Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ
Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8.

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

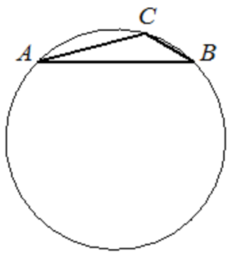
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Составитель: Школа Пифагора

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 В треугольнике ABC сторона AB равна $3\sqrt{2}$, угол C равен $135°$. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

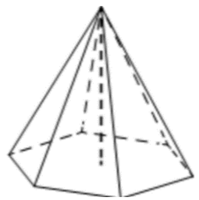


Ответ: ____________________________.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(3; 4)$ и $\vec{b}\,(-4; -3)$. Найдите косинус угла между ними.

Ответ: ____________________________.

3 В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно 6,5, а сторона основания равна 2,5. Найдите высоту пирамиды.



Ответ: ____________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 2

4 Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Ответ: ___________________________.

5 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,06. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: ___________________________.

6 Найдите корень уравнения

$\log_{81} 3^{2x-6} = 2.$

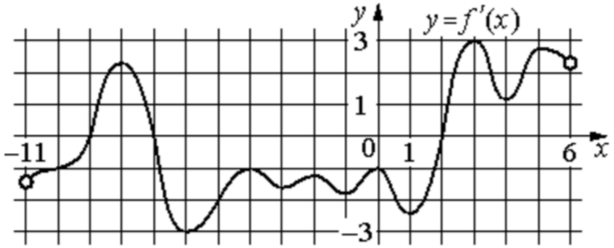
Ответ: ___________________________.

7 Найдите значение выражения

$4\log_{1,25} 5 \cdot \log_5 0{,}8.$

Ответ: ___________________________.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-11; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 4]$.



Ответ: ___________________________.

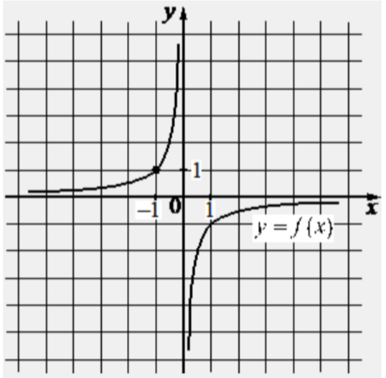
9 Наблюдатель находится на высоте h, выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км – радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 64 километра? Ответ дайте в метрах.

Ответ: ___________________________.

10 Баржа в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 4 часа, баржа отправилась назад и вернулась в пункт А в 22:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 8 км/ч.

Ответ: ___________________________.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции

$y = e^{2x} - 4e^{x} + 4$ на отрезке $[-1; 2]$.

Ответ: ___________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$\log_3(x^2 - 24x) = 4.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_2 0{,}1\,;\,12\sqrt{5}\right]$.

14 В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 3$ и диагональю $BD = 5$. Все боковые рёбра пирамиды равны 3. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 2$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.
б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

15 Решите неравенство

$$27 \cdot 45^x - 27^{x+1} - 12 \cdot 15^x + 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \leq 0.$$

16 Борис является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий.

Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Борис платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, - 200 рублей.

Борису нужно каждую неделю производить 70 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

17 Боковые стороны AB и AC равнобедренного треугольника ABC вдвое больше основания BC. На боковых сторонах AB и AC отложены отрезки AP и CQ соответственно, равные четверти этих сторон.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная его основанию, делится прямой PQ в отношении 1:3.
б) Найдите длину отрезка прямой PQ, заключенного внутри вписанной окружности треугольника ABC, если $BC = 4\sqrt{19}$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-2x} = a - 7|x|$$

имеет более двух корней.

19 Маша и Наташа делали фотографии в течение некоторого количества подряд идущих дней. В первый день Маша сделала m фотографий, а Наташа – n фотографий. В каждый следующий день каждая из девочек делала на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. Известно, что Наташа за всё время сделала суммарно на 1001 фотографию больше, чем Маша, и что фотографировали они больше одного дня.

