САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

РАЙОННЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

16 ноября 2024 г. I тур 11 класс 1 вариант

1. Каждое из 170 натуральных чисел равно сумме чисел, обратных к 169 остальным. Найдите эти числа. (Укажите все варианты и докажите, что других нет.)

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота BH, биссектриса BL и медиана BM (точки A, H, L, M, C расположены на прямой именно в таком порядке). Оказалось, что $MH = 1$ и радиус описанной окружности треугольника равен 2. Найдите угол $\angle ALB$.

3. На доске написано чётное количество различных вещественных чисел. Дима, Витя и Саша разбили числа на пары (каждый по-своему, разные мальчики не могли выбрать одну и ту же пару), после чего перемножили числа в парах. Каждое из полученных произведений оказалось равно 2023, 2024 или 2025. Докажите, что кто-то из мальчиков ошибся.

4. Сумма целых чисел a и b не равна 1. Известно, что число $n^2-2an-b$ не делится на $a+b-1$ ни при каком целом n. Докажите, что квадратный трехчлен $x^2 - 2bx - a$ не имеет целых корней.

5. Куб со стороной $2^{1\,000\,000}$ разбит на единичные кубики. В каждом кубике написана цифра 0, 1 или 2. Назовем строку из цифр 0, 1 и 2 *хорошей*, если ее можно получить, начав с некоторого кубика и переходя на каждом шагу к соседнему (по грани) кубику. Например, строка 0102 хорошая, если можно из кубика с цифрой 0 попасть в кубик с цифрой 1, из него — в кубик с нулем (возможно, начальный), а из него — в кубик с двойкой.

Оказалось, что любая строка длины не более 10 000 — хорошая. Один из кубиков удалили, из-за чего некоторые строки перестали быть хорошими. Докажите, что осталось не менее $2 \cdot 6^{1012} - 2^{2024}$ хороших строк длины 2024.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите Фамилия, имя, отчество; дата рождения; телефон; класс, школа, район школы;
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и olymp.academtalant.ru

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

РАЙОННЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

16 ноября 2024 г. I тур 11 класс 2 вариант

1. Каждое из 290 натуральных чисел равно сумме чисел, обратных к 289 остальным. Найдите эти числа. (Укажите все варианты и докажите, что других нет.)

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высота CD, биссектриса CE и медиана CF (точки B, D, E, F, A расположены на прямой именно в таком порядке). Оказалось, что $DF = \sqrt{2}$ и радиус описанной окружности треугольника равен 2. Найдите угол $\angle AEC$.

3. На доске написано чётное количество различных вещественных чисел. Вика, Катя и Наташа разбили эти числа на пары (каждая своим способом, разные девочки не могли выбрать одну и ту же пару), после чего сложили числа в парах. Каждая из полученных сумм оказалась равна 2024, 2025 или 2026. Докажите, что как минимум одна из девочек ошиблась.

4. Сумма целых чисел a и b не равна -1. Известно, что квадратный трехчлен $x^2 + 2ax + b$ имеет целый корень. Докажите, что при некотором целом n число $n^2 + 2bn + a$ делится на $a + b + 1$.

5. Куб со стороной $2^{100\,000}$ разбит на единичные кубики. В каждом кубике написана буква А, Б или В. Назовем слово из букв А, Б и В *интересным*, если можно получить это слово, начав с некоторого кубика и переходя на каждом шагу к соседнему (по грани) кубику. Например, слово АБАВ интересное, если можно из кубика с буквой А попасть в кубик с буквой Б, из него — в кубик с буквой А (возможно, начальный), а из него — в кубик с буквой В.

Оказалось, что любое слово из не более чем 10 000 букв А, Б и В — интересное. Один из кубиков удалили, из-за чего некоторые слова перестали быть интересными. Докажите, что осталось не менее $2 \cdot 6^{1013} - 2^{2026}$ интересных слов из 2026 букв.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите Фамилия, имя, отчество; дата рождения; телефон; класс, школа, район школы;
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и olymp.academtalant.ru

Критерии проверки работ 11 класса

Каждая задача оценивалась из 2 баллов.

