Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 11 класс, Москва

Вариант 1.

1. Компания друзей совершала пробежку по прямолинейному участку шоссе: мальчики бежали в одном направлении, девочки – в противоположном. Через t_1 мин после того, как Паша обогнал Ваню, он поравнялся с Таней, а затем через t_2 мин оказался рядом с бегущей Машей. Спустя еще t_3 мин Маша повстречалась с Ваней. Наконец, еще t_4 мин понадобилось ей чтобы догнать Таню. Известно, что $t_1 : t_2 = 1:2$, а $t_3 : t_4 = 1:1$. Сколько времени было на часах, когда Ваня поравнялся с Таней, если известно, что Паша догнал Ваню в 12 часов дня, Маша была в одной точке шоссе с Ваней в момент, когда часы показывали 14 часов, а скорость бега всех участников была постоянной и различной для каждого?

2. Найти среднее арифметическое решений уравнения

$$\sqrt{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} = \sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$$

на отрезке $[0; 2\pi]$.

3. Для каждого натурального n определим число $\varphi(n)$, равное количеству целых чисел $m, 1 \le m \le n$ взаимно простых с n. Найти $\varphi(1947)$.

4. Целые числа x и y связаны уравнением $2x - 3y = 1$ и имеют вид $x = 12a + b\sqrt{5},\ y = ba^{-1} + 3\sqrt{5}$ для некоторых чисел a и b. Найти x, y и a, если известно, что число b рациональное.

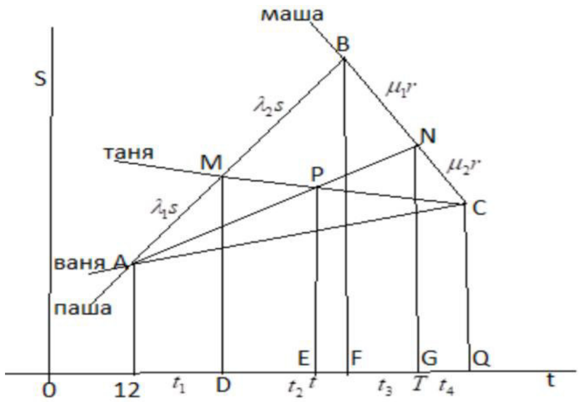
5. Решить уравнение $\left[\sqrt{\left[\sqrt{2024(x+1)(3-x)}\right]}\right] = \left[\sqrt[4]{2024(x+1)(3-x)}\right]$.

Здесь $[b]$ – целая часть числа: наибольшее целое число не превосходящее b.

6. Через четыре точки A, B, C, D, попарные расстояния между которыми равны $\sqrt{15}$, проведена сфера S. Через точки E и F, расположенные на ребрах AB и CD пирамиды $ABCD$ соответственно, проведена прямая, пересекающая сферу в точках M и N $\left(E \in [M, F]\right)$. Известно, что точки E и F делят хорду MN в отношении $ME : EF : FN = 1:2:3$. Найти длину отрезка ME.

Ответы и решения

Задача 1. Введем обозначения: $t_1 : t_2 = \lambda_1 : \lambda_2$, $t_3 : t_4 = \mu_1 : \mu_2$. Изобразим на координатной плоскости графики зависимостей координаты от времени для участников пробежки.



Вершины треугольника ABC – точки встречи Вани и Паши (A), Маши и Паши (B), Вани и Тани (C);

Точка M на стороне AB треугольника – точка

встречи Паши и Тани;
Точка N на стороне BC треугольника – точка встречи Вани и Маши;
Точка P – пересечение отрезков CM и AN – точка встречи Вани и Тани, t - время встречи Вани и Тани;
$\lambda_1 s$ и $\lambda_2 s$ – длины отрезков AM и MB соответственно;
$\mu_1 r$ и $\mu_2 r$ – длины отрезков BN и NC соответственно.
По теореме Менелая (для треугольника BAN) имеем:

$$\frac{\lambda_2 s}{\lambda_1 s}\cdot\frac{AP}{PN}\cdot\frac{\mu_2 r}{\mu_1 r+\mu_2 r}=1.$$

Поэтому

$$\frac{AP}{PN}=\frac{\lambda_1(\mu_1+\mu_2)}{\lambda_2\mu_2}=\frac{t-12}{T-t}.$$

Отсюда находим

$$t=\frac{12\lambda_2\mu_2+T\lambda_1(\mu_1+\mu_2)}{\lambda_2\mu_2+\lambda_1(\mu_1+\mu_2)}.$$

С учетом того, что $\lambda_1:\lambda_2=1:2$, а $\mu_1:\mu_2=1:1$, получаем $t=14$.
Ответ: 14.
Задача 2. Введём обозначения: $a^2=\sin x$, $b^2=\sin 2x$, $c^2=\sin 3x$. Преобразуем уравнение:

$$\sqrt{a^2-b^2+c^2}=|a|-|b|+|c| \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{cases} a^2-b^2+c^2=(|a|-|b|+|c|)^2 \\ |a|-|b|+|c|\geq 0\end{cases} \rightarrow \begin{cases} (|a|-|b|)(|b|-|c|)=0 \\ |a|-|b|+|c|\geq 0\end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{l}|a|=|b| \\ |b|=|c|\end{array}\right.$$

Рассмотрим все возможные случаи.
Случай 1. $|a|=|b|$.

$$\begin{cases}\sin x=\sin 2x \\ \sin x\geq 0, \sin 3x\geq 0, x\in[0;2\pi]\end{cases} \rightarrow x=0,\frac{\pi}{3},\pi,2\pi.$$

Случай 2. $|c|=|b|$

$$\begin{cases}\sin 3x=\sin 2x \\ \sin x\geq 0, \sin 2x\geq 0, x\in[0;2\pi]\end{cases} \rightarrow x=\frac{\pi}{5}.$$