а) Могли ли они фотографировать в течение 7 дней?
б) Могли ли они фотографировать в течение 8 дней?
в) Какое наибольшее суммарное число фотографий могла сделать Наташа за все дни фотографирования, если известно, что в последний день Маша сделала меньше 40 фотографий?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 2

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике (профиль) Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	3	
2	-0,96	
3	6	
4	0,08	
5	0,069	
6	7	
7	-4	
8	1	
9	320	
10	2	
11	-0,1	
12	0	
13	а) $27;\ -3$ б) -3	
14	$\frac{3\sqrt{11}}{10}$	
15	$(-\infty;-2]\cup[-1;0]$	
16	700000	
17	3	
18	$\left[\frac{7}{2};\frac{25}{7}\right)$	
19	а) да б) нет в) 1430	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 2

13 а) Решите уравнение

$$\log_3(x^2 - 24x) = 4.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_2 0{,}1\,;\,12\sqrt{5}]$.

ИСТОЧНИКИ
Основная волна (Резерв) 2017
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГАРИФМА
Если $\log_a b = c$, то $a^c = b$

а) $3^4 = x^2 - 24\cdot x$

$x^2 - 24\cdot x - 81 = 0$

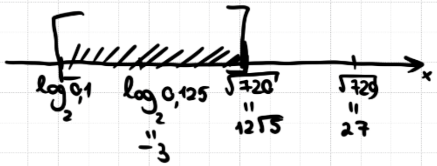
$x = 27 \qquad x = -3$

б) $27 = \log_2 2^{27} = \sqrt{729}$

$12\sqrt{5} = \sqrt{144}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{720}$

$-3 = \log_2 2^{-3} = \log_2 0{,}125$

Получаем



$-3 \in [\log_2 0{,}1\,;\,12\sqrt{5}]$

$27 \notin [\log_2 0{,}1\,;\,12\sqrt{5}]$

Ответ: а) -3; 27
б) -3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 3$ и диагональю $BD = 5$. Все боковые рёбра пирамиды равны 3. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AS – точка F так, что $SF = BE = 2$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

ИСТОЧНИКИ

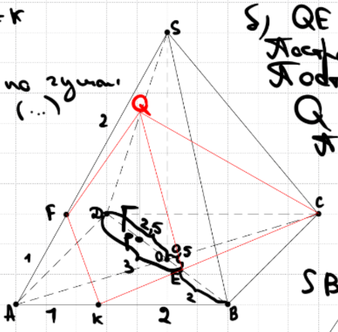
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2022 (50 вар)
Ященко 2022 (14 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2019 (50 вар)
СтатГрад 22.04.2020
СтатГрад 19.04.2019
СтатГрад 21.04.2017

а) Пусть $CE \cap AB = K$

Построим FK

① $\triangle CDE \sim \triangle BEK$ по 2 углам (...)

$\frac{3}{BK} = \frac{3}{2}$ $BK=2$ $AK=1$



② $\triangle AFK \sim \triangle ASB$ по 2 пропорц. и углу между ними

значит $FK \parallel SB$

$SB \parallel (CEF)$ ■

б) $QE \parallel SB$

Построим FQ

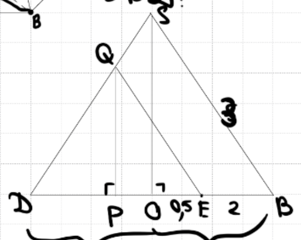
Построим QC

$QCKF$ – сеч.

Пусть P – осн. перпенд. из точки Q на пл. осн.

QP – ?

SBD:



$SO = \sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$

$\triangle SBD \sim \triangle DQE$

$k = \frac{3}{5}$

$PQ = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{10}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{11}}{10}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15 Решите неравенство
$27 \cdot 45^x - 27^{x+1} - 12 \cdot 15^x + 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \le 0.$

ИСТОЧНИКИ

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2020

СТЕПЕНИ	
1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2	$a^n : a^m = a^{n-m}$
3	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
4	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
6	$a^0 = 1$
7	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
8	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ	
БЫЛО	СТАЛО
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$27 \cdot 45^x - 27 \cdot 27^x - 12 \cdot 15^x + 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \le 0$

