

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ ВЕСЕННИЙ ТУР

Базовый вариант

8 – 9 классы

1 [4]. На доску записали числа $1, 2, \dots, 100$. Далее за ход стирают любые два числа a и b , где $a \geq b > 0$, и пишут вместо них одно число $[a/b]$. После 99 ходов на доске останется одно число. Каким наибольшим оно может быть? (Напомним, что $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее x .)

(Егор Бакаев)

Ответ: 100. Очевидно, что все числа на доске всегда не меньше 1 и не больше 100. Применяв указанную операцию к парам $(99, 98), (97, 96), \dots, (3, 2)$, оставим на доске число 100 и 50 единиц. Далее каждый ход убирает одну единицу.

2 [5]. В классе N школьников, среди них образовалось несколько компаний. Общительностью школьника назовём количество людей в наибольшей компании, куда он входит (если ни в одну не входит, то общительность равна 1). Оказалось, что у всех девочек в классе общительность разная. Каково наибольшее возможное количество девочек в классе?

(Борис Френкин)

Ответ: $\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor$ девочек. Уточним, что под наибольшей компанией для школьника подразумевается компания с наибольшим числом школьников в ней (таких может быть несколько).

Оценка. Пусть в классе k девочек. Девочка с наибольшей общительностью входит в компанию, где не меньше k человек. Других девочек в этой компании нет. Значит, в классе не менее $k - 1$ мальчиков. Следовательно, $k + (k - 1) \leq N$, то есть $k \leq \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor$.

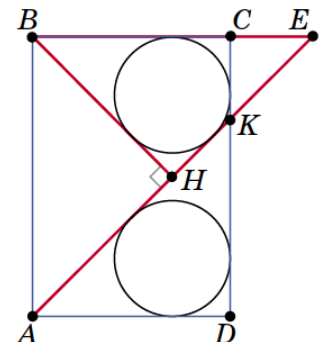
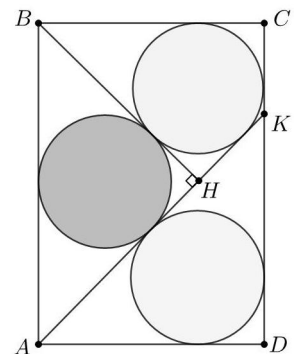
Пример. При $k = \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor$ занумеруем девочек числами от 1 до k , мальчиков — числами от $k + 1$ до N и создадим k компаний: в i -ю компанию входят i -я девочка и $i - 1$ мальчиков с наименьшими номерами.

3 [5]. На стороне CD прямоугольника $ABCD$ взята точка K . Из вершины B опустили перпендикуляр BH на отрезок AK . Оказалось, что отрезки AK и BH делят прямоугольник на три части, в каждую из которых можно вписать круг (см. рисунок). Докажите, что если круги, касающиеся стороны CD , равны, то и третий круг им равен.

(Михаил Евдокимов)

Уточним, что точки H и K предполагаются различными, как на рисунке (иначе утверждение задачи неверно).

Продлим отрезок AK до пересечения с прямой BC в точке E . Два правых круга симметричны относительно горизонтальной средней линии нашего прямоугольника. Значит, углы CBH и DAN равны, то есть AHB — равнобедренный прямоугольный треугольник. Поэтому и BHE — равнобедренный прямоугольный треугольник, равный треугольнику AHB . А окружности, вписанные в равные треугольники, равны.



4 [6]. По кругу стоят кувшины с соками, не обязательно одинакового размера. Из любого кувшина разрешается переливать любую часть сока (возможно, нисколько или весь сок) в соседний кувшин справа, так чтобы тот не переполнился и сладость смеси в нём стала равна 10%. Известно, что в начальный момент такое переливание удалось бы сделать из любого кувшина. Докажите, что можно сделать в каком-то порядке несколько таких переливаний (не более одного из каждого кувшина), так чтобы сладость смеси во всех непустых кувшинах стала равна 10%. (Сладость – это процент сахара в смеси, по весу. Сахар всегда равномерно распределён в кувшине.)

(Александр Шаповалов)

При смешивании двух соков получается какая-то промежуточная сладость между сладостями этих соков. Назовём кувшин *нормальным*, если он пустой или сладость в нём равна 10%; *кислым* — если сладость в нём меньше 10%, *сладким* — если больше. Аналогично дадим название чану, куда мысленно сольём весь сок.

Решение 1. Если какой-то кувшин нормальный, то переливание из него не изменит название кувшина справа. Значит, справа тоже нормальный кувшин, и так далее. Тогда все кувшины нормальные и переливаний не требуется.

Иначе имеем чередование кислых и сладких кувшинов (в частности, всего кувшинов чётное количество). Разобьём кувшины на пары соседних, чтобы левый кувшин пары был кислым. Переливанием в каждой паре сделаем сладкий кувшин нормальным. Значит, чан кислый или нормальный. Если бы разбили на пары по-другому, то получили бы сладкий или нормальный чан. Следовательно, чан нормальный и все левые кувшины в парах опустели.

Решение 2. Занумеруем кувшины по кругу так, что изначально в 1-м можно сделать 10%-ю сладость с помощью 2-го, во 2-м — с помощью 3-го, и так далее, в $(n - 1)$ -м кувшине — с помощью n -го, в n -м — с помощью 1-го.

Тогда сделаем 1-й кувшин нормальным с помощью 2-го. Во 2-м кувшине сладость осталась та же, только сока могло стать меньше, значит, его всё ещё можно сделать нормальным с помощью 3-го кувшина. Сделаем. Аналогично сделаем нормальными все кувшины, кроме n -го. Если чан сладкий, то n -й кувшин тоже стал сладким, но тогда он и был сладким (из него ведь просто отлили часть сока). Начав процесс с другого кувшина, выясняем, что все кувшины были сладкими. Но тогда нельзя было выполнить ни одного переливания. Аналогичную ситуацию получаем, если чан кислый. Следовательно, чан нормальный. Тогда и n -й кувшин стал нормальным, и мы добились требуемого.

5 [6]. Прямоугольная клетчатая доска покрашена в шахматном порядке в чёрный и белый цвета и разбита на доминошки 1×2 . Везде, где граничат по стороне горизонтальная и вертикальная доминошки, стоит дверка. Она покрашена в тот же цвет, что и примыкающая клетка той доминошки, которая примыкает короткой стороной. Обязательно ли белых дверок столько же, сколько чёрных?

(Борис Френкин)

Ответ: обязательно.

Решение 1. Рассмотрим стороны клеток на границе доски. Среди них поровну белых и чёрных (так как у доски есть чётная сторона). Каждая длинная сторона доминошки, выходящая на границу, даёт вклад из одной белой и одной чёрной стороны клетки. Тогда и среди коротких сторон, выходящих на границу, поровну белых и чёрных сторон клеток. Поэтому,

если мы сделаем новые дверки наружу в каждой короткой стороне доминошки, прилегающей к краю доски, то добавлено будет одинаковое количество белых и чёрных дверок.

Рассмотрим теперь произвольную клетчатую вертикаль (толщиной в одну клетку) и объединим в ней примыкающие друг к другу вертикальные доминошки в вертикальные полосы. В каждой получившейся полоске (если они есть) ровно две «горизонтальные» дверки, причём разного цвета (поскольку длина полоски чётна). Тогда в каждой вертикали поровну чёрных и белых дверок. То же верно и для горизонталей, а значит, и для всей доски.

Решение 2. Рассмотрим вертикальную прямую B , проходящую по границам клеток. Покажем, что на ней одинаковое количество белых и чёрных дверей.