Таким образом, среднее арифметическое решений равно $\frac{53\pi}{75}$.
Ответ: $\frac{53\pi}{75}$.
Задача 3. Пусть $n={p_1}^{r_1}\cdot{p_2}^{r_2}\cdot{p_3}^{r_3}$, где p_1,p_2,p_3 – различные простые числа, r_1,r_2,r_3 – их (натуральные) кратности. Количество чисел, не больших n, делящихся на p_1, равно $n_1={p_1}^{r_1-1}\cdot{p_2}^{r_2}\cdot{p_3}^{r_3}$, делящихся на p_2 равно $n_2={p_1}^{r_1}\cdot{p_2}^{r_2-1}\cdot{p_3}^{r_3}$, делящихся на p_3 равно $n_3={p_1}^{r_1}\cdot{p_2}^{r_2}\cdot{p_3}^{r_3-1}$. Делящихся на $p_1\cdot p_2$ равно $n_4={p_1}^{r_1-1}\cdot{p_2}^{r_2-1}\cdot{p_3}^{r_3}$, делящихся на $p_1\cdot p_3$ равно $n_5={p_1}^{r_1-1}\cdot{p_2}^{r_2}\cdot{p_3}^{r_3-1}$, делящихся на $p_2\cdot p_3$ равно $n_6={p_1}^{r_1}\cdot{p_2}^{r_2-1}\cdot{p_3}^{r_3-1}$. Наконец, количество чисел, делящихся на $p_1\cdot p_2\cdot p_3$, равно $n_7={p_1}^{r_1-1}\cdot{p_2}^{r_2-1}\cdot{p_3}^{r_3-1}$. Общее количество чисел, не взаимно простых с n, равно

$$n_1+n_2+n_3-n_4-n_5-n_6+n_7=$$
$$={p_1}^{r_1-1}\cdot{p_2}^{r_2-1}\cdot{p_3}^{r_3-1}(p_1\cdot p_2+p_1\cdot p_3+p_2\cdot p_3-p_1-p_2-p_3+1).$$

Тогда

$$\varphi(n)=n-n_1-n_2-n_3+n_4+n_5+n_6-n_7=$$
$$={p_1}^{r_1-1}\cdot{p_2}^{r_2-1}\cdot{p_3}^{r_3-1}(p_1\cdot p_2\cdot p_3-p_1\cdot p_2-p_1\cdot p_3-p_2\cdot p_3+p_1+p_2+p_3-1)=$$
$$={p_1}^{r_1-1}\cdot{p_2}^{r_2-1}\cdot{p_3}^{r_3-1}(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1).$$

Таким образом, при $n=1947=3\cdot 11\cdot 59$ имеем $\varphi(1947)=(3-1)(11-1)(59-1)=1160$.
Ответ: $\varphi(1947)=1160$.

Задача 4. Общее решение в целых числах уравнения $2x - 3y = 1$ имеет вид $x = 3t - 1, y = 2t - 1$, где t – целое число. Перепишем уравнения:

$$\begin{cases} 3t - 1 - b\sqrt{5} = 12a, \\ 2t - 1 - 3\sqrt{5} = ba^{-1}. \end{cases}$$

Приравняв произведение левых частей этих уравнений к произведению правых частей, получим:

$$(3t-1)(2t-1) + 15b - \sqrt{5}\big(3(3t-1) + b(2t-1)\big) = 12b\,. \qquad (*)$$

Из рациональности b следует, что равенство (*) возможно только если

$$\begin{cases} 3(3t-1) + b(2t-1) = 0, \\ (3t-1)(2t-1) + 15b = 12b. \end{cases}$$

Тогда $b = -\frac{3(3t-1)}{2t-1} = -\frac{(3t-1)(2t-1)}{3} \to (2t-1)^2 = 9 \to t_1 = 2,\ t_2 = -1.$

Рассмотрим возможные варианты.

Случай 1. $t = 2$.

$$x = 5, y = 3 \to b = -5 \to a = \frac{5(1+\sqrt{5})}{12}.$$

Случай 2. $t = -1$.

$$x = -4, y = -3 \to b = -4 \to a = \frac{\sqrt{5}-1}{3}.$$

Ответ: $x_1 = 5,\ y_1 = 3, a_1 = \frac{5(1+\sqrt{5})}{12}, x_2 = -4,\ y_2 = -3,\ a_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{3}.$

Задача 5. Для любого неотрицательного числа a найдется целое неотрицательное число n такое, что

$$n^4 \le a < (n+1)^4 \to n^2 \le \sqrt{a} < (n+1)^2 \to$$

$$\to n^2 \le [\sqrt{a}] < (n+1)^2 \to n \le \sqrt{[\sqrt{a}]} < n+1 \to \left[\sqrt{[\sqrt{a}]}\right] = n$$

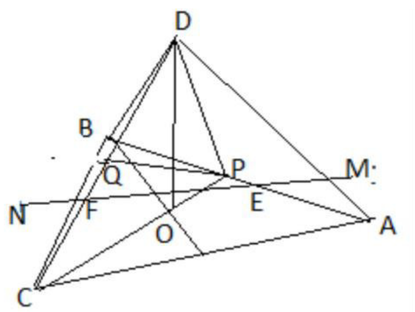
Кроме того, $n \le \sqrt[4]{a} < n+1 \to [\sqrt[4]{a}] = n.$

Таким образом, для любых значений a уравнение $\left[\sqrt{[\sqrt{a}]}\right] = [\sqrt[4]{a}]$ является тождеством.

Положив в исходном уравнении $a = 2024(x+1)(3-x)$, получаем, что все числа из области допустимых значений являются его решениями.

Ответ: $x \in [-1;3]$.

Задача 6. Попарные расстояния между точками A, B, C, D обозначим через a, отношения $ME{:}EF{:}FN$ обозначим $ME{:}EF{:}FN = \lambda{:}\mu{:}\eta$.



