Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8. 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

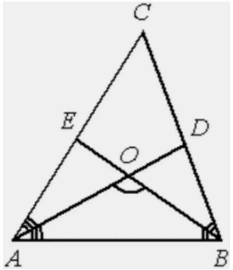
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Составитель: Школа Пифагора

Часть 1

Ответом к заданиям* 1–12 *является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №* 1 *справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В треугольнике ABC угол C равен 58°, биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



Ответ: ______________________.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(1;1)$ и $\vec{b}\,(0;7)$. Найдите длину вектора $8\vec{a}+\vec{b}$.

Ответ: ______________________.

3 Радиусы двух шаров равны 9 и 12. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

Ответ: ______________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 3

4 Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 1.

Ответ: ____________________________.

5 Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,5 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не меньше 0,7?

Ответ: ____________________________.

6 Найдите корень уравнения

$3^{\log_{27}(2x-9)} = 3.$

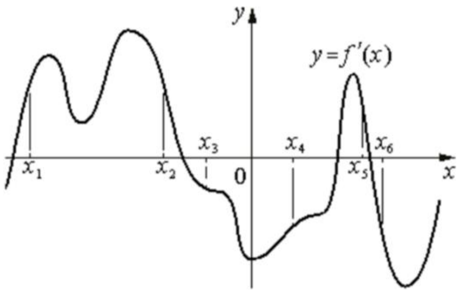
Ответ: ____________________________.

7 Найдите значение выражения

$(\sqrt{13}-\sqrt{7})(\sqrt{13}+\sqrt{7}).$

Ответ: ____________________________.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены шесть точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



Ответ: ____________________________.

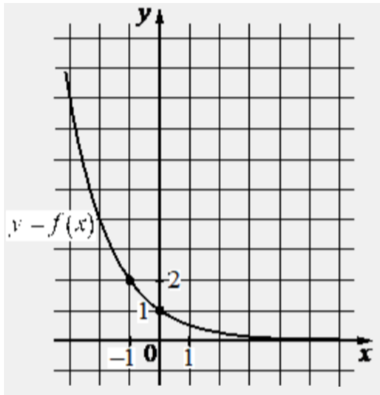
9 Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 192$ Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f (в Гц) больше первого: она зависит от скорости тепловоза v (в м/с) по закону $f(v) = \frac{f_0}{1-\frac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 8 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 300$ м/с. Ответ дайте в м/с.

Ответ: ____________________________.

10 Расстояние между городами A и B равно 420 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 1 час следом за ним со скоростью 80 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C. Ответ дайте в километрах.

Ответ: ____________________________.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(-4)$.



Ответ: ____________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции

$y = 20\operatorname{tg} x - 20x + 5\pi - 6$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$9^{x+1} - 2 \cdot 3^{x+2} + 5 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\log_3 \frac{3}{2}; \sqrt{5}\right)$.

14 Точка O – точка пересечения диагоналей DC_1 и CD_1 грани CC_1D_1D наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что объём многогранника $OABB_1A_1$ вдвое больше объёма многогранника $OABCD$.

б) Найдите объём многогранника $OABB_1A_1$, если $ABCD$ является прямоугольником, $AB = 1$, $BC = 4$, $CC_1 = 9$, а прямая CA_1 перпендикулярна плоскости ABC.

15 Решите неравенство

$$\log_5^2(25 - x^2) - 3\log_5(25 - x^2) + 2 \geq 0.$$

16 31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Олег переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 250 рублей, то за 2 года. Найдите a.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 3

17 Дан треугольник ABC. Известно, что $BC = \sqrt{37}$, $AB = 4$, $AC = 3$. На стороне BC построен равносторонний треугольник BDC, при этом точки A и D лежат по разные стороны от прямой BC.

а) Докажите, что вокруг полученного четырёхугольника $ABDC$ можно описать окружность.
б) Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDC$ до центра его описанной окружности.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

19 На доске написано 12 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое семи наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 16.