Граница прохода на региональную олимпиаду и на городскую олимпиаду — 4 балла.

Показ работ 11 класса будет производиться в четверг, 19 декабря, в 17:00 в ФМЛ 239 (старший корпус).

1. Задача решена в предположении, что все числа равны: 0 баллов.

Доказано, что все числа равны либо a, либо $1/a$ для некоторого a: 1 балл.

2. Ответ должен быть выражен в градусах.

Если ответ верно приведен к виду обратной тригонометрической функции от несложного (с точки зрения жюри!) выражения (например $\mathrm{arctg}(2+\sqrt{3})$ в первом варианте): 1 балл. Если после этого без доказательства утверждается, что это выражение равно нужному числу градусов (75° в первом варианте, $112{,}5^\circ$ во втором): всё равно 1 балл.

Если выражение, к которому сведен ответ с точки зрения жюри является слишком громоздким, то решение оценивается в 0 баллов, даже если далее указано (но не доказано), чему этот ответ равен в градусах.

Правильно вычислен $\angle HBO$ ($\angle DCO$), где O — центр описанной окружности: 1 балл (не суммируется с баллами за другие критерии).

3. Доказательство проходит только для целых чисел: 0 баллов.

Решение верно в случае, если все числа положительны, но использует переходы, которые могут оказаться некорректными, если среди чисел могут быть отрицательные: 1 балл.

4. Только утверждение о том, что дискриминант квадратного трехчлена с целыми коэффициентами, имеющего целый корень, является точным квадратом: 0 баллов.

5. Сформулировано, но не доказано, что подходят все строки, в которых цифра (во втором варианте – буква), написанная на удаленном кубике, находится только на позициях одной четности. При этом, подсчитано количество таких строк и доказано, что оно совпадает с числом, указанным в условии: 1 балл.

Критерии проверки работ 11 класса

Каждая задача оценивалась из 2 баллов.

Граница прохода на региональную олимпиаду и на городскую олимпиаду — 4 балла.

Показ работ 11 класса будет производиться в четверг, 19 декабря, в 17:00 в ФМЛ 239 (старший корпус).

1. Задача решена в предположении, что все числа равны: 0 баллов.

Доказано, что все числа равны либо a, либо $1/a$ для некоторого a: 1 балл.

2. Ответ должен быть выражен в градусах.

Если ответ верно приведен к виду обратной тригонометрической функции от несложного (с точки зрения жюри!) выражения (например $\mathrm{arctg}(2+\sqrt{3})$ в первом варианте): 1 балл. Если после этого без доказательства утверждается, что это выражение равно нужному числу градусов (75° в первом варианте, $112{,}5^\circ$ во втором): всё равно 1 балл.

Если выражение, к которому сведен ответ с точки зрения жюри является слишком громоздким, то решение оценивается в 0 баллов, даже если далее указано (но не доказано), чему этот ответ равен в градусах.

Правильно вычислен $\angle HBO$ ($\angle DCO$), где O — центр описанной окружности: 1 балл (не суммируется с баллами за другие критерии).

3. Доказательство проходит только для целых чисел: 0 баллов.

Решение верно в случае, если все числа положительны, но использует переходы, которые могут оказаться некорректными, если среди чисел могут быть отрицательные: 1 балл.

4. Только утверждение о том, что дискриминант квадратного трехчлена с целыми коэффициентами, имеющего целый корень, является точным квадратом: 0 баллов.

5. Сформулировано, но не доказано, что подходят все строки, в которых цифра (во втором варианте – буква), написанная на удаленном кубике, находится только на позициях одной четности. При этом, подсчитано количество таких строк и доказано, что оно совпадает с числом, указанным в условии: 1 балл.