Введем обозначения: P, Q – середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$; x, y – длины отрезков PE и QF; $\lambda s, \mu s, \eta s$ – длины отрезков ME, EF, FN;

Треугольник CPD – равнобедренный и PQ – его медиана, перпендикулярная CD

$$PQ^2 = \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} \to PQ = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Плоскость треугольника CPD перпендикулярна AB, поэтому $PQ \perp AB$.

AB и MN – пересекающиеся хорды сферы, поэтому

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)\left(\frac{a}{2} - x\right) = \frac{a^2}{4} - x^2 = \lambda s(\mu s + \eta s).$$

CD и MN – пересекающиеся хорды сферы, поэтому

$$\left(\frac{a}{2}+y\right)\left(\frac{a}{2}-y\right)=\frac{a^2}{4}-y^2=\eta s(\mu s+\lambda s).$$

Складывая последние два равенства, получим

$$\frac{a^2}{2}-x^2-y^2=[\lambda(\mu+\eta)+\eta(\mu+\lambda)]s^2\,. \qquad (1)$$

Треугольники PQE, EQF и QFP прямоугольные (теорема о трех перпендикулярах), поэтому

$$EF^2=EQ^2+QF^2=EP^2+PQ^2+QF^2=\frac{a^2}{2}+x^2+y^2. \qquad (2)$$

Заметим, для того, чтобы точки E и F делили отрезок MN в заданном отношении, необходимо, чтобы величина

$$[\lambda(\mu+\eta)+\eta(\mu+\lambda)]s^2\,,$$

которая в силу (2) равна $\frac{a^2}{2}-x^2-y^2$, была не больше, чем $\mu^2s^2=EF^2=\frac{a^2}{2}+x^2+y^2$.

Таким образом, указанное отношение длин $ME{:}EF{:}FN=\lambda{:}\mu{:}\eta$ невозможно, если не выполняется неравенство:

$$\mu^2\geq\lambda(\mu+\eta)+\eta(\mu+\lambda). \qquad (3)$$

Предположим, что неравенство (3) выполнено. Складывая равенства (1) и (2), получим

$$a^2=EF^2+[\lambda(\mu+\eta)+\eta(\mu+\lambda)]s^2=[\mu^2+\lambda(\mu+\eta)+\eta(\mu+\lambda)]s^2.$$

Тогда

$$s=\frac{a}{\sqrt{\mu^2+\lambda(\mu+\eta)+\eta(\mu+\lambda)}},$$

$$ME=\frac{a\cdot\lambda}{\sqrt{\mu^2+\lambda(\mu+\eta)+\eta(\mu+\lambda)}};EF=\frac{a\cdot\mu}{\sqrt{\mu^2+\lambda(\mu+\eta)+\eta(\mu+\lambda)}};$$

$$FN=\frac{a\cdot\eta}{\sqrt{\mu^2+\lambda(\mu+\eta)+\eta(\mu+\lambda)}};MN=\frac{a\cdot(\lambda+\mu+\eta)}{\sqrt{\mu^2+\lambda(\mu+\eta)+\eta(\mu+\lambda)}}.$$

Покажем, что случай $ME:EF:FN=1:2:3$ не реализуется. Подставляем $\lambda=1,\mu=2,\eta=3$ в неравенство (3):

$$2^2\geq 1(2+3)+3(2+1)\leftrightarrow 4\geq 5+9\leftrightarrow 4\geq 14,$$

что неверно. Из этого следует, что точки E и F не могут делить хорду MN в заданном отношении.

Ответ: точки E и F не могут делить хорду MN в заданном отношении.

Вариант 2.

1. Компания друзей совершала пробежку по прямолинейному участку шоссе: мальчики бежали в одном направлении, девочки – в противоположном. Через t_1 мин после того, как Паша обогнал Ваню, он поравнялся с Таней, а затем через t_2 мин оказался рядом с бегущей Машей. Спустя еще t_3 мин Маша повстречалась с Ваней. Наконец, еще t_4 мин понадобилось ей чтобы догнать Таню. Известно, что $t_1:t_2=1:2$, а $t_3:t_4=2:1$. Сколько времени было на часах, когда Ваня поравнялся с Таней, если известно, что Паша догнал Ваню в 12 часов дня, Маша была в одной точке шоссе с Ваней в момент, когда часы показывали 13 часов 30 мин, а скорость бега всех участников была постоянной и различной для каждого?

Ответ: 12 часов 54 мин

2. Найти среднее арифметическое решений уравнения

$$\sqrt{\cos x-\cos 2x+\cos 3x}=\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos 3x}$$

на отрезке $[0;2\pi]$.

Ответ: π.

3. Для каждого натурального n определим число $\varphi(n)$, равное количеству целых чисел $m, 1 \leq m \leq n$ взаимно простых с n. Найти $\varphi(1998)$.

Ответ: $\varphi(1998) = 648$.

4. Целые числа x и y связаны уравнением $3x - 4y = 5$ и имеют вид $x = -8a - b\sqrt{3},\ y = ba^{-1} + 4\sqrt{3}$ для некоторых чисел a и b. Найти x, y и a, если известно, что число b рациональное.

Ответ: $x = 7,\ y = 4,\ a = -\frac{7(1+\sqrt{3})}{8}$

5. Решить уравнение $\left[\sqrt{\left[\sqrt{x^2 + x - 6}\right]}\right] = \left[\sqrt[4]{x^2 + x - 6}\right]$.

Здесь $[b]$ – целая часть числа: наибольшее целое число не превосходящее b.

Ответ: $x \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.