а) Может ли наибольшее из этих двенадцати чисел равняться 18?
б) Может ли среднее арифметическое всех двенадцати чисел равняться 11?
в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех двенадцати чисел.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 3

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике (профиль) Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	119	
2	17	
3	15	
4	0,5	
5	2	
6	18	
7	6	
8	3	
9	12	
10	240	
11	16	
12	14	
13	а) $\log_3\frac{5}{3}$; -1 б) $\log_3\frac{5}{3}$	
14	$\frac{32}{3}$	
15	$\left(-5;-2\sqrt{5}\right]\cup\{0\}\cup\left[2\sqrt{5};5\right)$	
16	12,5	
17	$\frac{\sqrt{1443}}{21}$	
18	$(-\infty;-6)\cup(-6;-3)\cup(-3;0)\cup(0;3)\cup(3;6)\cup(6;+\infty)$	
19	а) нет б) нет в) 11,75	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

13

а) Решите уравнение $9^{x+1} - 2 \cdot 3^{x+2} + 5 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\log_3 \frac{3}{2};\ \sqrt{5}\right)$.

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2013

СТЕПЕНИ	
1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2	$a^n : a^m = a^{n-m}$
3	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
4	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
6	$a^0 = 1$
7	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
8	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА

Если $\log_a b = c$, то $a^c = b$

ОСНОВНОЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ

$a^{\log_a b} = b$

FD08D9

а) $9^x \cdot 9^1 - 2 \cdot 3^x \cdot 3^2 + 5 = 0$

$9 \cdot 9^x - 18 \cdot 3^x + 5 = 0$

Пусть $3^x = t$

$9 \cdot t^2 - 18t + 5 = 0$

$D = 324 - 4 \cdot 9 \cdot 5 = 144$

$t = \frac{18 \pm 12}{18}$

$t = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$ $\quad$ $t = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

$3^x = \frac{5}{3}$ $\quad$ $3^x = \frac{1}{3}$

$3^x = 3^{\log_3 \frac{5}{3}}$ $\quad$ $x = -1$

$x = \log_3 \frac{5}{3}$

б) $-1 = \log_3 \frac{1}{3}$

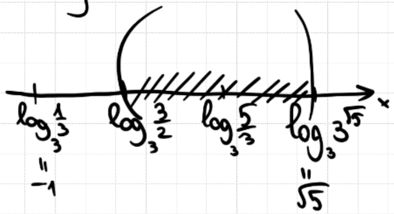
$\sqrt{5} = \log_3 3^{\sqrt{5}}$

Сравним

$3^{\sqrt{5}} > 3^{\sqrt{4}} > \frac{5}{3}$

$3^{\sqrt{4}} = 9$

Получаем



$-1 \notin$

$\log_3 \frac{5}{3} \in$

Ответ: а) $\log_3 \frac{5}{3}$; -1

б) $\log_3 \frac{5}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14

Точка O — точка пересечения диагоналей DC_1 и CD_1 грани CC_1D_1D наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что объём многогранника $OABB_1A_1$ вдвое больше объёма многогранника $OABCD$.

б) Найдите объём многогранника $OABB_1A_1$, если $ABCD$ является прямоугольником, $AB = 1$, $BC = 4$, $CC_1 = 9$, а прямая CA_1 перпендикулярна плоскости ABC.