Будем двигаться по B от самой нижней горизонтали к самой верхней. Без ограничения общности пусть первая встретившаяся дверь D_1 — белая. До этого все доминошки, примыкающие к B , начинались и кончались на одних и тех же горизонталях (какие-то горизонтальные доминошки могли пересекать B). Поэтому вертикальная доминошка, примыкающая к D_1 , закончится на 1 клетку выше, чем горизонтальная. Если по другую сторону от B стоит вертикальная доминошка, то она закончится ещё на 1 клетку выше, и т.д. Рано или поздно доминошки с обеих сторон от B закончатся на одинаковой высоте (на краю доски или раньше). Значит, встретится горизонтальная доминошка, напротив которой расположена верхняя клетка вертикальной доминошки, то есть мы придём к следующей двери D_2 (это могло произойти и сразу после двери D_1). В каждой из пройденных вертикальных доминошек нижняя клетка белая, а верхняя чёрная. Поэтому дверь D_2 чёрная.

Дальнейшее движение по прямой B происходит аналогично. Таким образом, белые и чёрные двери расположены на B парами. Аналогичное верно и для горизонтальных прямых. Отсюда следует ответ. (Из доказанного также следует, что общее количество дверей на вертикальных прямых чётно, как и на горизонтальных.)

10 – 11 классы,

1 [4]. Найдите наименьшее натуральное число, у которого найдутся четыре различных натуральных делителя с суммой 2025.

(Марк Алексеев)

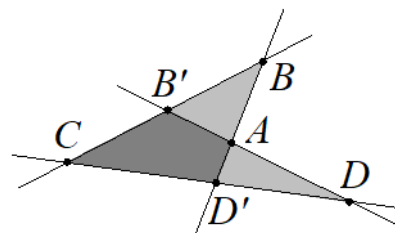
Ответ: 972. Сумма четырёх различных делителей числа n не больше $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{4} = \frac{25n}{12}$. Поэтому n будет самым маленьким в случае, когда $\frac{25n}{12} = 2025$, то есть $n = 972$. Это число подходит, так как 972 делится на 2, 3 и 4.

2 [4]. На плоскости провели 100 прямых, среди них никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Рассмотрим всевозможные четырёхугольники, все стороны которых лежат на этих прямых (в том числе четырёхугольники, внутри которых проведены линии). Обязательно ли выпуклых среди них столько же, сколько невыпуклых?

(Егор Бакаев)

Ответ: обязательно.

Рассмотрим произвольный невыпуклый четырёхугольник $ABCD$ из условия (угол A больше 180°). Продлив его стороны BA и DA до пересечения со сторонами DC и BC , получим выпуклый четырёхугольник $AB'CD'$ (см. рисунок). Обратно, продлив стороны выпуклого четырёхугольника, получим невыпуклый. Таким образом, все четырёхугольники разбиваются на пары выпуклый-невыпуклый.



3 [5]. По кругу стоят кувшины с соками, не обязательно одинакового размера. Из любого кувшина разрешается переливать любую часть сока (возможно, нисколько или весь сок) в соседний кувшин справа, так чтобы тот не переполнился и сладость смеси в нём стала равна 10%. Известно, что в начальный момент такое переливание удалось бы сделать из любого кувшина. Докажите, что можно сделать в каком-то порядке несколько таких переливаний (не более одного из каждого кувшина), так чтобы сладость смеси во всех непустых кувшинах стала равна 10%. (Сладость – это процент сахара в смеси, по весу. Сахар всегда равномерно распределён в кувшине.)

(Александр Шаповалов)

При смешивании двух соков получается какая-то промежуточная сладость между сладостями этих соков. Назовём кувшин *нормальным*, если он пустой или сладость в нём равна 10%; *кислым* — если сладость в нём меньше 10%, *сладким* — если больше. Аналогично дадим название чану, куда мысленно сольём весь сок.

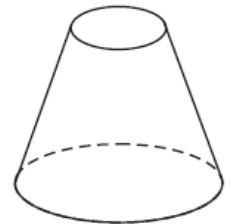
Решение 1. Если какой-то кувшин нормальный, то переливание из него не изменит название кувшина справа. Значит, справа тоже нормальный кувшин, и так далее. Тогда все кувшины нормальные и переливаний не требуется.

Иначе имеем чередование кислых и сладких кувшинов (в частности, всего кувшинов чётное количество). Разобьём кувшины на пары соседних, чтобы левый кувшин пары был кислым. Переливанием в каждой паре сделаем сладкий кувшин нормальным. Значит, чан кислый или нормальный. Если бы разбили на пары по-другому, то получили бы сладкий или нормальный чан. Следовательно, чан нормальный и все левые кувшины в парах опустели.

Решение 2. Занумеруем кувшины по кругу так, что изначально в 1-м можно сделать 10%-ю сладость с помощью 2-го, во 2-м — с помощью 3-го, и так далее, в $(n - 1)$ -м кувшине — с помощью n -го, в n -м — с помощью 1-го.

Тогда сделаем 1-й кувшин нормальным с помощью 2-го. Во 2-м кувшине сладость осталась та же, только сока могло стать меньше, значит, его всё ещё можно сделать нормальным с помощью 3-го кувшина. Сделаем. Аналогично сделаем нормальными все кувшины, кроме n -го. Если чан сладкий, то n -й кувшин тоже стал сладким, но тогда он и был сладким (из него ведь просто отлили часть сока). Начав процесс с другого кувшина, выясняем, что все кувшины были сладкими. Но тогда нельзя было выполнить ни одного переливания. Аналогичную ситуацию получаем, если чан кислый. Следовательно, чан нормальный. Тогда и n -й кувшин стал нормальным, и мы добились требуемого.

4 [5]. На плоскости стояло ведро, верхнее основание больше нижнего. Ведро перевернули. Докажите, что площадь его видимой тени уменьшилась. (Ведро — это прямой круговой усечённый конус: его основания — два круга, лежащие в параллельных плоскостях, центры кругов лежат на прямой, перпендикулярной этим плоскостям. Видимая тень — это вся тень, кроме тени под ведром. Солнечные лучи считайте параллельными.)



(Максим Дидин)

Верхнее основание параллельно плоскости, поэтому оно параллельно перенесётся светом. (То есть, тень круга, параллельного плоскости, — круг того же размера, лежащий в плоскости основания, с центром в «тени» центра круга.)

Усечённый конус является выпуклой оболочкой своих оснований. Поэтому полная тень

в обоих случаях — это выпуклая оболочка двух кругов, равных основаниям. При переворачивании ведра центры оснований меняются местами друг с другом, поэтому соединяющий их отрезок одинаково спроектируется в обоих случаях. Следовательно, полные тени равны (симметричны друг другу).



(На рисунке изображен случай, когда тени верхнего и нижнего оснований не пересекаются, но они могут пересекаться; меньшая тень даже может лежать внутри большей.)

Видимая тень получается удалением из полной тени нижнего основания. Поэтому у перевёрнутого ведра видимая тень меньше.

5 [6]. Дан многочлен с целыми коэффициентами, имеющий хотя бы один целый корень. Наибольший общий делитель всех его целых корней равен 1. Докажите, что если старший коэффициент многочлена равен 1, то наибольший общий делитель остальных коэффициентов тоже равен 1.