6. Через четыре точки A, B, C, D, попарные расстояния между которыми равны $\sqrt{14}$, проведена сфера S. Через точки E и F, расположенные на ребрах AB и CD пирамиды $ABCD$ соответственно, проведена прямая, пересекающая сферу в точках M и N $(E \in [M, F])$. Известно, что точки E и F делят хорду MN в отношении $ME : EF : FN = 1 : 2 : 2$. Найти длину отрезка EF .

Ответ: точки E и F не могут делить хорду MN в заданном отношении.

Вариант 3.

1. Компания друзей совершала пробежку по прямолинейному участку шоссе: мальчики бежали в одном направлении, девочки – в противоположном. Через t_1 мин после того, как Паша обогнал Ваню, он поравнялся с Таней, а затем через t_2 мин оказался рядом с бегущей Машей. Спустя еще t_3 мин Маша повстречалась с Ваней. Наконец, еще t_4 мин понадобилось ей чтобы догнать Таню. Известно, что $t_1 : t_2 = 1 : 3$, а $t_3 : t_4 = 2 : 1$. Сколько времени было на часах, когда Ваня поравнялся с Таней, если известно, что Паша догнал Ваню в 12 часов дня, Маша была в одной точке шоссе с Ваней в момент, когда часы показывали 13 часов, а скорость бега всех участников была постоянной и различной для каждого?

Ответ: 12 часов 30 мин.

2. Найти среднее арифметическое решений уравнения

$$\sqrt{\sin x - \cos 2x + \sin 3x} = \sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\sin 3x}$$

на отрезке $[0; 2\pi]$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

3. Для каждого натурального n определим число $\varphi(n)$, равное количеству целых чисел $m, 1 \leq m \leq n$ взаимно простых с n. Найти $\varphi(2024)$.

Ответ: $\varphi(2024) = 880$.

4. Целые числа x и y связаны уравнением $2x - 5y = 3$ и имеют вид $x = 2a - b\sqrt{7},\ y = ba^{-1} + \sqrt{7}$ для некоторых чисел a и b. Найти x, y и a, если известно, что число b рациональное.

Ответ: $x_1 = 9,\ y_1 = 3, a_1 = \frac{3(3+\sqrt{7})}{2}, x_2 = -6,\ y_2 = -3,\ a_2 = \sqrt{7} - 3$.

5. Решить уравнение $\left[\sqrt{\left[\sqrt{|x+2|(x-4)}\right]}\right] = \left[\sqrt[4]{|x+2|(x-4)}\right]$.

Здесь $[b]$– целая часть числа: наибольшее целое число не превосходящее b .

Ответ: $x \in \{-2\} \cup [4; +\infty)$.

6. Через четыре точки A, B, C, D, попарные расстояния между которыми равны $\sqrt{43}$, проведена сфера S. Через точки E и F, расположенные на ребрах AB и CD пирамиды $ABCD$ соответственно, проведена прямая, пересекающая сферу в точках M и N $(E \in [M, F])$. Известно, что точки E и F делят хорду MN в отношении $ME : EF : FN = 2:3:4$. Найти длину отрезка FN .

Ответ: точки E и F не могут делить хорду MN в заданном отношении.

Вариант 4.

1. Компания друзей совершала пробежку по прямолинейному участку шоссе: мальчики бежали в одном направлении, девочки – в противоположном. Через t_1 мин после того, как Паша обогнал Ваню, он поравнялся с Таней, а затем через t_2 мин оказался рядом с бегущей Машей. Спустя еще t_3 мин Маша повстречалась с Ваней. Наконец, еще t_4 мин понадобилось ей чтобы догнать Таню. Известно, что $t_1 : t_2 = 1:1$, а $t_3 : t_4 = 3:1$. Сколько времени было на часах, когда Ваня поравнялся с Таней, если известно, что Паша догнал Ваню в 12 часов дня, Маша была в одной точке шоссе с Ваней в момент, когда часы показывали 13 часов 15 мин, а скорость бега всех участников была постоянной и различной для каждого?

Ответ: 13 часов

2. Найти среднее арифметическое решений уравнения

$$\sqrt{\cos x - \sin 2x + \cos 3x} = \sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\cos 3x}$$

на отрезке $[0; 2\pi]$.

Ответ: $\frac{34\pi}{15}$.

3. Для каждого натурального n определим число $\varphi(n)$, равное количеству целых чисел $m, 1 \le m \le n$ взаимно простых с n . Найти $\varphi(1812)$.

Ответ: $\varphi(1812) = 600$.

4. Целые числа x и y связаны уравнением $3x - 5y = 1$ и имеют вид $x = -5a - b\sqrt{2}$, $y = ba^{-1} + 5\sqrt{2}$ для некоторых чисел a и b . Найти x, y и a , если известно, что число b рациональное.

Ответ: $x = -8,\ y = -5,\ a = \frac{8(1-\sqrt{2})}{5}$.

5. Решить уравнение $\left[\sqrt{\left[\sqrt{1240(6-|x|-x^2)}\right]}\right] = \left[\sqrt[4]{1240(6-|x|-x^2)}\right]$.

Здесь $[b]$– целая часть числа: наибольшее целое число не превосходящее b .

Ответ: $x \in [-2; 2]$.

6. Через четыре точки A, B, C, D, попарные расстояния между которыми равны $\sqrt{83}$, проведена сфера S. Через точки E и F, расположенные на ребрах AB и CD пирамиды $ABCD$ соответственно, проведена прямая, пересекающая сферу в точках M и N $(E \in [M, F])$. Известно, что точки E и F делят хорду MN в отношении $ME : EF : FN = 1:7:3$. Найти длину отрезка MN .

Ответ: $MN = 11$.

Олимпиада Росатом, математика, заключительный тур, 09.02.2025, 11 класс, Москва

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б - Сделаны предположения по решению задачи.

1 б - Верно составлена математическая модель.

2 б -Верное решение, но допущена арифметическая ошибка.

3 б - Задача решена верно.

Задача 2:

0 б - Несущественные продвижения в решении задачи.