ИСТОЧНИКИ

Досрочная волна (Резерв) 2022

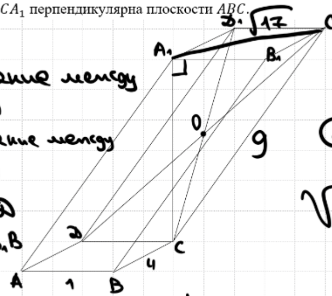
а) ① Пусть

h_1 - это расстояние между (ABC) и $(A_1B_1C_1)$

h_2 - это расстояние между (ABB_1) и (CDD_1)

S_1 - это S_{ABCD}

S_2 - это $S_{AA_1B_1B}$



② $V_{\text{всего парал.}} = S_1 \cdot h_1 = S_2 \cdot h_2$

$V_{OABB_1A_1} = \frac{1}{3} \cdot S_2 \cdot h_2 = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{всего парал.}}$

$V_{OABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_1 \cdot \frac{1}{2} h_1 = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{всего парал.}}$

Получаем $\frac{V_{OABB_1A_1}}{V_{OABCD}} = 2$ ∎

б) ① $S_{ABCD} = S_1 = 1 \cdot 4 = 4$

② $AC = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

$A_1C = \sqrt{81 - 17} = 8$

$V_{\text{всего пар.}} = 4 \cdot 8 = 32$

$V_{OABB_1A_1} = \frac{1}{3} \cdot 32 = \frac{32}{3}$

Ответ: $\frac{32}{3}$

Ответ: $\frac{32}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 3

15 Решите неравенство $\log_5^2(25-x^2)-3\log_5(25-x^2)+2\geq 0$.

B1AD67

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2022
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Досрочная волна 2017
Досрочная волна 2015

ФСУ	
1	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
2	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
4	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
5	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
6	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
7	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Пусть $\log_5(25-x^2)=t$

$t^2-3t+2\geq 0$

$1 \quad 2 \quad t$

$\left[\begin{array}{l} t\leq 1\\ t\geq 2\end{array}\right.$

$\log_5(25-x^2)\leq\log_5 5$

$0<25-x^2\leq 5$

$\left\{\begin{array}{l} ①\ 25-x^2>0\\ ②\ 25-x^2\leq 5\end{array}\right.$

① $25-x^2>0$

$(5-x)(5+x)>0$

$-5 \quad 5 \quad x$

② $20-x^2\leq 0$

$(\sqrt{20}-x)(\sqrt{20}+x)\leq 0$

$-\sqrt{20} \quad \sqrt{20} \quad x$

Найдём пересечение ① и ②:

$-5 \quad -2\sqrt5 \quad 2\sqrt5 \quad 5 \quad x$

$(-5;-2\sqrt5]\cup[2\sqrt5;5)$

$\log_5(25-x^2)\geq\log_5 25$

$25-x^2\geq 25$

$0\geq x^2$

$x^2\leq 0$

$x=0$

Объединим:

$-5 \quad -2\sqrt5 \quad 0 \quad 2\sqrt5 \quad 5 \quad x$

Ответ: $(-5;-2\sqrt5]\cup\{0\}\cup[2\sqrt5;5)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ	1

получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Олег переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 250 рублей, то за 2 года. Найдите a.

ИСТОЧНИКИ

Ященко 2018 (20 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Ященко 2018 (36 вар)
Основная волна 2017

Пусть S – сумма долга

$x=328\,050$

$y=587\,250$

$\left(1+\frac{a}{100}\right)=b$

1 января – день платежа

Кредит на 4 года

Дата	Сумма долга
31 дек 14	S
31 дек 15	$S\cdot b$
1 янв 16	$S\cdot b-x$
31 дек 16	$S\cdot b^2-x\cdot b$
1 я 17	$S\cdot b^2-x\cdot b-x$
31 д 17	$S\cdot b^3-x\cdot b^2-x\cdot b$
1 я 18	$S\cdot b^3-x\cdot b^2-x\cdot b-x$
31 д 18	$S\cdot b^4-x\cdot b^3-x\cdot b^2-x\cdot b$
1 я	$S\cdot b^4-x\cdot b^3-x\cdot b^2-x\cdot b-x=0$

Дата	Сумма долга
31 дек 14	S
31 дек 15	$S\cdot b$
1 янв 16	$S\cdot b-y$
31 дек 16	$Sb^2-y\cdot b$
1 янв 17	$Sb^2-yb-y=0$

