до прихода плота в B

Учитываем все целые $m \geq 1$, для которых моменты не превосходят $t_B = \dfrac{S}{V_\text{т}}$:

$$\frac{2m\,S}{V_\text{к}+V_\text{т}} \leq \frac{S}{V_\text{т}} \iff m \leq \frac{V_\text{к}+V_\text{т}}{2V_\text{т}} \quad \text{(серия подъёмов)},$$

$$\frac{2m\,S}{V_\text{к}-V_\text{т}} \leq \frac{S}{V_\text{т}} \iff m \leq \frac{V_\text{к}-V_\text{т}}{2V_\text{т}} \quad \text{(серия спусков)}.$$

Дальше — чисто «счётная» процедура: выпишем натуральные $m = 1, 2, \dots$ и возьмём все, которые удовлетворяют выше неравенствам, *по каждой серии*. Объединим оба списка и, если в обоих оказался момент $t = t_B$, посчитаем его один раз. Число получившихся моментов и есть искомое количество встреч N.

3. Максимальное расстояние $L_{\max}$ до t_B

На каждом отрезке движение линейно, поэтому

$$L(t) = |x_\text{к}(t) - x_\text{п}(t)|$$

меняется равномерно; наибольшие значения этой функции до t_B достигаются в концах отрезков: в момент старта, в моменты разворота катера и в момент t_B. Моменты разворотов:

$$t_B^{(m)} = m\,\frac{S}{v_\downarrow} + (m-1)\,\frac{S}{v_\uparrow} \quad (m = 1, 2, \dots), \qquad t_A^{(m)} = m\,\frac{S}{v_\downarrow} + m\,\frac{S}{v_\uparrow} = mT \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Значения $L(t)$ в них считаются «в одну строчку»:

$$L\Big(t_B^{(m)}\Big) = \big|S - V_\text{т}\,t_B^{(m)}\big| = S - V_\text{т}\,t_B^{(m)} \quad (\text{до } t_B), \qquad L\Big(t_A^{(m)}\Big) = \big|0 - V_\text{т}\,t_A^{(m)}\big| = V_\text{т}\,t_A^{(m)}.$$

Будем перебирать $m = 1, 2, \ldots$, пока соответствующий момент не превосходитt_B, и возьмём максимум из набора

$$\{\, L(0) = 0;\ L(t_B^{(1)}), L(t_B^{(2)}), \dots;\ L(t_A^{(1)}), L(t_A^{(2)}), \dots;\ L(t_B) = 0\,\}.$$

На практике часто хватает первых двух значений:

$$L\Big(t_B^{(1)}\Big) = S - \frac{S\,V_\text{т}}{V_\text{к}+V_\text{т}} = S \cdot \frac{V_\text{к}}{V_\text{к}+V_\text{т}}, \qquad L\Big(t_A^{(1)}\Big) = V_\text{т}\bigg(\frac{S}{V_\text{к}+V_\text{т}} + \frac{S}{V_\text{к}-V_\text{т}}\bigg).$$

Сравним их (и при необходимости следующее m) и выберем наибольшее.

4. Обратная задача: найти $V_к$ по d_1

Первая встреча происходит на подъёме, а её координата определяется плотом:

$$d_1 = V_т t_1 = V_т \cdot \frac{2S}{V_к + V_т}.$$

Отсюда прямо выражается искомая скорость катера:

$$V_к = \frac{2S\, V_т}{d_1} - V_т.$$

Графическое решение задачи является более простым. На графике (см. рисунок) по оси t — время до $t_B = S/V_т$, по оси x — координата: ломаная линия описывает движение катера (развороты в точках A и B), прямая — движение плота, точки пересечения — все встречи. По вершинам «пилы» удобно проверять $L_{\max}$.