1 б - Получено разложение на множители.

2 б - Верное решение, но допущена арифметическая ошибка.

3 б - Задача решена верно.

Задача 3:

0 б - При подсчёте делителей не учитывается, что множества делителей, содержащих различные простые множители, могут пересекаться.

1 б - При описании чисел, имеющих общий множитель с исходным, рассмотрены не все варианты.

2 б - Верное решение, но допущена арифметическая ошибка.

3 б - Задача решена верно.

Задача 4:

0 б - Сделаны предположения по решению задачи.

1 б - Получено уравнение, из которого рациональность b влечёт систему уравнений, решающую задачу.

2 б - Верное решение, но допущена арифметическая ошибка.

3 б - Задача решена верно.

Задача 5:

0 б - Верный ответ без оснований / неверно найдено ОДЗ / решено уравнение без учета целой части.

1 б - Доказано, что левая часть совпадает с правой для всех x из некоторого подмножества ОДЗ (если подмножество является конечным множеством точек - 0 баллов).

2 б - Доказано, что левая часть уравнения совпадает с правой для всех x из ОДЗ, но в доказательстве есть несущественные ошибки/пробелы.

3 б - Задача решена верно.

Задача 6:

0 б - Сделан верный рисунок, найдены некоторые элементы.

1 б - Получено уравнение, содержащее в качестве неизвестной длину одного из отрезков ME, EF, FN или другой параметр, нахождение которого решает задачу.

2 б - Верное решение, но допущена арифметическая ошибка.

3 б - Задача решена верно.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 11 класс, регионы

Вариант 1.

1. Для рентабельности работы таксопарк должен выпускать на линию не менее 12 машин ежедневно. Городские власти, борясь за экологию, требуют, чтобы каждое городское такси работало не более 6 дней в неделю. Какое минимальное число автомобилей должно быть в таксопарке, чтобы он был рентабельным и соблюдал экологию? Дни, когда автомобили не выходят на линию, определяет руководство таксопарка.

2. Решить уравнение $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\sin 2x}+\dfrac{1}{\sin 3x}=\dfrac{1}{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}$ при условии, что $\sin x>0$.

3. Для каждого натурального n обозначим через $a(n)$ количество целых чисел $m\in[1;n]$ взаимно простых с n . Найти простое число p , для которого

$$a(p^2)+a(p^3)+a(p^4)+\ldots a(p^{2025})=3^{2025}-3\,.$$

4. Найти все пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющие неравенству

$$4^x\left(1+\lg^4 y\right)+\lg^2 y\left(1+16^x\right)\text{з}\left(1+16^x\right)\left(1+\lg^4 y\right).$$

5. Решить уравнение $\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)\left(4-5x+\sqrt{17-20x+25x^2}\right)=1$.

6. На ребрах AB, CD, DB треугольной пирамиды $ABCD$ расположены точки M , N , P соответственно, причем $AM:MB=1$, $CN:ND=2$, $DP:PB=3$. Через точки M , N , P проведена плоскость, пересекающая прямую AC в точке R. Найти отношение длин отрезков $CR:RA$.

Ответы и решения

Задача 1. Обозначим количество имеющихся машин буквой *N*. Понятно, что, имея 12 автомобилей, соблюсти оба условия невозможно. Очевидно, что для количество машино-выходов в неделю должно быть не менее 12*7=84 (7 - число дней в неделе). По условию каждая машина должна работать не более 6 дней в неделю, следовательно машин должно быть не менее $N\ge 84/6;\quad N\ge 14$. Таким образом, минимальное значение $N=14$. Так как решение задачи основано на неравенствах, необходимо привести пример, доказывающий, что такой ответ подходит. Например, это можно представить в виде таблицы

Машины	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
1	X						
2		X					
3			X				
4				X			
5					X		
6						X	
7							X
8	X						
9		X					

10			X				
11				X			
12					X		
13						X	
14							X

Крестиком отмечен невыход машины на линию. Очевидно, что возможны различные примеры таблицы, причем в принципе допускается выход более 12 машин в какие-то дни.

Ответ: 14.

Задача 2. Обозначим: $a = \sin x, b = \sin 2x, c = \sin 3x$, соответственно уравнение примет вид:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}=0 \quad .$$

Из этого уравнения очевидно, что в качестве решений подходят соотношения типа $a=-b$ или $a=-c$. Поэтому постараемся преобразовать уравнение, разложив его на множители типа $(a+c)$ или $(a+c)$

Преобразование уравнения:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}=0 \leftrightarrow \begin{cases}(bc+ac+ab)(a+b+c)-abc=0 \\ a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0\end{cases} \to$$

$$\to (a+b+c)c(a+b)+(a+b)ab=(a+b)((a+b+c)c+ab)=$$

$$=(a+b)(a(b+c)+c(b+c))=(a+b)(b+c)(a+c)=0$$

Таким образом, уравнение сводится к виду $(a+b)(b+c)(a+c)=0$, при $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$. Кроме того есть дополнительное условии из текста задачи: $\sin x>0$.

Для решения возникающих уравнений воспользуемся формулами преобразования сумм тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \text{ и } \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Случай 1. $a+b=0, a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$

$$\sin x+\sin 2x=0,\ 2\sin\left(\frac{x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-x}{2}\right)=0$$

$$\sin(3x)+\sin(x)=2\sin\left(2x\right)\cos(x)=0\to\begin{cases} x=\dfrac{\pi k}{2}\to\sin 2x=0\to\varnothing \\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi m\to\sin 2x=0\to\varnothing\end{cases}$$

Таким образом, в этом случае решения не подходят по ОДЗ.