$\left\{\begin{array}{l} ①\ S\cdot b^4-x\cdot b^3-xb^2-xb-x=0\\ ②\ S\cdot b^2-y\cdot b-y=0\end{array}\right.$

Выразим $S\cdot b^2$ из ур-я ②

$S\cdot b^2=y\cdot b+y$

Подставим Sb^2 в ур-е ①

① $(y\cdot b+y)\cdot b^2-x\cdot b^3-x\cdot b^2-xb-x=0$

$y\cdot b^3+y\cdot b^2-x\cdot b^3-x\cdot b^2-xb-x=0$

$yb^2\cdot(b+1)-xb^2\cdot(b+1)-x\cdot(b+1)=0$

$(b+1)\cdot(yb^2-xb^2-x)=0$

$b+1=0$

$b=-1$

Пост корень

$yb^2-xb^2=x$

$b^2\cdot(y-x)=x$

$b^2=\frac{x}{y-x}$

$b^2=\frac{328050}{259200}=\frac{6561}{5184}=\frac{729}{576}$

$b=\frac{27}{24}$ $\quad$ $b=-\frac{27}{24}$, пост. кор.

$1+\frac{a}{100}=\frac{27}{24}$

$\frac{a}{100}=\frac{3}{24}$

$a=\frac{3\cdot 100}{24}=12{,}5\%$

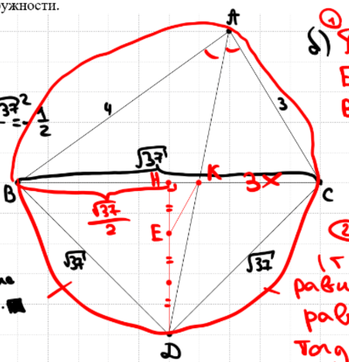
Ответ: 12,5

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

17 Дан треугольник ABC. Известно, что $BC = \sqrt{37}$, $AB = 4$, $AC = 3$. На стороне BC построен равносторонний треугольник BDC, при этом точки A и D лежат по разные стороны от прямой BC.

а) Докажите, что вокруг полученного четырёхугольника $ABDC$ можно описать окружность.

б) Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDC$ до центра его описанной окружности.



а) $\triangle ABC$:

по т. cos:

$\cos A = \frac{4^2+3^2-\sqrt{37}^2}{2\cdot 4\cdot 3} = -\frac{1}{2}$

$\angle A = 120^\circ$

$\angle A + \angle D = 180^\circ$

значит около $ABDC$ можно описать окр. ■

б) ① Пусть DH – высота $\triangle BDC$

E – центр опис. окр.

$BC \cap AD = K$

EK – ?

② $\smile BD = \smile CD$

(т.к. $BD = \sqrt{37} = CD$)

равные хорды стягивают равные дуги

Тогда $\angle BAD = \angle CAD$

AK – бисс. $\triangle ABC$

по т. о бисс:

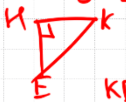
$\frac{BK}{CK} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{3}$

$BK = 4x$ $\quad BK = \frac{4}{7}BC = \frac{4}{7}\sqrt{37}$

$CK = 3x$ $\quad CK = \frac{3}{7}\sqrt{37}$

$HK = \sqrt{37} - \frac{1}{2}\sqrt{37} - \frac{3}{7}\sqrt{37} = \frac{1}{14}\sqrt{37}$

$KE = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{37} = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{37}$



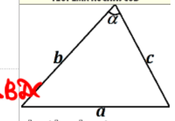
$KE = \sqrt{\frac{37}{196} + \frac{3\cdot 37}{36}} = \frac{\sqrt{481}}{7\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{\sqrt{481}}{7\sqrt{3}}$

ИСТОЧНИКИ

Основная волна (Резерв) 2023

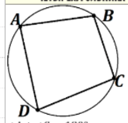
ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

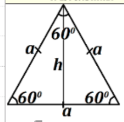
СВОЙСТВО ВПИСАННОГО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА



$\angle A + \angle C = 180^\circ$

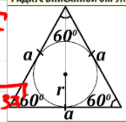
$\angle B + \angle D = 180^\circ$

ВЫСОТА РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА



$h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

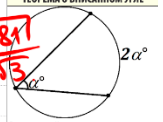
РАДИУС ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ



1 $r = \frac{\sqrt{3}\cdot a}{6}$

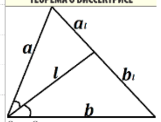
2 $r = \frac{1}{3}\cdot h$

ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ



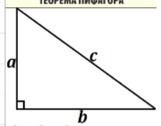
Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается

ТЕОРЕМА О БИССЕКТРИСЕ



$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



$c^2 = a^2 + b^2$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2020
Основная волна (резерв) 2013

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - a^2 = 0 \\ x^2 + 8x + 16 - a^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x-a)(3x+a) = 0 \\ (x+4)^2 - a^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x - a = 0 \\ 3x + a = 0 \end{array}\right. \\ x + 4 - a \neq 0 \\ x + 4 + a \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{a}{3} \\ x = -\frac{a}{3} \end{array}\right. \\ x \neq a - 4 \\ x \neq -a - 4 \end{cases}$$

$x = \frac{a}{3}$ и $x = -\frac{a}{3}$ должны быть различны

$\frac{a}{3} \neq -\frac{a}{3}$

$\frac{2a}{3} \neq 0$

$a \neq 0$

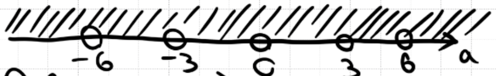
$x = \frac{a}{3}$ не должен быть равен $a-4$, $-a-4$

$$\begin{cases} \frac{a}{3} \neq a - 4 \\ \frac{a}{3} \neq -a - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3}a \neq 4 \\ \frac{4}{3}a \neq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} a \neq 6 \\ a \neq -3 \end{cases}$$

$x = -\frac{a}{3}$ не должен быть равен $a-4$, $-a-4$

$$\begin{cases} -\frac{a}{3} \neq a - 4 \\ -\frac{a}{3} \neq -a - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4}{3}a \neq 4 \\ \frac{2}{3}a \neq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} a \neq 3 \\ a \neq -6 \end{cases}$$

Найдём пересечение:



Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-6; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 6) \cup (6; +\infty)$

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Источники:

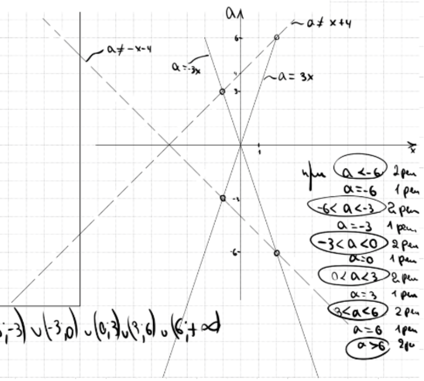
Досрочная волна 2020
Основная волна (резерв) 2013

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - a^2 = 0 \\ x^2 + 8x + 16 - a^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x-a)(3x+a) = 0 \\ (x+4)^2 - a^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 3x \\ a = -3x \end{array}\right. \\ (x+4-a)(x+4+a) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 3x \\ a = -3x \end{array}\right. \\ a \neq x + 4 \\ a \neq -x - 4 \end{cases}$$



при $a < -6$ 2 реш
$a = -6$ 1 реш
$-6 < a < -3$ 2 реш
$a = -3$ 1 реш
$-3 < a < 0$ 2 реш
$a = 0$ 1 реш
$0 < a < 3$ 2 реш
$a = 3$ 1 реш
$3 < a < 6$ 2 реш
$a = 6$ 1 реш
$a > 6$ 2 реш

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-6; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 6) \cup (6; +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 3

19 На доске написано 12 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое семи наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 16.