(Борис Френкин)

Пусть наш многочлен имеет вид $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Предположим противное: остальные коэффициенты многочлена имеют общий простой делитель p . Тогда, если s — целый корень многочлена, то $f(s) = 0$, откуда $s^n = -(a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)$ делится на p . Но тогда и s делится на p (так как p — простое). Значит, наибольший общий делитель всех целых корней делится на p . Противоречие.

Сложный вариант

8 – 9 классы

1 [4]. Учитель назвал две различные ненулевые цифры. Коля хочет составить делящееся на 7 семизначное число, в десятичной записи которого нет других цифр, кроме этих двух. Всегда ли Коля может это сделать, какие бы две цифры ни назвал учитель?

(Алексей Толпыго)

Ответ: не всегда. Если учитель назовет цифры 1 и 8, то каждое число, которое может составить Коля, будет давать тот же остаток от деления на 7, что и число 1111111 (поскольку отличается от Колиного на число, составленное из нулей и семёрок, которое кратно 7). Но число 1111111 на 7 не делится — оно даёт остаток 1 при делении на 7.

Замечание. Ещё одна «плохая» пара — 2 и 9. В остальных случаях Коля может добиться желаемого. Действительно, случай, когда одна из названных цифр равна 7, очевиден. Пусть обе названные цифры a и b отличны от 7, причём $0 < a - b = c \neq 7$. Тогда число \overline{aaaaaa} даёт остаток a при делении на 7. Заметим, что числа $c, 10c, \dots, 10^5c$ дают различные ненулевые остатки при делении на 7, и так как их шесть, то одно из них, скажем, $10^k c$, даёт остаток a при делении на 7. Тогда Коле подходит число $\overline{aaaaaa} - 10^k c$, состоящее из шести цифр a и одной цифры b .

2 [5]. В квадрате 2025×2025 отмечено несколько клеток. За один ход Кирилл может узнать количество отмеченных клеток в любом клетчатом квадрате со стороной меньше 2025 внутри исходного квадрата. Какого наименьшего количества ходов точно хватит, чтобы узнать количество отмеченных клеток во всём квадрате?

(Кирилл Никитин)

Ответ: 5 ходов. Обозначим исходный квадрат через K .

Оценка. Пусть ходов только 4. Ясно, что каждый из соответствующих четырёх квадратов должен содержать свою угловую клетку у K .

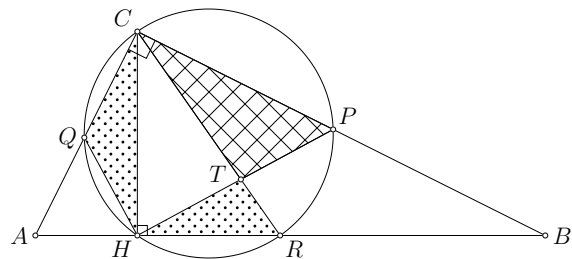
Если квадраты не покрывают K , то Кирилл ничего не узнает о количестве отмеченных клеток среди непокрытых. Если же квадраты покрывают K , то какие-то из них пересекаются (иначе рассмотрим квадрат, содержащий центральную клетку, его сторона не меньше 1013; но тогда стороны остальных квадратов не больше 1012, и взяв из них два квадрата, примыкающих к одной стороне K , видим, что эта сторона покрыта не полностью).

Пусть на каждом ходу отвечали, что отмечена одна клетка. Тогда отмеченных клеток в K могло быть как 4 (все его угловые клетки), так и меньше — когда была отмечена клетка из пересечения двух или более квадратов вместо углов K , попавших в эти квадраты.

Пример. Возьмём: 1) два квадрата со стороной 1013, покрывающие два противоположных угла; 2) центральную клетку; 3) два квадрата со стороной 1012, покрывающие два других противоположных угла. Первые два квадрата пересекаются как раз по центральной клетке, так что по первым трём числам мы узнаем, сколько отмеченных клеток покрывают первые три квадрата. Остальное покрывают (без пересечений) оставшиеся два квадрата.

3 [5]. В треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту CH . Некоторая окружность, проходящая через точки C и H , повторно пересекает отрезки AC , CB и BH в точках Q , P и R соответственно. Отрезки HP и CR пересекаются в точке T . Что больше: площадь треугольника CPT или сумма площадей треугольников CQH и HTR ?

(Михаил Евдокимов)



Ответ: эти выражения равны.

Первое решение. Добавим к обеим суммам площадь треугольника RTP . Тогда надо сравнить площадь треугольника PCR и сумму площадей треугольников CHQ и PHR .

Заметим, что PQ и CR — диаметры окружности из условия, поэтому $CPRQ$ — прямоугольник. Площадь треугольника PCR равна половине площади прямоугольника. Но у треугольников PHR и CHQ равные основания PR и CQ , а сумма их высот, опущенных на PR и CQ соответственно, равна стороне PC прямоугольника. Поэтому их суммарная площадь — тоже половина площади прямоугольника.

Второе решение. Добавим к рассматриваемым площадям площадь четырёхугольника $BPTR$. Получим, что нужно проверить равенство

$$S_{CQH} + S_{BPH} = S_{BRC}.$$

Из вписанности $CPRH$ следует, что $\angle PHR = \angle PCR$. Поскольку PQ — диаметр окружности, то $\angle PHQ = 90^\circ = \angle CHB$, поэтому

$$\angle CHQ = \angle PHR = \angle PCR.$$

Каждый из углов HCQ и CBH дополняет угол BCH до 90° , поэтому

$$\angle HCQ = \angle PBH = \angle RBC.$$

Следовательно, треугольники CQH , BPH и BRC подобны по двум углам. Тогда площади этих треугольников относятся как квадраты коэффициентов подобия, поэтому

$$S_{CQH} + S_{BPH} = \left(\frac{CH}{BC}\right)^2 \cdot S_{BRC} + \left(\frac{BH}{BC}\right)^2 \cdot S_{BRC} = \frac{CH^2 + BH^2}{BC^2} \cdot S_{BRC} = S_{BRC}.$$

4. Даны $2N$ действительных чисел. Известно, что как ни разбей их на две группы по N чисел, произведение чисел первой группы отличается от произведения чисел второй группы не более чем на 2. Верно ли, что как ни расставь эти числа по кругу, найдутся два соседних числа, различающихся не более чем на 2, если а) [3] $N = 50$; б) [5] $N = 25$?

(Илья Богданов)

а) **Ответ:** неверно. Пусть 50 чисел равны 2, а остальные 50 равны -2 . Тогда при любом разбиении их на две группы по 50 чисел произведения в группах будут одинаковы (так как отрицательных чисел чётное количество). Но расставив числа по кругу, чередуя положительные с отрицательными, получим контрпример.

б) **Ответ:** верно. Разобьём числа по кругу на 25 пар соседних чисел. В каждой паре вычтем из большего числа меньшее. Пусть все разности больше 2. Перемножив эти разности, получим число, большее 2^{25} .

Но если в этом произведении разностей раскрыть скобки, то слагаемые (коих будет 2^{25}) можно сгруппировать по парам: произведение каких-то 25 исходных чисел минус произведение 25 оставшихся (будет именно знак минус из-за нечётности числа 25). Пар произведений будет $2^{25} : 2 = 2^{24}$, и их сумма не превосходит 2^{25} по условию. Противоречие.

5 [8]. Имеется 15 неразличимых на вид монет. Известно, что одна из них весит 1 г, две — по 2 г, три — по 3 г, четыре — по 4 г, пять — по 5 г. На монетах есть соответствующие надписи с указанием масс. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь проверить, все ли надписи сделаны верно? (Не требуется определять, какие именно надписи верны, а какие нет.)

