СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 16 марта 2025 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. Учитель назвал две различные ненулевые цифры. Коля хочет составить делящееся на 7
4 семизначное число, в десятичной записи которого нет других цифр, кроме этих двух. Всегда
ли Коля может это сделать, какие бы две цифры ни назвал учитель?

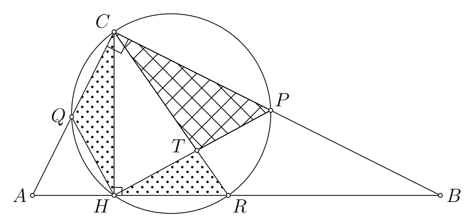
Алексей Толпыго

2. В квадрате 2025×2025 отмечено несколько клеток. За один ход Кирилл может узнать ко-
5 личество отмеченных клеток в любом клетчатом квадрате со стороной меньше 2025 внутри
исходного квадрата. Какого наименьшего количества ходов точно хватит, чтобы узнать ко-
личество отмеченных клеток во всём квадрате?

Кирилл Никитин

3. В треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту
CH. Некоторая окружность, проходящая через точки C
5 и H, повторно пересекает отрезки AC, CB и BH в точ-
ках Q, P и R соответственно. Отрезки HP и CR пере-
секаются в точке T. Что больше: площадь треугольника
CPT или сумма площадей треугольников CQH и HTR?

Михаил Евдокимов



4. Даны $2N$ действительных чисел. Известно, что как ни разбей их на две группы по N чисел, произведение чисел первой группы отличается от произведения чисел второй группы не более чем на 2. Верно ли, что как ни расставь эти числа по кругу, найдутся два соседних числа, различающихся не более чем на 2, если

3 а) $N = 50$;

5 б) $N = 25$?

Илья Богданов

5. Имеется 15 неразличимых на вид монет. Известно, что одна из них весит 1 г, две – по 2 г,
8 три – по 3 г, четыре – по 4 г, пять – по 5 г. На монетах есть соответствующие надписи с ука-
занием масс. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь проверить, все ли надписи
сделаны верно? (Не требуется определять, какие именно надписи верны, а какие нет.)

Александр Грибалко

6. Равносторонний треугольник разрезан на белые и чёрные треугольники. Известно, что все белые треугольники — прямоугольные и равны друг другу, а все чёрные — равнобедренные и тоже равны друг другу. Обязательно ли кратны 30° все углы

4 а) у белых треугольников;

5 б) у чёрных треугольников?

Алексей Заславский

7. Хозяйка достала кусок мяса из холодильника, вокруг неё собрались котята. Раз в минуту хозяйка отрезает кусочек мяса и скармливает его одному из котят (на свой выбор), причём каждый кусочек должен составлять одну и ту же долю куска, от которого его отрезают. Через некоторое время хозяйка убирает остаток мяса в холодильник. Может ли хозяйка скормить котятам поровну мяса, если всего котят

3 а) двое;

7 б) трое?

Андрей Кушнир

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,
10 – 11 классы, сложный вариант, 16 марта 2025 г.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

5 — 1. Существует ли такое положительное число $x > 1$, что

$$\{x\} > \{x^2\} > \{x^3\} > \ldots > \{x^{100}\}?$$

(Здесь $\{x\}$ — дробная часть числа x, то есть разность между x и ближайшим целым числом, не превосходящим x.)

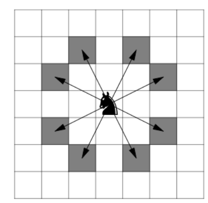
Алексей Толпыго

6 — 2. Даны две треугольные пирамиды с общим основанием ABC. Их вершины S и R лежат по разные стороны от плоскости ABC. Оказалось, что рёбра SA, SB, SC первой пирамиды параллельны соответственно граням BCR, ACR и ABR второй пирамиды. Докажите, что объём одной из этих пирамид вдвое больше объёма другой.

Михаил Евдокимов

7 — 3. Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости расставить бесконечное количество шахматных коней (не более одного коня в клетку) так, чтобы каждый конь бил ровно 5 других?
(Напомним, что шахматный конь бьёт 8 клеток, как показано на рисунке.)

Александр Тертерян

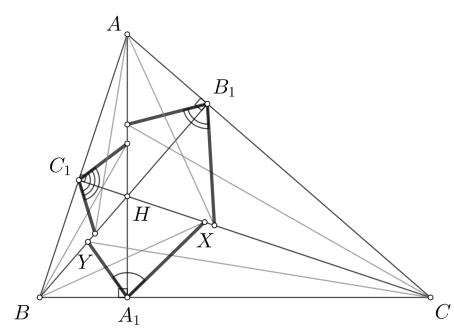


8 — 4. В стране, валюта которой — тугрики, ходят только купюры двух целочисленных достоинств. И покупатель, и продавец имеют достаточно много и тех, и других купюр, но при каждом платеже могут использовать вместе не более k купюр (включая сдачу). Известно, что так можно сделать платёж на любую целую сумму от 1 до n тугриков. Каково наибольшее возможное n (в зависимости от k)?

Александр Шаповалов

10 — 5. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Биссектрисы углов B и C треугольника BHC пересекают отрезки CH и BH в точках X и Y соответственно. Обозначим величину угла XA_1Y через α. Аналогично определим β и γ. Найдите значение суммы $\alpha + \beta + \gamma$.

Алексей Доледенок



10 — 6. Барон Мюнхгаузен утверждает, что существуют многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами и натуральные числа m и n со свойством: $f(m)$ не делится на n, но $f(p^k)$ делится на n для любого простого p и любого натурального k. Не ошибается ли барон?

Алексей Волостнов, Станислав Гришин

12 — 7. Петя красит каждую клетку доски $2m \times 2n$ в чёрный или белый цвет так, чтобы клетки каждого цвета образовывали многоугольник. Затем Вася разрезает доску на доминошки (прямоугольники из двух клеток). Петя стремится к тому, чтобы в итоге получилось как можно больше двухцветных доминошек, а Вася — к тому, чтобы их получилось как можно меньше. Наличие какого наибольшего числа двухцветных доминошек может гарантировать Петя, как бы ни действовал Вася?
(Напомним, что граница многоугольника — замкнутая ломаная без самопересечений.)

Александр Грибалко