а) Может ли наибольшее из этих двенадцати чисел равняться 18?
б) Может ли среднее арифметическое всех двенадцати чисел равняться 11?
в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех двенадцати чисел.

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Демо 2021
Основная волна 2018
Ященко 2022 (36 вар)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)

а) ① Пусть

$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6<a_7<a_8<a_9<a_{10}<a_{11}<a_{12}$
$\le 7 \quad \le 8 \quad \le 9 \quad \le 10 \quad \le 11 \quad \le 12 \quad \le 13 \quad \le 14 \quad \le 15 \quad \le 16 \quad \le 17 \quad = 18$

② $Ср.ар.семи_{наим} \le \frac{7+8+9+10+11+12+13}{7} \le 10$ ✓

$Ср.ар.семи_{наиб.} \le \frac{12+13+14+15+16+17+18}{7} \le 15$

Значит $Ср.ар.семи_{наиб} \ne 16$

Ответ: а) нет.

б) ① $Ср.ар. = \frac{Сумма\ всех\ 12}{12} = 11$

Значит Сумма 12-ти чисел равна 132

$132-112=20$ $\quad 7\cdot 16=112$

② $\underbrace{a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7}_{7\cdot 8=56}\ \underbrace{a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}}_{132-56=76}$

Получаем, что $a_6+a_7=56-20=36$
$a_6+a_7=112-76=36$

Заметим, что $a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}>2{,}5\cdot(a_6+a_7)$

$76>2{,}5\cdot 36$
$76>90$

НО $76<90$, т.е. $a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}$ оказалось меньше, чем $2{,}5\cdot(a_6+a_7)$, что невозмож.

Ответ: б) нет

19 На доске написано 12 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое семи наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 16.

а) Может ли наибольшее из этих двенадцати чисел равняться 18?
б) Может ли среднее арифметическое всех двенадцати чисел равняться 11?
в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех двенадцати чисел.

в) ① $Ср.ар._{наим.}$ – ?
$Сумма\ чисел_{наим}$ – ?

Пусть S – сумма всех 12-ти чисел
Тогда

$\overbrace{a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5}^{S-112}\ \overbrace{a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}}^{7\cdot 16=112}$

$\underbrace{a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7}_{7\cdot 8=56}\ \underbrace{a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}}_{S-56}$

Получаем, что
$a_6+a_7=S-(S-112)-(S-56)$
$a_6+a_7=168-S$
$S=168-(a_6+a_7)$
S будет наименьшей при наибольшем возможном значении a_6+a_7

② Найдём $(a_6+a_7)_{наиб}$:

$a_8-a_7\ge 1$ $\quad a_8-a_6\ge 2$
$a_9-a_7\ge 2$ $\quad a_9-a_6\ge 3$
$a_{10}-a_7\ge 3$ $\quad + \quad a_{10}-a_6\ge 4$
$a_{11}-a_7\ge 4$ $\quad a_{11}-a_6\ge 5$
$a_{12}-a_7\ge 5$ $\quad a_{12}-a_6\ge 6$

$2a_8+2a_9+2a_{10}+2a_{11}+2a_{12}-5\cdot a_6-5\cdot a_7\ge 35$
$5(a_6+a_7)\le 2\cdot(a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12})-35 \quad |+2a_6+2a_7$
$7(a_6+a_7)\le 2\cdot(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12})-35$
$7\cdot(a_6+a_7)\le 2\cdot 112-35$
$a_6+a_7\le 27$
Получаем
$S\ge 168-27$
$S\ge 141$
Получаем
$Ср.ар.\ge \frac{141}{12}$
$Ср.ар.\ge 11{,}75$

③ Покажем, что $Ср.ар.=11{,}75$ может быть
$S=141$
$a_6+a_7=27$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
1	2	3	11	12	13	14	15	16	17	18	19

$\underbrace{1\ 2\ 3\ 11\ 12}_{56-27=29}$

Ответ: в) 11,75.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 3