(Александр Грибалко)

Для обозначения монет будем использовать надписи, которые сделаны на них.

Первое взвешивание: сравним $1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3$ и $5 + 5 + 5$. Минимальный возможный вес монет на первой чаше равен 14 г, а максимальный на правой — 15 г. Поэтому если левая чаша легче, то ней именно такой набор монет (возможно, с перепутанными надписями), а на правой — три монеты массой 5 г.

Второе взвешивание: сравним $1 + 4 + 4 + 4 + 5^*$ и $3 + 3 + 3 + 5 + 5$, где 5^* — монета, про которую уже известно, что она весит 5 г, а 5 — монета про которую мы этого не знаем.

Минимальный возможный вес монет на первой чаше — 18 г, а максимальный на правой — 19 г. Значит, если левая чаша легче, то на всех монетах на весах надписи сделаны верно. Тогда на оставшихся монетах 2, 2 и 4 надписи также правильные.

Если хоть одно из взвешиваний даст другой результат, то среди надписей есть ошибочные.

Замечание. В качестве второго взвешивания можно также сравнить $1 + 4 + 4 + 5^* + 5^*$ и $3 + 3 + 3 + 5 + 5$.

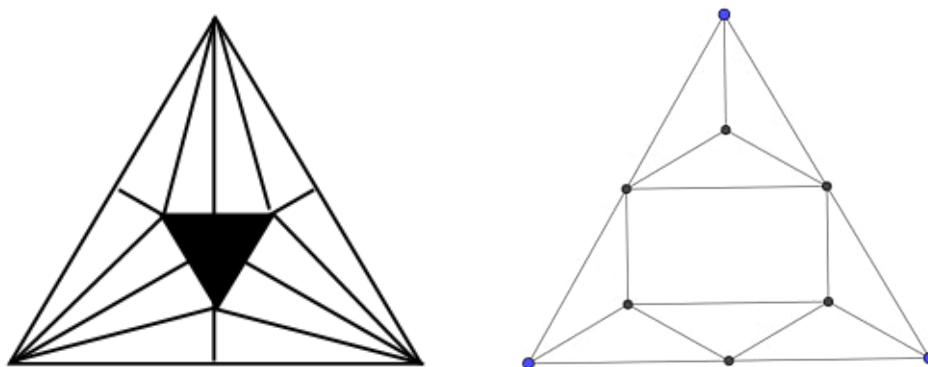
6. *Равносторонний треугольник разрезан на белые и чёрные треугольники. Известно, что все белые треугольники — прямоугольные и равны друг другу, а все чёрные — равнобедренные и тоже равны друг другу. Обязательно ли кратны 30° все углы а) [4] у белых треугольников; б) [5] у чёрных треугольников?*

(Алексей Заславский)

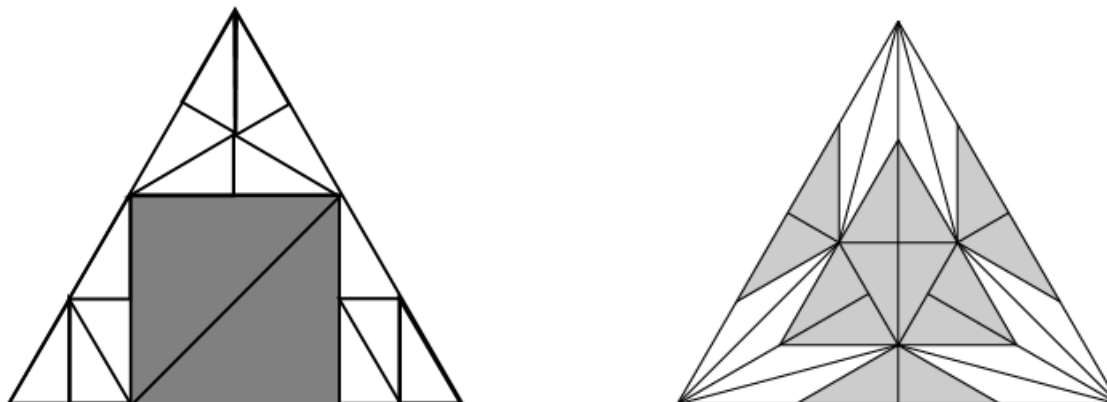
Ответ: не обязательно в обоих пунктах.

а) Контрпример приведён ниже на левом рисунке. Острые углы прямоугольных треугольников равны 15° и 75° .

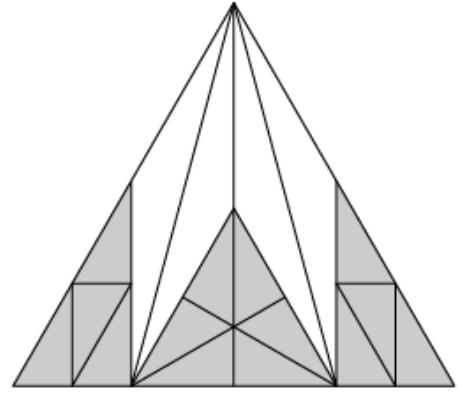
Замечание. Имеется бесконечно много других примеров. Пусть A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB равностороннего треугольника ABC , и пусть A_1, B_1 — центры треугольников AB_0C_0, BC_0A_0 соответственно. Тогда $A_0B_0A_1B_1$ — прямоугольник, который можно разрезать на прямоугольные треугольники бесконечно многими способами, а остальная часть режется на 8 треугольников с углами $120^\circ, 30^\circ$ и 30° (см. ниже правый рисунок).



б) Ниже приведены два контрпримера. Во втором все 12 равнобедренных треугольников имеют углы $15^\circ, 15^\circ$ и 150° , а все 14 прямоугольных — $90^\circ, 60^\circ$ и 30° .



Третий пример (на рисунке справа) построен так. Возьмём на стороне AB треугольника ABC такие точки U, V , что $\angle ACU = \angle BCV = 15^\circ$, на сторонах AC, BC точки X, Y соответственно, а на биссектрисе угла C точку Z так, что $XU \parallel CZ \parallel YV$, $XU = CZ = YV$. Тогда $CXUZ, CYVZ$ — ромбы, которые можно разрезать на четыре равных треугольника с углами $15^\circ, 15^\circ$ и 150° (или $75^\circ, 75^\circ$ и 30°). Теперь, проведя в прямоугольных треугольниках AUX, BVY средние линии, а в правильном треугольнике UVZ медианы, получим 14 равных прямоугольных треугольников.



7. Хозяйка достала кусок мяса из холодильника, вокруг неё собрались котята. Раз в минуту хозяйка отрезает кусочек мяса и скармливает его одному из котят (на свой выбор), причём каждый кусочек должен составлять одну и ту же долю куска, от которого его отрезают. Через некоторое время хозяйка убирает остаток мяса в холодильник. Может ли хозяйка скормить котят поровну мяса, если всего котят а) [3] двое; б) [7] трое?

(Андрей Кушнин)

Ответы: может в обоих пунктах.

Пусть вес исходного куска равен 1, а вес куска, оставшегося после первого отрезания, равен a . Тогда доля отрезаемого куска каждый раз равна $1 - a$. Значит, вес второго отрезанного куска равен $a(1 - a)$, а вес оставшегося равен $a - a(1 - a) = a^2$, и так далее: после k -того отрезания вес оставшегося куска равен a^k , а вес отрезанного равен $(1 - a)a^k$. Сократив на $(1 - a)$, получим, что задачу можно переформулировать так:

для некоторого a между 0 и 1 и натурального k нужно разбить числа $1, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ на группы с равными суммами (две группы в пункте а) и три группы в пункте б)).

