

Олимпиада Росатом, математика, заключительный тур, 09.02.2025, 7 класс

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б – Неверные рассуждения.

1 б – Попытки анализа зачеркивания точек при различных вариантах их раскрашивания, ответ не получен.

2 б -- Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б – Задача решена верно.

Задача 2:

0 б – Нет правильного набора слагаемых, продвижение в решении несущественно.

1 б – Верно найдены числа, в десятичной записи которых нет нулей, дальнейших продвижений нет.

2 б – Верное завершённое решение с арифметической ошибкой.

3 б - Задача решена верно.

Задача 3:

0 б – Сделаны некоторые предположения по решению задачи.

1 б – Предложен верный алгоритм отрезания одной трапеции, дальнейших продвижений нет.

2 б – Предложен верный алгоритм отрезания нескольких трапеций, когда остается выпуклый четырехугольник.

3 б - Задача решена верно.

Задача 4:

0 б -Сделаны безуспешные попытки поиска числа.

1 б - Найдена некоторая зависимость между количеством девяток квадрата числа и самим числом, дальнейших продвижений нет.

2 б - Задача решена с одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения, или есть мелкие недочеты.

3 б - Задача решена верно.

Задача 5:

0 б -Нарисован чертёж.

1 б – Установлено, в каком отношении находятся площади смежных треугольников; дальнейших продвижений в решении нет.

2 б - Задача решена с мелкими недочетами или одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б - Задача решена верно.

**Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика, 7 класс**

Вариант 1.

1. Петя отметил на окружности 44 точки: 20 желтым карандашом и 24 – зеленым. Немного подумав, он зачеркнул те точки, соседи которых либо желтого цвета, либо разного, но слева – желтого. Сколько точек зачеркнул Петя?
2. Число 1000 представлено в виде произведения двух натуральных чисел, в десятичной записи которых нет нулей. Найти сумму этих чисел.
3. Как разрезать произвольный выпуклый пятиугольник на не более, чем 4 трапеции? (параллелограмм можно считать частным случаем трапеции).
4. Найдите натуральное число, у которого десятичная запись его квадрата начинается ровно с 2024 девяток.
5. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на 4 треугольника, три из которых имеют площади 9,15 и 20. Найти площадь четвертого треугольника, если известно, что она – целое число.

Ответы и решения

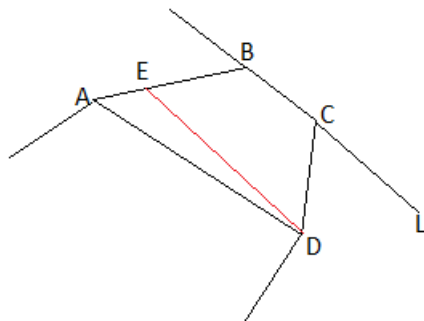
Задача 1. По условию задачи, для всякой зеленой точки сосед справа не будет удален, а для любой желтой точки сосед справа удаляется, поэтому количество удаленных точек равно числу желтых точек.

Ответ: 20.

Задача 2. Имеем: $1000 = 2^3 \cdot 5^3 = a \cdot b$. Простыми делителями чисел a и b могут быть только 2 и 5, но каждое из них не может иметь делители и 2, и 5, поскольку тогда в их десятичной записи будет 0 ($2 \cdot 5 = 10$). Поэтому $a = 2^3, b = 5^3$, или наоборот, больше вариантов нет. Найдем сумму этих чисел: $2^3 + 5^3 = 8 + 125 = 133$.

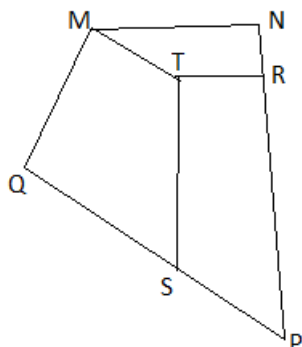
Ответ: 133.

Задача 3. Решим задачу в общем виде для произвольного выпуклого n – угольника. Пусть A, B, C, D четыре подряд идущие вершины многоугольника.



Прямую L , проходящую через вершины B и C , сдвигаем параллельно самой себе в вершину D (или A). Разрез по линии DE дает одну из искомым трапеций, удаляет у многоугольника две вершины B и C , но добавляет к нему вершину E . Таким образом, оставшийся многоугольник выпуклый и имеет на одну вершину меньше. Этот процесс продолжается до тех пор, пока первоначальный многоугольник не будет разрезан на $(n - 4)$ трапеции и

выпуклый четырехугольник. Способ разрезания четырехугольника на три трапеции изображен на рисунке.