$27 \cdot 9^x \cdot (5^x - 3^x) - 12 \cdot 3^x \cdot (5^x - 3^x) + 1 \cdot (5^x - 3^x) \le 0$

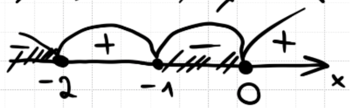
$(5^x - 3^x) \cdot (27 \cdot 9^x - 12 \cdot 3^x + 1) \le 0$

$(5^x - 3^x) \cdot 27 \cdot \left(3^x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(3^x - \frac{1}{9}\right) \le 0 \quad \Big| :27, :3^x$

$\left(\left(\frac{5}{3}\right)^x - 1\right) \cdot \left(3^x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(3^x - \frac{1}{9}\right) \le 0$

$\left(\left(\frac{5}{3}\right)^x - \left(\frac{5}{3}\right)^0\right) \cdot \left(3^x - 3^{-1}\right) \cdot \left(3^x - 3^{-2}\right) \le 0$

$\cancel{\left(\frac{5}{3} - 1\right)} \cdot (x - 0) \cdot \cancel{(3 - 1)} \cdot (x + 1) \cdot \cancel{(3 - 1)} \cdot (x + 2) \le 0$



Ответ: $(-\infty; -2] \cup [-1; 0]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 2

16 Борис является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий.

Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Борис платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, - 200 рублей.

Борису нужно каждую неделю производить 70 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

	часы	единицы товара (шт.)
I з.	x^2	x
II з.	y^2	y

① Кол-во ед. тов.: $\boxed{70 = x+y}$

Выразим y:

$y = 70 - x$, где $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ 70 - x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 70 \end{cases}$

② $500 \cdot x^2 + 200 \cdot y^2$ Сумма денег на оплату труда рабочих

$f(x) = 500x^2 + 200 \cdot (70-x)^2$

Найдём наим. знач. ф-ции:

$f(x) = 500x^2 + 200\cdot(4900 - 140x + x^2) =$
$= 500x^2 + 980000 - 28000 \cdot x + 200x^2 =$
$= 700x^2 - 28000 \cdot x + 980000$

$f'(x) = 700 \cdot 2x - 28000 = 0$

$x = \frac{\cancel{28000}}{\cancel{1400}} = 20$

$y_{наим} = y(20) = 500 \cdot 20^2 + 200 \cdot 50^2 =$
$= 500 \cdot 400 + 200 \cdot 2500 =$
$= 200000 + 500000 =$
$= 700000$ р.

Ответ: 700000 р.

ИСТОЧНИКИ

Основная волна (Резерв) 2017

	ПРОИЗВОДНЫЕ
1	$C' = 0$
2	$x' = 1$
3	$(Cx)' = C$
4	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
5	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
7	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
8	$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
9	$(\sin x)' = \cos x$
10	$(\cos x)' = -\sin x$
11	$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(e^x)' = e^x$
14	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
15	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
16	$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

17 Боковые стороны AB и AC равнобедренного треугольника ABC вдвое больше основания BC. На боковых сторонах AB и AC отложены отрезки AP и CQ соответственно, равные четверти этих сторон.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная его основанию, делится прямой PQ в отношении 1:3.

б) Найдите длину отрезка прямой PQ, заключенного внутри вписанной окружности треугольника ABC, если $BC = 4\sqrt{19}$.

а) Пусть MN – ср. линия

$AL = LN = NQ = CQ = x$

$AP = PM = ME = BE = x$

Тогда $AB = 4x$

$BC = 2x$

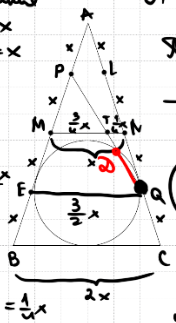
$MN = \frac{1}{2}BC = x$ (ср. линия)

$EQ = \frac{MN + BC}{2} = \frac{x + 2x}{2} = \frac{3}{2}x$ (ср. лин. трап.)

$MT = \frac{1}{2}EQ = \frac{3}{4}x$ (ср. лин.)