а) Заметим, что квадратное уравнение $1 = x + x^2$ имеет корень a между 0 и 1 (например, потому, что при $x = 0$ правая часть меньше 1, а при $x = 1$ она больше 1; или можно явно найти этот корень: $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$). Мы нашли нужное разбиение чисел $1, a, a^2$ на две части с равными суммами: $\{1\}$ и $\{a, a^2\}$. (Тогда, отдав одному котенку первый кусочек, а другому — два следующих, хозяйка получит желаемый результат.)

б) Заметим, что квадратное уравнение $1 = x + x^3$ имеет корень a между 0 и 1 (например, потому, что при $x = 0$ правая часть меньше 1, а при $x = 1$ она больше 1).

Поскольку $1 = a + a^3$, то для любого натурального k выполнено равенство $a^k = a^{k+1} + a^{k+3}$. Тогда

$$1 = a + a^3 = (a^2 + a^4) + a^3 = a^2 + (a^5 + a^7) + (a^4 + a^6) = a^2 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7.$$

Таким образом, для $n = 8$ и указанного a числа $1, a, \dots, a^7$ можно разбить на три группы с равными суммами:

$$\{1\}, \quad \{a, a^3\}, \quad \{a^2, a^4, a^5, a^6, a^7\}.$$

Замечание 1. Существуют и другие разбиения:

$$\begin{aligned} 1 &= a + a^4 + a^6 = a^2 + a^3 + a^5 + a^7, \\ 1 &= a^2 + a^3 + a^4 = a + a^5 + a^6 + a^7. \end{aligned}$$

Замечание 2. Существуют примеры с другим значением a . Например, если a — корень уравнения $1 = x^2 + x^3$, то

$$1 + a^4 = a + a^2 = a^3 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12}.$$

Замечание 3. Для четырёх котиков также существует пример. Если a — корень уравнения $1 = x^2 + x^3$, то

$$1 = a^2 + a^3 = a + a^5 = a^4 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} + a^{13}.$$

Замечание 4 (для знатоков). В настоящий момент не известно, разрешима ли задача для $k \geq 5$ котиков. Есть лишь несколько дополнительных соображений, которые могут помочь в анализе общего случая. За каждым разбиением должен стоять неприводимый многочлен (как $a^3 + a - 1$ в решении задачи, или как $a^3 + a^2 - 1$ в замечании 2), на который делятся разности элементов разбиения. Этот многочлен должен иметь действительный корень $a \in (0, 1)$, удовлетворяющий дополнительным условиям. Так как одна из частей разбиения не меньше 1, то сумма остальных частей не меньше $k - 1$. Значит

$$a + a^2 + \dots = \frac{a}{1 - a} > k - 1.$$

То есть корень многочлена должен лежать в интервале $(1 - \frac{1}{k}, 1)$, и не должно быть корней в интервале $(0, 1 - \frac{1}{k})$ (если бы такой корень был, то для него те же части, тоже были бы равны, что невозможно). В частности, это означает что многочлен не может быть возвратным.

Более простым для исследования является случай, когда одна из долей в точности равна 1. Тогда для некоторого n искомый неприводимый многочлен должен быть делителем многочлена

$$a^n + a^{n-1} + \dots + a - (k - 1).$$

Если все многочлены такого вида окажутся неприводимыми, то это будет означать что разбиение на k частей (когда одна из долей равна 1) невозможно. Пока доказательство последнего утверждения известно только для $k = 5$, см. <https://mathoverflow.net/q/490414/5712>

10 – 11 классы

1 [5]. Существует ли такое положительное число $x > 1$, что

$$\{x\} > \{x^2\} > \{x^3\} > \dots > \{x^{100}\}?$$

(Здесь $\{x\}$ — дробная часть числа x , то есть разность между x и ближайшим целым числом, не превосходящим x .)

(Алексей Толпыго)

Ответ: существует.

Решение 1. Возьмём $x = 10^{100} + 0,1$. Тогда

$$x^n = 10^{100n} + C_n^1 10^{100(n-1)}(0,1) + \dots + C_n^{n-1} 10^{100}(0,1)^{n-1} + (0,1)^n,$$

откуда $\{x_n\} = (0,1)^n$ при $n \leq 100$.

Решение 2. Возьмём $x = 2 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 2^{-200}$. Тогда

$$x^n = 2^n - 2^{n-1}n\varepsilon + R\varepsilon^2,$$

где

$$|R| < 2^{n-2}(C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n) < 2^{200}$$

при $n \leq 100$, откуда

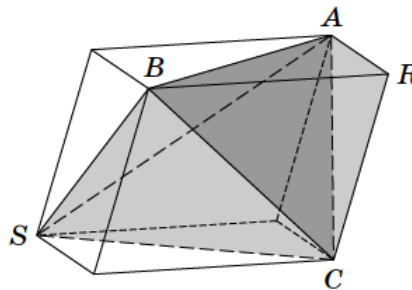
$$(2^{n-1}n - 1)\varepsilon < 1 - \{x^n\} < (2^{n-1}n + 1)\varepsilon < 1.$$

Следовательно, $0 < 1 - \{x\} < 1 - \{x^2\} < 1 - \{x^{100}\}$, что и требовалось.

2 [6]. Даны две треугольные пирамиды с общим основанием ABC . Их вершины S и R лежат по разные стороны от плоскости ABC . Оказалось, что рёбра SA, SB, SC первой пирамиды параллельны соответственно граням BCR, ACR и ABR второй пирамиды. Докажите, что объём одной из этих пирамид вдвое больше объёма другой.

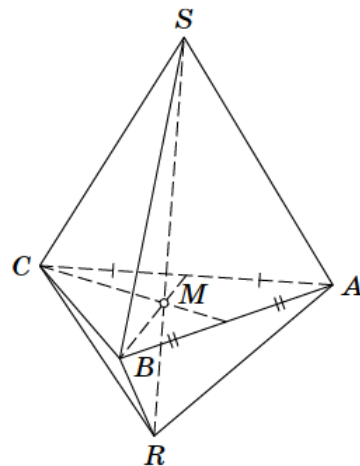
(Михаил Евдокимов)

Первый способ. Пусть рёбра SA, SB, SC параллельны граням BCR, ACR и ABR соответственно. Проведём через SA, SB, SC плоскости, которые параллельны BCR, ACR и ABR соответственно. Получается параллелепипед, пять вершин которого совпадают с вершинами наших пирамид (рисунок справа). Пусть V — объём этого параллелепипеда.



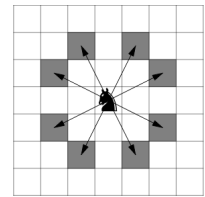
Тогда объём пирамиды $RABC$ равен $\frac{V}{6}$, как и объём трёх других пирамид, основаниями которых являются грани тетраэдра $SABC$. Поэтому объём пирамиды $SABC$ равен $V - 4\frac{V}{6} = 2 \cdot \frac{V}{6}$, то есть вдвое больше объёма пирамиды $RABC$, что и требовалось доказать.

