СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ, ВЕСЕННИЙ ТУР

Решения задач

Базовый вариант, 8 – 9 классы

1 (4 балла). *Если Вася делит пирог или кусок пирога на две части, то всегда делает их равными по массе. А если делит на большее число частей, то может сделать их какими угодно, но обязательно все разной массы. За несколько таких дележей Вася разрезал пирог на 17 частей. Могли ли все части оказаться равными по массе? (Объединять части нельзя.)* *(Борис Френкин)*

Ответ: могли.

Решение. Пусть масса пирога была 17 унций. Сначала разделим его на куски в 2, 7 и 8 унций, затем кусок в 7 унций на куски в 1, 2 и 4 унции. Теперь будем делить все куски, кроме «единичных» пополам, пока все не станут «единичными».

Замечание. Разбить кусок массой 17 на единичные куски можно разными способами с помощью следующих разбиений, с учётом того, что куски 2, 4 и 8 превращаются в единичные куски делением пополам:

$7 = 4 + 2 + 1$;

$10 = 7 + 2 + 1$;

$11 = 8 + 2 + 1$;

$12 = 7 + 4 + 1$;

$14 = 7 + 7 = 11 + 2 + 1 = 8 + 4 + 2 = 7 + 4 + 2 + 1$;

$17 = 14 + 2 + 1 = 12 + 4 + 1 = 11 + 4 + 2 = 10 + 4 + 2 + 1 = 8 + 7 + 2$.

См. также задачу 3 для 10 — 11 классов.

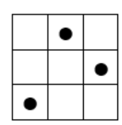
2 (4 балла). *Шахматную доску 8×8 перекрасили в несколько цветов (каждую клетку — в один цвет). Оказалось, что если две клетки — соседние по диагонали или отстоят друг от друга на ход коня, то они обязательно разного цвета. Какое наименьшее число цветов могло быть использовано?* *(Михаил Евдокимов)*

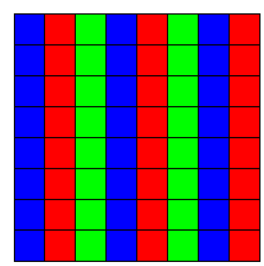
Ответ: 3 цвета.

Решение.

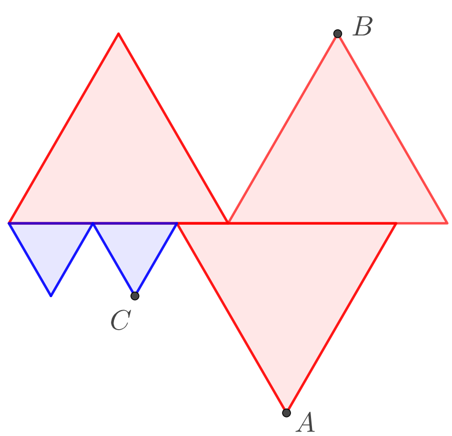
Оценка. По условию клетки на левом рисунке должны быть разного цвета.

Пример. Окрасим каждый столбец в свой цвет, периодически чередуя цвета 1, 2 и 3 (см. правый рисунок).

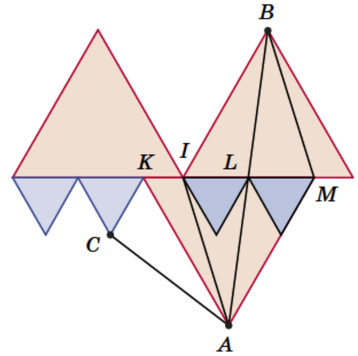




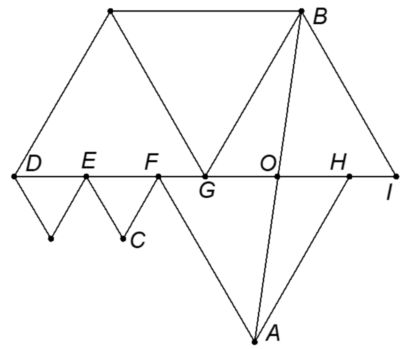
3 (5 баллов). *Пять равносторонних треугольников расположены так, как показано на рисунке ниже. Три больших треугольника равны между собой и два маленьких тоже равны между собой. Найдите углы треугольника ABC.* *(Егор Бакаев)*



Ответ: $A = 60°$, $B = 30°$, $C = 90°$.