Тогда $TN = x - \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x$

Получаем $\frac{TN}{MT} = \frac{\frac{1}{4}x}{\frac{3}{4}x} = \frac{1}{3}$ ■



б) ① $2x = 4\sqrt{19}$

$x = 2\sqrt{19}$

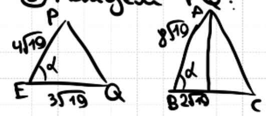
Пусть т. D – т. пересеч. PQ и окр.

по т. о кас. и сек.

$PE^2 = PD \cdot PQ$

$PE = 4\sqrt{19}$, $PQ = 19$

② Найдём PQ.



$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{19}}{8\sqrt{19}} = \frac{1}{4}$

по т. cos:

$PQ = \sqrt{16 \cdot 19 + 9 \cdot 19 - 2 \cdot 12 \cdot 19 \cdot \frac{1}{4}}$
$= 19$

$PD = \frac{16 \cdot \cancel{19}}{\cancel{19}} = 16$

$DQ = 19 - 16 = 3$

Ответ: 3.

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2018

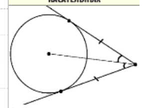
СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

- Лежит на серединах сторон
- Параллельна основанию
- Равна половине основания

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРАПЕЦИИ

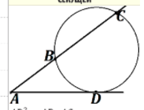
- Лежит на серединах сторон
- Параллельна основаниям
- Равна полусумме оснований

СВОЙСТВО ОТРЕЗКОВ КАСАТЕЛЬНЫХ



Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

ТЕОРЕМА О КАСАТЕЛЬНОЙ И СЕКУЩЕЙ



$AD^2 = AB \cdot AC$

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-2x} = a - 7|x|$$

имеет более двух корней.

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
Основная волна (Резерв) 2012

$\sqrt{1-2x} + 7|x| = a$

ОДЗ: $1-2x \geq 0$
$2x \leq 1$
$x \leq \frac{1}{2}$

Пусть $f(x) = \sqrt{1-2x} + 7|x|$

Если $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

$f(x) = \sqrt{1-2x} + 7x$

$f'(x) = \frac{1\cdot(-2)}{2\sqrt{1-2x}} + 7 = 0$

$\frac{-2 + 14\sqrt{1-2x}}{2\sqrt{1-2x}} = 0$

$\frac{7\sqrt{1-2x} - 1}{\sqrt{1-2x}} = 0$

$7\sqrt{1-2x} = 1$

$\sqrt{1-2x} = \frac{1}{7}$

$1-2x = \frac{1}{49}$

$2x = \frac{48}{49}$

$x = \frac{24}{49}$

x	0	$\frac{24}{49}$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	1	$\frac{25}{7}$	$3{,}5$

Если $x < 0$

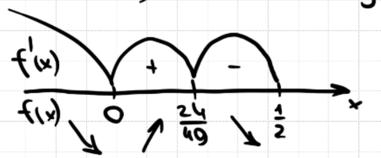
$f(x) = \sqrt{1-2x} - 7x$

$f'(x) = \frac{1\cdot(-2)}{2\sqrt{1-2x}} - 7 = 0$

$-\frac{1}{\sqrt{1-2x}} = 7$

$\sqrt{1-2x} = -\frac{1}{7}$ нет реш.