Второй способ. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC (рисунок справа). Пусть α, β, γ — плоскости, проходящие через точки A, B, C , параллельные плоскостям BCR, ACR, ABR соответственно. Поскольку $SA \parallel BCR$, точка S лежит в плоскости α . Аналогично, она лежит и в плоскостях β и γ . Пусть R' — образ точки R при гомотетии с центром в точке M и коэффициентом -2 . При этой гомотетии середина отрезка BC переходит в A , поэтому плоскость BCR переходит в плоскость α . Значит, $R' \in \alpha$. Аналогично, $R' \in \beta$ и $R' \in \gamma$. Плоскости ABR, BCR, ACR имеют единственную общую точку, поэтому их образы α, β, γ при рассматриваемой гомотетии тоже имеют единственную общую точку. Таким образом, получаем, что $R' = S$.



По построению точки R' расстояние от неё до плоскости ABC в два раза больше, чем расстояние от R до этой плоскости, поэтому объём пирамиды $R'ABC$ (она же $SABC$) вдвое больше объёма пирамиды $RABC$.

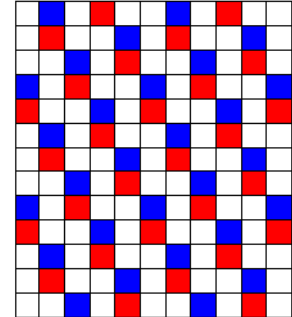
3 [7]. Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости расставить бесконечное количество шахматных коней (не более одного коня в клетку) так, чтобы каждый конь был ровно 5 других?
(Напомним, что шахматный конь бьёт 8 клеток, как показано на рисунке.)



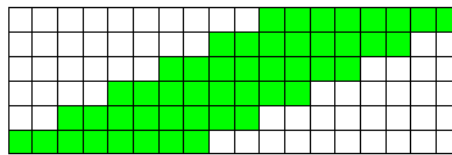
(Александр Тертерян)

Ответ: можно.

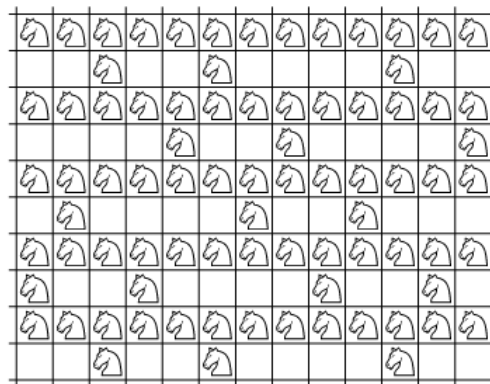
Способ 1. Выложим на плоскости красно-синие доминошки, как на рисунке справа (показан кусок бесконечного паркета), и поставим коней на все цветные клетки. Каждый конь бьёт четырёх коней на клетках своего цвета и одного на клетке другого цвета.



Способ 2. Поставим коней на зелёные клетки рисунка ниже (показан кусок бесконечного паркета).



Способ 3. Поставим коней, как показано на рисунке ниже (показан кусок бесконечного паркета).



Замечание 1. Приведённые способы расстановки коней принципиально различаются тем, что в первом примере «плотность коней» — $2/5$, во втором — нулевая, а в третьем — $5/8$. Подумайте, какие ещё значения плотности реализуются.

Замечание 2. Можно раскрасить всю плоскость в 5 цветов, как показано на рисунке ниже. При этом конь в каждой клетке каждого цвета будет бить четыре клетки того же цвета и по одной клетке каждого из остальных цветов. Таким образом, для построения примера к задаче достаточно выбрать какие-то два цвета и поставить коней на все клетки этих цветов. Аналогично можно построить пример, в котором каждый конь бьёт 6 или 7 других: для этого достаточно взять все клетки трёх или четырёх цветов.

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2

4 [8]. В стране, валюта которой — тугрики, ходят только купюры двух целочисленных достоинств. И покупатель, и продавец имеют достаточно много и тех, и других купюр, но при каждом платеже могут использовать вместе не более k купюр (включая сдачу). Известно, что так можно сделать платёж на любую целую сумму от 1 до n тугриков. Каково наибольшее возможное n (в зависимости от k)?

(Александр Шаповалов)

Ответ: $n = k(k + 1)$.

Оценка. Пусть используются купюры достоинств P и Q . Пусть купюр в платеже ровно m . Если сдача не нужна, то есть $m + 1$ вариант: от 0 до m купюр P , остальные — Q . Если есть сдача, то платят купюрами одного вида, а сдачу дают купюрами другого вида. Тогда возможен $m - 1$ вариант: используется от 1 до $m - 1$ купюр P , остальные — Q . Всего для m купюр есть $2m$ вариантов. Суммируя по всем возможным m , получим $2(1 + 2 + \dots + k) = k(k + 1)$ возможных вариантов сумм.

Пример. Будем использовать купюры в k и $k + 1$ тугрик. Докажем, что любая сумма от 1 до $k(k + 1)$ тугриков представляется в виде $ak + b(k + 1)$, где $|a| + |b| \leq k$.

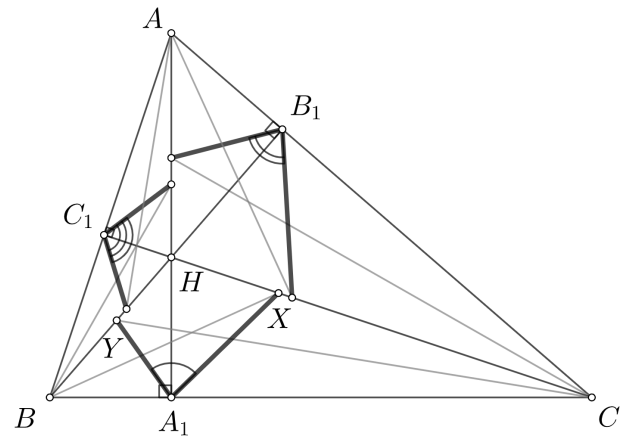
Сначала докажем, что все такие представления дают разные суммы. Пусть эта же сумма представлена иначе $ck + d(k + 1)$. Поскольку и тут $|c| + |d| \leq k$, то $|a| + |b| + |c| + |d| \leq 2k$.

Из равенства $ak + b(k + 1) = ck + d(k + 1)$ следует, что $(a - c)k = (d - b)(k + 1)$. Тогда $a - c$ кратно $k + 1$, $d - b$ кратно k , и обе разности не равны 0. Значит, $k + 1 \leq |a - c| \leq |a| + |c|$, $k \leq |d - b| \leq |d| + |b|$, откуда $2k + 1 \leq |a| + |b| + |c| + |d|$. Противоречие.

Итак, все представления указанного вида дают разные суммы. Так как максимальная сумма равна $k(k + 1)$, все суммы целые, и всего их $k(k + 1)$, то получаются все суммы от 1 до $k(k + 1)$.

5 [10]. Высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Биссектрисы углов B и C треугольника BHC пересекают отрезки CH и BH в точках X и Y соответственно. Обозначим величину угла XA_1Y через α . Аналогично определим β и γ . Найдите значение суммы $\alpha + \beta + \gamma$.

(Алексей Доледенюк)

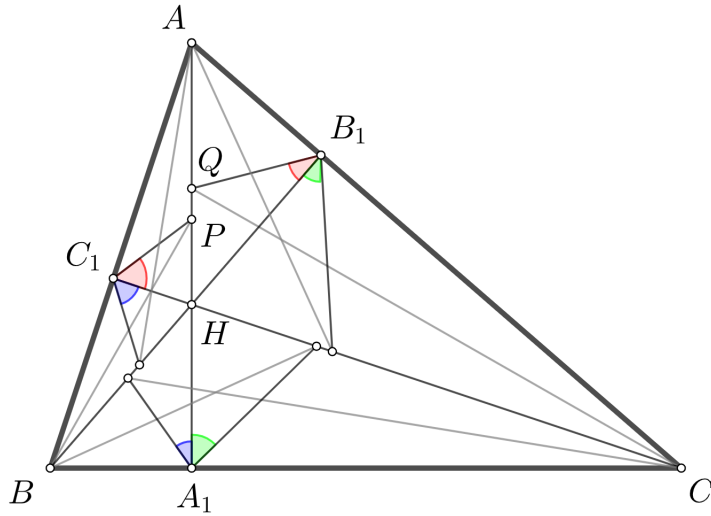


Ответ: 270° .