Случай 2. $a+c=0, a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$

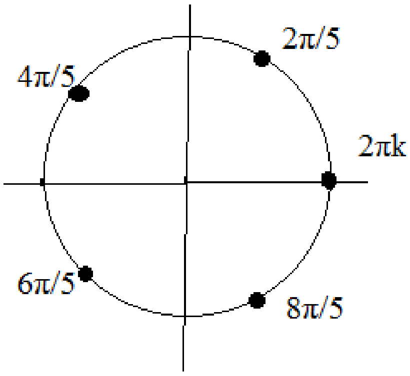
$$\sin(3x)+\sin(x)=2\sin\left(2x\right)\cos(x)=0\to\begin{cases} x=\dfrac{\pi k}{2}\to\sin 2x=0\to\varnothing \\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi m\to\sin 2x=0\to\varnothing\end{cases}$$

Таким образом, и эти решения тоже не подходят.

Случай 3. $b+c=0, a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$

$$\sin 3x+\sin(2x)=0,\quad 2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0\to\begin{cases} x=\dfrac{2\pi k}{5}+2\pi n. \\ x=\pi+2\pi m\to\sin x=0\to\varnothing\end{cases} \quad m,n\in Z$$

Второе решение не подходит, а из первого решения с учетом условия $\sin x > 0$ подходят только две серии : $x = \frac{2\pi}{5} + 2\pi k, x = \frac{4\pi}{5} + 2\pi n.k, n \in Z$.



Примечание. Решение уравнений вида $\sin 3x + \sin(2x) = 0$ возможно и другими способами, например, с использованием формул для двойного и тройного угла. Тогда уравнение сводится к виду $\sin x(4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0$, и соответственно подходящие решения имеют вид: $\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$, которые, естественно, совпадают с ранее полученным ответом.

Ответ: $x_1 = \frac{2\pi}{5} + 2\pi k, k \in Z, x_2 = \frac{4\pi}{5} + 2\pi m, m \in Z$ **.**

Задача 3. Функция $a(n)$, определенная в условии задачи, называется функцией Эйлера. Она определена для любого натурального n, и для простого аргумента имеет, очевидно, вид $a(p) = p - 1$. Если же аргумент функции представляет собой степень простого числа, то среди чисел $1, 2, ..., p^k$ найдутся ровно p^{k-1} чисел, делящихся на p. Остальные $p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1)$ чисел будут взаимно простыми с p^k, поэтому $a\left(p^k\right) = p^k - p^{k-1}$. Тогда

$$a(p^2) + a(p^3) + ... + a(p^{2025}) = p^2 - p + p^3 - p^2 + p^4 - p^3 \cdots p^{2025} - p^{2024} = p^{2025} - p$$

Очевидно, при $p > 1$ функция $a(p)$ монотонно возрастает. Тогда из уравнения $p^{2025} - p = 3^{2025} - 3$ сразу следует, что $p = 3$.

Ответ: $p = 3$.

Задача 4. Обозначим: $a = 4^x, b = \lg^2 y$. При таких обозначениях исходное неравенство примет вид:

$$a(1+b^2) + b(1+a^2) \geq (1+a^2)(1+b^2) .$$

Это неравенство можно легко преобразовать к виду (предварительно умножив на 2):

$$(1+a^2)(1+b^2) - 2a(1+b^2) + (1+a^2)(1+b^2) - 2b(1+a^2) = (1+b^2)(1-2a+a^2) +$$
$$+(1+a^2)(1-2b+b^2) = (a^2+1)(b-1)^2 + (b^2+1)(a-1)^2 \leq 0$$

Последнее неравенство, очевидно, возможно только в виде равенства при $a = 1, b = 1$.

Другой возможный способ преобразования - разделить исходное неравенство на заведомо положительные выражения $(1+a^2)(1+b^2)$. Тогда получим $\frac{a}{\left(1+a^2\right)} + \frac{b}{\left(1+b^2\right)} \geq 1$. Легко показать, что выражение $\frac{a}{\left(1+a^2\right)}$ достигает максимального значения $\frac{1}{2}$ только при $a = 1$. Аналогично и для переменной b. То есть единственная возможность выполнения исходного нестрогого неравенства – это $a = 1, b = 1$.

Теперь вернемся к введенным обозначениям: $4^x = 1$, $x = 0$. Далее $\lg^2 y = 1$, $\lg y = \pm 1$, $y_1 = 10$, $y_2 = 0{,}1$. Соответственно, решение $(x = 0, y = 10)$ и $(x = 0, y = 0{,}1)$.

Ответ: 1) $x=0,\ y=10$; 2) $x=0,\ y=0{,}1$.

Задача 5. Заметим, что исходные выражения в скобках представляют собой функцию $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$. Эта функция обладает свойством

$$f(t)f(-t)=(t+\sqrt{t^2+1})(-t+\sqrt{t^2+1})=1$$

Преобразуем уравнения:

1) $\left(4-5x+\sqrt{(4-5x)^2+1}\right)=\dfrac{1}{\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)}=-\left(x^2-\sqrt{x^4+1}\right)$

2) $\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)=\dfrac{1}{\left(4-5x+\sqrt{(4-5x)^2+1}\right)}=-\left(4-5x-\sqrt{(4-5x)^2+1}\right)$

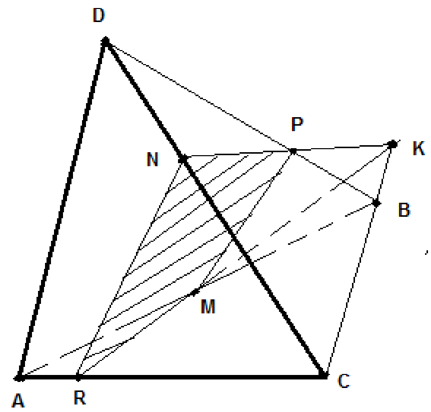
Вычитая полученные выражения, получим

$$2x^2=-2(4-5x)\to x^2-5x+4=0.$$

Далее просто решаем полученное квадратное уравнение и находим $x_1=1$, $x_2=4$, что и является ответом.