$f(x) = \sqrt{1-2x} - 7x$ убывает при $x<0$

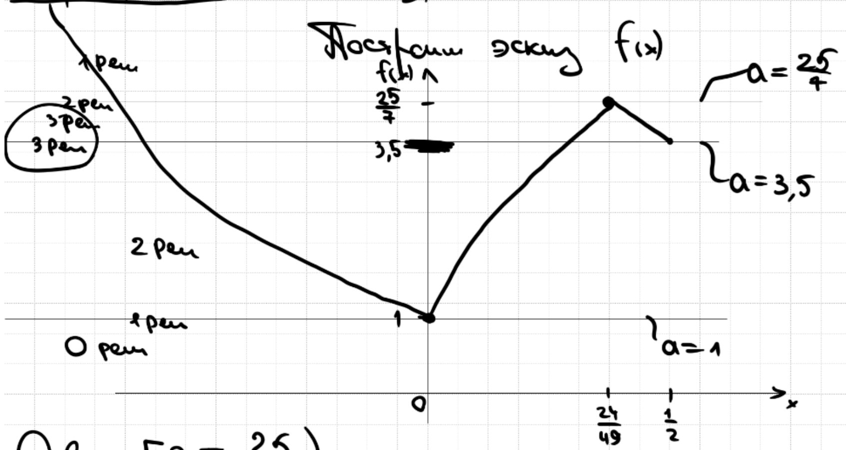


$f(0) = 1$

$f\left(\frac{24}{49}\right) = \sqrt{1-2\cdot\frac{24}{49}} + 7\left|\frac{24}{49}\right| = \frac{1}{7} + \frac{24}{7} = \frac{25}{7}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3{,}5$

Построим эскиз $f(x)$



Ответ: $\left[3{,}5; \frac{25}{7}\right)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 2

19 Маша и Наташа делали фотографии в течение некоторого количества подряд идущих дней. В первый день Маша сделала m фотографий, а Наташа – n фотографий. В каждый следующий день каждая из девочек делала на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. Известно, что Наташа за всё время сделала суммарно на 1001 фотографию больше, чем Маша, и что фотографировали они больше одного дня.

а) Могли ли они фотографировать в течение 7 дней?
б) Могли ли они фотографировать в течение 8 дней?
в) Какое наибольшее суммарное число фотографий могла сделать Наташа за все дни фотографирования, если известно, что в последний день Маша сделала меньше 40 фотографий?

ИСТОЧНИКИ
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна 2017

а)

	1	2	3	4	5	6	7
Маша	m	$m+1$	$m+2$	$m+3$	$m+4$	$m+5$	$m+6$
Наташа	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$n+5$	$n+6$

$7n+21-(7m+21)=1001$

$7n+\cancel{21}-7m-\cancel{21}=1001 \quad |:7$

n [redacted] $m = 143$

Ответ: а) да, например, если Маша сделала 1 фото в перв. день, Наташа 144 фото в перв. день.

б) $8n+28-(8m+28)=1001$

$8n+\cancel{28}-8m-\cancel{28}=1001$

$n-m=\frac{1001}{8}$

$n-m$ получается нецелым, что противоречит условию.

Ответ: б) нет.

Маша и Наташа делали фотографии в течение некоторого количества подряд идущих дней. В первый день Маша сделала m фотографий, а Наташа – n фотографий. В каждый следующий день каждая из девочек делала на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. Известно, что Наташа за всё время сделала суммарно на 1001 фотографию больше, чем Маша, и что фотографировали они больше одного дня.

а) Могли ли они фотографировать в течение 7 дней?
б) Могли ли они фотографировать в течение 8 дней?
в) Какое наибольшее суммарное число фотографий могла сделать Наташа за все дни фотографирования, если известно, что в последний день Маша сделала меньше 40 фотографий?

в) 1 Пусть k – кол-во дней, когда они фотографировались

$k \cdot n - k \cdot m = 1001$

$k \cdot (n-m) = 1001$

значит 1001 должно делиться на k без остатка

2 $(m+k-1)$ – это кол-во Машиных фото в посл. k-й день

$m+k-1<40$

$m+k<41$

учитывая, что $m \geq 1$, получаем $k<40$

т.е. $k \leq 39$

3 $k \leq 39$ и k – делитель 1001

$k=7$ или $k=11$ или $k=13$

Тогда
$m+7<41$
$m<34$
$m \leq 33$
Тогда наиб. общее кол-во фото Маши $= \frac{33+33+6}{2} \cdot 7 = 36 \cdot 7 = 252$

Тогда ... $= 252 + 1001 = 1253$

$m+11<41$
$m<30$
$m \leq 29$
Тогда ...М $= \frac{29+29+10}{2} \cdot 11 = 374$
...Н... $= 1375$

$m+13<41$
$m<28$
$m \leq 27$
$М = \frac{27+27+12}{2} \cdot 13 = 429$

$\boxed{Н = 1430}$

Ответ: в) 1430.

Составитель: Школа Пифагора

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4