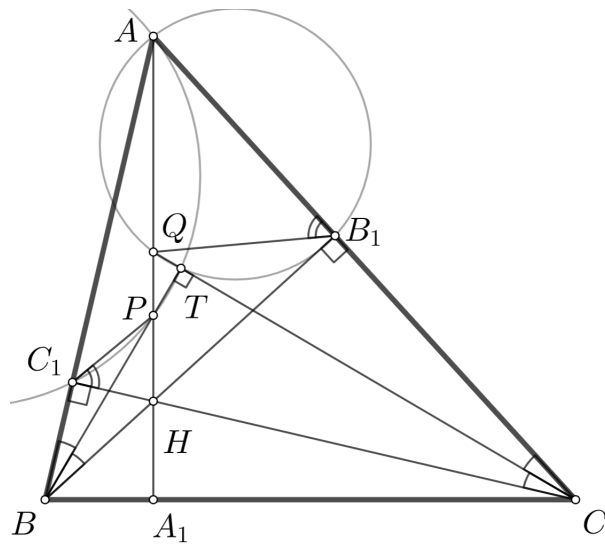
Обозначим точки пересечения биссектрис углов ABH и ACH с отрезком AH через P и Q соответственно. Докажем, что

$$\angle PC_1H = \angle AB_1Q = 90^\circ - \angle QB_1H.$$

Из этого будет следовать решение задачи — сумма из условия разбивается на три пары углов с суммой 90° (см. рисунок), то есть искомая сумма будет равна 270° .



Способ 1. Окружность, построенная на BC как на диаметре, проходит через точки B_1 и C_1 , а биссектрисы вписанных углов B_1BC_1 и B_1CC_1 проходят через середину дуги B_1C_1 , на которую они опираются; обозначим её через T . Таким образом, T — это точка пересечения прямых BP и CQ .



Поскольку

$$\angle BTC_1 = \angle BCC_1 = \angle BAA_1,$$

то точки A, T, P, C_1 лежат на одной окружности. Аналогично точки A, T, Q, B_1 лежат на одной окружности.

Тогда

$$\begin{aligned} \angle AC_1P + \angle AB_1Q &= (180^\circ - \angle ATP) + (180^\circ - \angle ATC) = \\ &= 360^\circ - (\angle ATP + \angle ATC) = 360^\circ - (360^\circ - \angle BTC) = \\ &= \angle BTC = 90^\circ, \end{aligned}$$

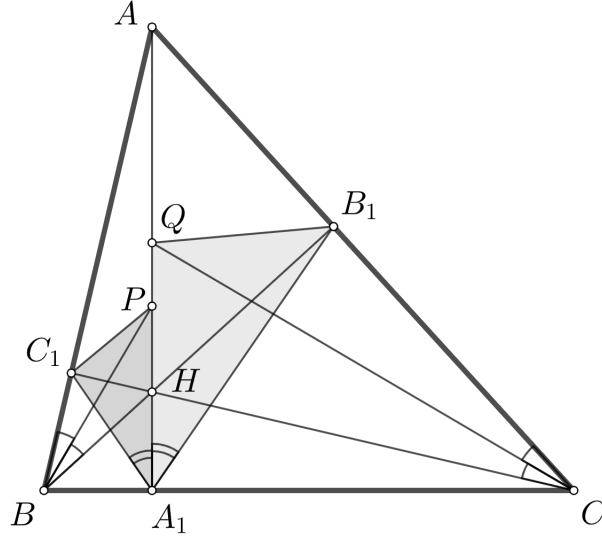
что и требовалось.

Способ 2. Так как $\angle ABH = \angle ACH$, то и $\angle ABP = \angle HCQ$, поэтому

$$\angle BPA_1 = \angle ABP + \angle BAP = \angle HCQ + \angle BCH = \angle BCQ.$$

Следовательно, прямоугольные треугольники BPA_1 и QCA_1 подобны по двум углам, поэтому

$$\frac{BA_1}{PA_1} = \frac{QA_1}{A_1C} \Leftrightarrow BA_1 \cdot A_1C = PA_1 \cdot QA_1. \quad (1)$$



Как известно, треугольники A_1BC_1 и A_1B_1C подобны треугольнику ABC , а следовательно, подобны друг другу. Отсюда

$$\frac{BA_1}{A_1C_1} = \frac{B_1A_1}{A_1C} \Leftrightarrow BA_1 \cdot A_1C = B_1A_1 \cdot A_1C_1. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$PA_1 \cdot QA_1 = B_1A_1 \cdot A_1C_1 \Leftrightarrow \frac{PA_1}{A_1C_1} = \frac{B_1A_1}{QA_1}.$$

Воспользуемся ещё одним известным фактом: высота AA_1 — это биссектриса угла $B_1A_1C_1$. Из того, что $\angle C_1A_1P = \angle B_1A_1Q$ получаем, что треугольники PC_1A_1 и B_1QA_1 подобны по углу и отношению прилежащих сторон, откуда $\angle A_1C_1P = \angle A_1QB_1$.

Тогда

$$\angle PC_1H = \angle A_1C_1P - \angle A_1C_1C = \angle A_1QB_1 - \angle A_1AC = \angle AB_1Q,$$

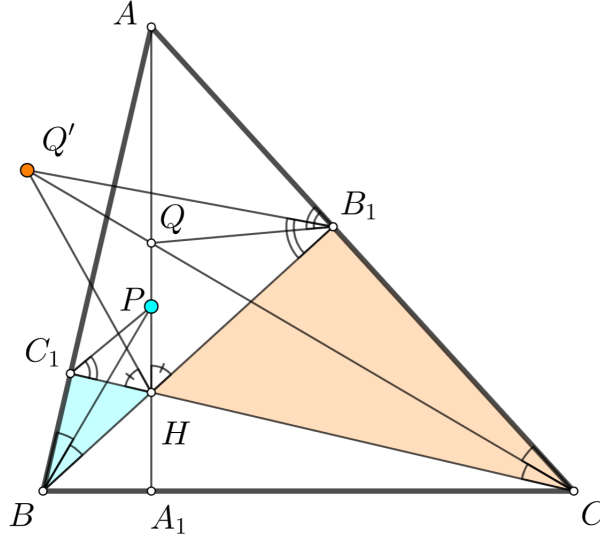
что и требовалось доказать.

Замечание для знатоков. Это решение можно переформулировать в терминах инверсии. Рассмотрим композицию инверсии с центром в точке A_1 радиуса $\sqrt{BA_1 \cdot A_1C}$ и симметрии относительно прямой AA_1 . При этой композиции меняются местами точки B и C , A и H . Окружность, построенная на BC как на диаметре, переходит в себя, поэтому точки B_1 и C_1 меняются местами. Если точка P переходит в P' , то по свойству инверсии $\angle PBH = \angle P'CA$, то есть $P' = Q$. Но тогда $\angle PC_1H = \angle QB_1A$, что и требовалось.