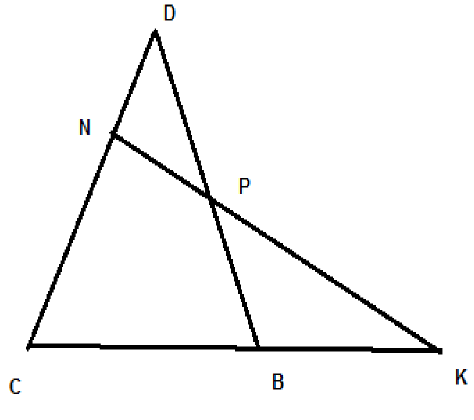
Примечание. Возможны и другие типы преобразований исходного уравнения, например, возведение в квадрат на каком-то этапе для избавления от иррациональности. При этом могут возникнуть «лишние» корни, поэтому следует сделать проверку. В предложенном варианте решения очевидно оба корня подходят.

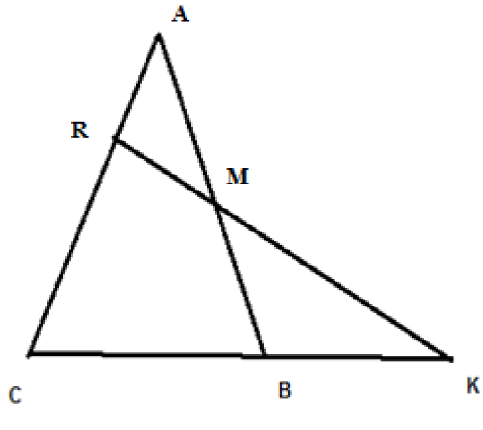
Ответ: $x_1=1, x_2=4$.



Задача 6. Построим произвольную треугольную пирамиду $ABCD$ и нанесем точки M, N, P в соответствии с условием задачи. Точки P и M лежат в плоскости ADB, поэтому их просто соединяем отрезком. Точки N и P лежат в плоскости CDB, поэтому их тоже соединяем отрезком и продолжаем луч NP за пределы пирамиды. Также продолжим луч CB. Лучи NP и CB принадлежат одной и той же плоскости CDB и, следовательно, пересекаются в точке, которую назовем K. Точка K одновременно принадлежит плоскости CDB, плоскости ABC (так как принадлежит лучу CB), а также плоскости сечения (так как принадлежит лучу NP). Теперь проводим прямую KM, принадлежащую плоскости ABC, и при пересечении с ребром AC получаем точку R. Сечение $NPMR$ построено.

Рассмотрим два пересеченных треугольника CDB и ABC.





Применим теорему Менелая:

$$\frac{CN}{ND}\frac{DP}{PB}\frac{BK}{KC}=1 \quad \text{и} \quad \frac{CR}{RA}\frac{AM}{MB}\frac{BK}{KC}=1.$$

(*Примечание.* Соотношения Менелая легко получаются из подобия треугольников).

Выразим из первого соотношения величину $\frac{BK}{KC}$

$\frac{BK}{KC}=\frac{ND}{CN}\frac{PB}{DP}$ и подставим этот результат во второе соотношение. Отсюда легко получается ответ $\frac{CR}{RA}=\frac{MB}{AM}\frac{CN}{ND}\frac{DP}{PB}$.

$$\frac{CR}{RA}=1\cdot 2\cdot 3=6$$

Ответ: $CR:RA=6$

Вариант 2.

1. Для рентабельности работы таксопарк должен выпускать на линию не менее 12 машин ежедневно. Городские власти, борясь за экологию, требуют, чтобы каждое городское такси работало не более 5 дней в неделю. Какое минимальное число автомобилей должно быть в таксопарке, чтобы он был рентабельным и соблюдал экологию? Дни, когда автомобили не выходят на линию, определяет руководство таксопарка.

Ответ: 17.

2. Решить уравнение $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos 2x}+\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sin x+\cos 2x+\cos x}$ при условии, что $\sin x<0$.

Ответ: $x_1=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z,\quad x_2=\frac{7\pi}{6}+2\pi m, m\in Z,\quad x_3=-\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$.

3. Для каждого натурального n обозначим через $a(n)$ количество целых чисел $m\in[1;n]$ взаимно простых с n. Найти простое число p, для которого

$$a(p^3)+a(p^4)+\ldots a(p^{2025})=7^{2025}-49.$$

Ответ: $p=7$.

4. Найти все пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющие неравенству

$$9^x\left(1+\lg^4(y-1)\right)+\lg^2(y-1)\left(1+81^x\right)\geq\left(1+81^x\right)\left(1+\lg^4(y-1)\right).$$

Ответ: 1) $x=-1,\ y=11$; 2) $x=-1,\ y=1{,}1$.

5. Решить уравнение $\left(\sqrt{25x^2+1}-5x\right)\left(x^2+6+\sqrt{x^4+12x^2+37}\right)=1$.

Ответ: $x_1=2, x_2=3$

6. На ребрах AB, CD, DB треугольной пирамиды $ABCD$ расположены точки M, N, P соответственно, причем $AM:MB=1:2$, $CN:ND=2:3$, $DP:PB=2$. Через точки M, N, P проведена плоскость, пересекающая прямую AC в точке R. Найти отношение длин отрезков $CR:RA$.

Ответ: $\frac{CR}{RA}=\frac{8}{3}$

Вариант 3.

1. Для рентабельности работы таксопарк должен выпускать на линию не менее 12 машин ежедневно. Городские власти, борясь за экологию, требуют, чтобы каждое городское такси работало не более 4 дней в неделю. Какое минимальное число автомобилей должно быть в таксопарке, чтобы он был рентабельным и соблюдал экологию? Дни, когда автомобили не выходят на линию, определяет руководство таксопарка.
Ответ: 21.