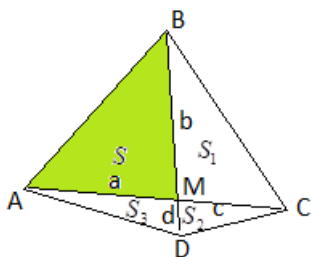
Пусть угол при вершине M четырехугольника максимальный. Проведем через точку M прямую, параллельную стороне PQ и выберем на ней произвольную точку T , расположенную внутри четырехугольника. Через точку T проводим прямые TR и TS , параллельные сторонам MN и NP соответственно. Образовавшиеся три трапеции искомые. Общее число трапеций, на которые разрезан многоугольник, равно $(n-1)$. Для пятиугольника имеем 4 трапеции.

P.S. Если $AD \parallel BC$, то отрезаем трапецию не через вершину D так, чтобы остался выпуклый четырехугольник (не треугольник!).

Задача 4. Искомое число, например, равно $10^{2025} - 5$, так как при $n \in \mathbb{N}$ имеем $(10^n - 5)^2 = (10^n)^2 - 2 \cdot 10^n \cdot 5 + 5^2 = 10^{2n} - 10^{n+1} + 25 = 10^{n+1}(10^{n-1} - 1) + 25 = 10^{n+1}(9 \dots 9) + 25 = 9 \dots 90 \dots 025$ – число начинается с $(n-1)$ -й девятки, далее идет $(n-1)$ нуль и в двух младших разрядах 25.

Ответ: $10^{2025} - 5$.

Задача 5. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник.



Обозначения: M – точка пересечения диагоналей; S_1, S_2, S_3 – площади трех треугольников из четырех; S – площадь четвертого треугольника; a, b, c, d – отрезки диагоналей.

Так как площади треугольников относятся так же, как их основания (при равных высотах), то

$$\frac{b}{d} = \frac{S}{S_3} = \frac{S_1}{S_2},$$

откуда

$$S = \frac{S_1 \cdot S_3}{S_2}.$$

Для получения ответа достаточно поместить в числитель любую пару чисел из трех заданных и проверить S на целочисленность:

$$1) S = \frac{9 \cdot 15}{20} = \frac{9}{4} \notin Z, 2) S = \frac{9 \cdot 20}{15} = 12 \in Z, 3) S = \frac{15 \cdot 20}{9} = \frac{100}{3} \notin Z.$$

Ответ: 12.

Вариант 2

1. Петя отметил на окружности 50 точек: 32 желтым карандашом и 18 – зеленым. Немного подумав, он зачеркнул те точки, соседи которых либо желтого цвета, либо разного, но слева – желтого. Сколько точек зачеркнул Петя?

Ответ: 32.

2. Число 10000 представлено в виде произведения двух натуральных чисел, в десятичной записи которых нет нулей. Найти сумму этих чисел.

Ответ: 641.

3. Как разрезать произвольный выпуклый шестиугольник на не более, чем 5 трапеций? (параллелограмм можно считать частным случаем трапеции).

4. Найдите натуральное число, у которого десятичная запись его квадрата начинается ровно с 2023 девяток.

Ответ: $10^{2024} - 5$.

5. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на 4 треугольника, три из которых имеют площади 12,15 и 24. Найти площадь четвертого треугольника, если известно, что она – целое число.

Ответ: 30.

Вариант 3

1. Петя отметил на окружности 40 точек: 22 желтым карандашом и 18 – зеленым. Немного подумав, он зачеркнул те точки, соседи которых либо желтого цвета, либо разного, но слева – желтого. Сколько точек зачеркнул Петя?

Ответ: 22.

2. Число 100000 представлено в виде произведения двух натуральных чисел, в десятичной записи которых нет нулей. Найти сумму этих чисел.

Ответ: 3157.

3. Как разрезать произвольный выпуклый семиугольник на не более, чем 6 трапеций? (параллелограмм можно считать частным случаем трапеции)

4. Найдите натуральное число, у которого десятичная запись его квадрата начинается ровно с 2025 девяток.

Ответ: $10^{2026} - 5$.

5. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на 4 треугольника, три из которых имеют площади 8,12 и 14. Найти площадь четвертого треугольника, если известно, что она – целое число.

Ответ: 21.

Вариант 4

1. Петя отметил на окружности 28 точек: 16 желтым карандашом и 12 – зеленым. Немного подумав, он зачеркнул те точки, соседи которых либо желтого цвета, либо разного цвета, но слева – желтого. Сколько точек зачеркнул Петя?

Ответ: 16.

2. Число 1000000 представлено в виде произведения двух натуральных чисел, в десятичной записи которых нет нулей. Найти сумму этих чисел.

Ответ: 15689.

3. Как разрезать произвольный выпуклый восьмиугольник на не более, чем 7 трапеций? (параллелограмм можно считать частным случаем трапеции).

4. Найдите натуральное число, у которого десятичная запись его квадрата начинается ровно с 2022 девяток.

Ответ: $10^{2023} - 5$.

4. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на 4 треугольника, три из которых имеют площади 4, 6 и 16. Найти площадь четвертого треугольника, если известно, что она – целое число.

Ответ: 24.