Способ 3. Пусть Q' — точка, изогонально сопряжённая Q относительно треугольника B_1CH . Так как

$$\angle ACQ' = \angle ACQ = \angle C_1BP \quad \text{и} \quad \angle Q'HC_1 = \angle QHB_1 = \angle PHB_1,$$

то точки P и Q' — соответствующие точки в подобных треугольниках BC_1H и CB_1H . Тогда $\angle AB_1Q = \angle HB_1Q' = \angle HC_1P$, что и требовалось доказать.

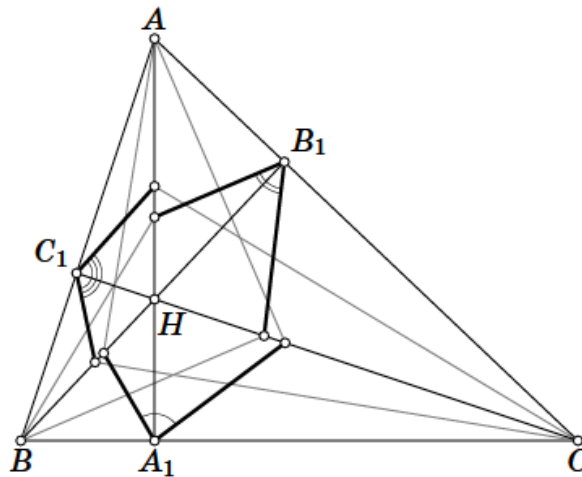


Способ 4. Введём такие обозначения для углов: $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, $\angle PC_1H = \varphi$, $\angle AB_1Q = \psi$. Через $\rho(X, \ell)$ будем обозначать расстояние от точки X до прямой ℓ . Воспользовавшись тем, что P лежит на биссектрисе угла ABB_1 , и тем, что $\angle AHC_1 = \gamma$ и $\angle AHB_1 = \beta$, получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{C_1P \cdot \sin \varphi}{C_1P \cdot \sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{\rho(P, CC_1)}{\rho(P, AC_1)} = \frac{\rho(P, CC_1)}{\rho(P, BB_1)} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Аналогично $\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$, то есть $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \psi$. Поскольку φ и ψ меньше 90° , то равенство их тангенсов равносильно их равенству, то есть $\varphi = \psi$.

Комментарий. Соединим точку A_1 с основаниями биссектрис углов BAH и CAH , то же сделаем для точек B_1 и C_1 . Аналогично доказывается, что сумма полученных углов равна 270° .



6 [10]. Барон Мюнхгаузен утверждает, что существуют многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами и натуральные числа m и n со свойством: $f(m)$ не делится на n , но $f(p^k)$ делится на n для любого простого p и любого натурального k . Не ошибается ли барон?
(Алексей Волостнов, Станислав Гришин)

Ответ: существует.

Пример 1. Возьмём $f(x) = (x - 5)(x - 4)(x - 3)(x - 2)(x - 1)x(x + 1)$, $m = 6$, $n = 32$. При нечётном x получаем тогда, что $f(x)$ делится на произведение четырёх последовательных чётных чисел, одно из которых кратно 4. Далее, $f(2) = f(4) = 0$. При $k \geq 3$ имеем: $f(2^k)$ делится на $2^k(2^k - 4)$, что делится на 32. Но $f(6) = 7!$ не делится на 32.

Пример 2. Рассмотрим $f(x) = (x - 3)(x - 9)(x^{18} - 1)$, $m = 6$, $n = 27$. Тогда $f(6)$ не делится на 27. В то же время, если $p = 3$, то p^k даёт остаток 0, 3 или 9 при делении на 27 и $f(p^k)$ делится на 27, а при $p \neq 3$ число $(p^k)^{18} - 1$ делится на 27 по теореме Эйлера.

Замечание. Если добавить условие взаимной простоты чисел n и m , то ответ к задаче изменится на противоположный. В самом деле, предположим, что такое m нашлось. Нетрудно видеть, что в качестве n всегда можно брать степень простого числа. Действительно, если $f(m)$ не делится на n , то оно не делится и на q^l для некоторого простого q , для которого $n = bq^l$. В то же время из равенства $f(p^k) \equiv 0 \pmod{n}$ следует аналогичное равенство и для q^l . Если существует простое число r вида $q^l y + m$, то для него выполняются сравнения $0 \equiv f(r) \equiv f(m) \pmod{q^l}$. Существование такого простого числа следует из известной в теории чисел *теоремы Дирихле* о простых числах в арифметической прогрессии. Она утверждает, что в любой арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d , где натуральные числа a и d взаимно просты, найдётся бесконечно много простых чисел. Доказательство этой теоремы выходит далеко за рамки школьной программы.

7 [12]. Петя красит каждую клетку доски $2m \times 2n$ в чёрный или белый цвет так, чтобы клетки каждого цвета образовывали многоугольник. Затем Вася разрезает доску на доминошки (прямоугольники из двух клеток). Петя стремится к тому, чтобы в итоге получилось как можно больше двухцветных доминошек, а Вася — к тому, чтобы их получилось как можно меньше. Наличие какого наибольшего числа двухцветных доминошек может гарантировать Петя, как бы ни действовал Вася?
(Напомним, что граница многоугольника — замкнутая ломаная без самопересечений.)
(Александр Грибалко)

Ответ: $(m - 1)(n - 1) + 1$ доминошек.

Покажем, что как бы Петя ни раскрасил доску, Вася сможет разрезать её так, чтобы получить не более $(m - 1)(n - 1) + 1$ двухцветных доминошек. Он мысленно делит доску на каёмку ширины 1 и на $(m - 1)(n - 1)$ квадратов 2×2 .

Ни один из этих квадратов не может быть окрашен в шахматном порядке, иначе чёрный и белый многоугольники пересекались бы. Поэтому Вася может разрезать каждый из квадратов на две доминошки, хотя бы одна из которых одноцветна.

Докажем, что чёрные и белые клетки каёмки образуют связные множества. Если это не так, то рассмотрим две несоседние чёрные области на каёмке. Между ними есть путь по чёрным клеткам, в котором каждый переход делается в соседнюю по стороне клетку. Этот путь разбивает доску на две части, каждая из которых содержит белые клетки. Но тогда между этими клетками не может быть пути по белым клеткам, то есть белые клетки не образуют многоугольник.

Из доказанного утверждения следует, что если Вася будет резать каёмку на доминошки, начав от границы двух цветов, то получит максимум одну двухцветную доминошку на следующем стыке цветов. Таким образом, всего Вася получит не более $(m - 1)(n - 1) + 1$ двухцветных доминошек.

Теперь покажем, как может Петя покрасить доску, чтобы гарантировать такое количество. Он также мысленно делит доску на те же части, а клетки нумерует числами -1 и 1 в шахматном порядке.

В каёмке Петя красит в чёрный цвет все нижние клетки, кроме самой левой. Столбцы из квадратов 2×2 он нумерует по порядку и в нечётных столбцах красит в чёрный цвет трёхклеточные уголки в каждом квадрате, а в чётных — по одной клетке, как показано на рисунке. Остальные клетки Петя красит в белый цвет.

1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

Очевидно, что чёрные и белые клетки образуют многоугольники. Кроме того, в каждой области сумма чисел в чёрных клетках равна 1, поэтому во всём чёрном многоугольнике эта сумма равна $(m - 1)(n - 1) + 1$. Так как сумма в каждой доминошке равна нулю, то Вася при разрезании вынужден будет создать не менее $(m - 1)(n - 1) + 1$ двухцветных доминошек.