2. Решить уравнение $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos 2x}+\frac{1}{\cos 3x}=\frac{1}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}$ при условии, что $\cos x>0$.

Ответ: $x_1=\pm\frac{\pi}{5}+2\pi k, k\in Z,\ x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

3. Для каждого натурального n обозначим через $a(n)$ количество целых чисел $m\in[1;n]$ взаимно простых с n. Найти простое число p, для которого

$$a(p^4)+a(p^5)+\ldots a(p^{2025})=5^{2025}-125.$$

Ответ: $p=5$.

4. Найти все пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющие неравенству

$$25^{x+2}\left(1+\lg^4(y+2)\right)+\lg^2(y+2)\left(1+625^{x+2}\right)\ge\left(1+625^{x+2}\right)\left(1+\lg^4(y+2)\right).$$

Ответ: 1) $x=-2,\ y=8$; 2) $x=-2,\ y=-1{,}9$.

5. Решить уравнение $\left(4x+\sqrt{16x^2+1}\right)\left(x^2+3+\sqrt{x^4+6x^2+10}\right)=1$.

Ответ: $x_1=-1, x_2=-3$.

6. На ребрах AB, CD, DB треугольной пирамиды $ABCD$ расположены точки M, N, P соответственно, причем $AM:MB=1:3$, $CN:ND=3:4$, $DP:PB=1$. Через точки M, N, P проведена плоскость, пересекающая прямую AC в точке R. Найти отношение длин отрезков $CR:RA$.

Ответ: $\frac{CR}{RA}=\frac{9}{4}$.

Вариант 4.

1. Для рентабельности работы таксопарк должен выпускать на линию не менее 12 машин ежедневно. Городские власти, борясь за экологию, требуют, чтобы каждое городское такси работало не более 3 дней в неделю. Какое минимальное число автомобилей должно быть в таксопарке, чтобы он был рентабельным и соблюдал экологию? Дни, когда автомобили не выходят на линию, определяет руководство таксопарка.
Ответ: 28.

2. Решить уравнение $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\cos 2x}=\frac{1}{\cos x+\sin 2x+\cos 2x}$ при условии, что $\cos x<0$.

Ответ: $x_1=-\frac{5\pi}{8}+2\pi k, k\in Z,\quad x_2=\frac{7\pi}{8}+2\pi m, m\in Z,\quad x_3=\frac{7\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$.

3. Для каждого натурального n обозначим через $a(n)$ количество целых чисел $m\in[1;n]$ взаимно простых с n. Найти простое число p, для которого

$$a(p^5)+a(p^6)+\ldots a(p^{2025})=2^{2025}-16.$$

Ответ: $p=2$.

4. Найти все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие неравенству

$$16^x\left(1+\lg^4(y-2)\right)+\lg^2(y-2)\left(1+256^x\right)\geq\left(1+256^x\right)\left(1+\lg^4(y-2)\right).$$

Ответ: 1) $x=0,\ y=12;$ 2) $x=0,\ y=2{,}1$.

5. Решить уравнение $\left(\sqrt{36x^2+1}-6x\right)\left(x^2+5+\sqrt{x^4+10x^2+26}\right)=1.$

Ответ: $x_1=1, x_2=5$.

6. На ребрах AB , CD , DB треугольной пирамиды $ABCD$ расположены точки M , N , P соответственно, причем $AM:MB=2:3$, $CN:ND=1:2$, $DP:PB=1$. Через точки M , N , P проведена плоскость, пересекающая прямую AC в точке R . Найти отношение длин отрезков $CR:RA$.

Ответ: $\frac{CR}{RA}=\frac{3}{4}$ **.**

Олимпиада Росатом, математика, заключительный тур, 09.02.2025, 11 класс, Выезды

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б. - Сделаны несущественные предположения по решению задачи.

1 б. - Составлена таблица выездов или приведены какие-то разумные оценки.

2 б. –Получены верные математические неравенства, получен верный ответ без примера.

3 б. - Задача решена верно, приведен верный пример выполнения условий задачи.

Задача 2:

0 б. - Несущественные продвижения в решении задачи, приведены какие-либо преобразования, не приводящие к решению.

1 б. - Получено разложение на множители.

2 б. - Верное решение тригонометрических уравнений, но допущены незначительные ошибки или присутствуют лишние решения.

3 б. - Задача решена верно.

Задача 3:

0 б. - При подсчёте делителей не учитывается, что число p - простое число, допущены ошибки при записи взаимно простых с p чисел.

1 б. – Правильно определено количество взаимно простых чисел для p^n, но нет дальнейшего продвижения в решении.

2 б. - Верное решение, но допущена арифметическая ошибка.

3 б. - Задача решена верно.

Задача 4:

0 б. - Сделаны несущественные предположения по решению задачию

1 б. – Получены преобразования, позволяющие свести часть выражений к полному квадрату.

2 б. – Получено неравенство в виде суммы заведомо неотрицательных величин, приводящее к верному решению, но допущена арифметическая ошибка.

3 б. - Задача решена верно.

Задача 5:

0 б. - Верный ответ без оснований или подбором;

1 б. - Показано, что любой множитель исходного уравнения при переносе в числитель правой части легко преобразуется с помощью умножения на сопряженное выражение, при этом ОДЗ не накладывает никаких ограничений.

2 б. – Приведено решение упрощенного уравнения, но допущены незначительные арифметические ошибки.

3 б. - Задача решена верно.

Задача 6:

0 б. - Сделан верный рисунок, найдены некоторые элементы.

1 б. – Правильно построено сечение пирамиды, получены плоскости, в которых можно применить теорему Менелая или соображения подобия, включающие заданные в условии задачи соотношения.

2 б. – Получено верное соотношение, приводящее к решению задачи, но допущены несущественные арифметические ошибки.

3 б. - Задача решена верно.