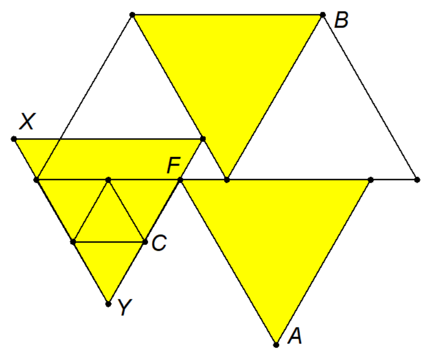


Решение 1. Добавим на рисунок ещё два маленьких треугольника, как показано справа. Заметим, что $AIBM$ — параллелограмм, а L — его центр. При повороте на $60°$ против часовой стрелки вокруг точки A треугольник AML, очевидно, переходит в треугольник AKC. Таким образом, в треугольнике ABC имеем: $AB = 2AL = 2AC$, $\angle A = 60°$. Следовательно, он прямоугольный.



Решение 2. Обозначим точки как показано на рисунке справа. Пусть m — длина стороны малого треугольника, b — большого. Равносторонние треугольники с вершинами A и B центрально симметричны. Значит, O — центр их симметрии. Поэтому $AO = OB$, $GO = OH = m$ и $EO = b$.

Треугольники CEO, CFA и OHA равны, так как у них есть стороны m и b с углом $60°$ между ними. Следовательно, $CO = CA = OA$ и треугольник ABC — прямоугольный с углом $A = 60°$.



Решение 3. Пристроим к малым треугольникам ещё два, достроим их до тёмного равностороннего треугольника, как на рисунке. Видно, что тёмные треугольники равны, значит, они переходят друг в друга при повороте на $120°$ вокруг центра треугольника между ними. Поэтому ABX — равносторонний. Симметрия относительно точки C переводит отрезок FA в YX. Следовательно, ABC — половина треугольника ABX, отсюда получаем ответ.

4 (5 баллов). *Два пирата делят 25 золотых монет разного достоинства, выложенные в виде квадрата* 5×5. *Пираты по очереди берут по одной монете с краю (монету можно взять, если слева, или справа, или снизу, или сверху от неё нет другой). Верно ли, что первый пират всегда может действовать так, чтобы гарантированно получить хотя бы половину суммарной добычи?*

(Михаил Евдокимов)

Ответ: неверно.

Решение. Пусть монета в центре стоит больше всех остальных, вместе взятых. Пусть второй пират ходит центрально симметрично первому, пока не «освободится» центральная монета. Тогда он забирает её и выигрывает.

5 (6 баллов). *Есть N удавов, их пасти имеют размеры 1 см, 2 см, ..., N см. Каждый удав может заглотить яблоко любого диаметра (в см), не превосходящего размер его пасти. Но по внешнему виду нельзя определить, какая у кого пасть. Вечером смотритель может выдать каждому удаву сколько хочет яблок каких хочет размеров, и за ночь удав заглотит все те из них, что влезают ему в пасть. Какое минимальное количество яблок суммарно смотритель должен вечером выдать удавам, чтобы утром по результату он гарантированно определил размер пасти каждого удава?*

(Татьяна Казицына)

Ответ: $(N - 1)^2$ яблок.

Если у какого-то яблока диаметр нецелый, увеличим его до ближайшего целого числа, от этого ничего не изменится: например, все удавы одинаково «реагируют» на яблоки диаметра из промежутка $(2,\ 3]$. Так добьёмся того, что диаметры всех яблок будут целыми.

Оценка. Рассмотрим яблоки диаметра d, где $2 \leqslant d \leqslant N$. Пусть таких яблок не дадут каким-то двум удавам. Пасти этих удавов могут оказаться размером $d-1$ и d. Оба удава съедят все меньшие яблоки и оставят все бо́льшие, поэтому этих удавов не различить. Значит, для каждого d от 2 до N включительно яблок диаметра d требуется хотя бы $N-1$, а всего яблок тогда нужно хотя бы $(N-1)^2$.

Пример. Дадим каждому удаву, кроме последнего, яблоки всех диаметров от 2 до N включительно. Получив такой набор, удав выдаст размер своей пасти: он равен максимальному радиусу съеденного яблока или 1, если ни одно яблоко не съедено. Размер пасти у последнего удава определим методом исключения.

Замечание. Оказывается, тот же самый набор яблок можно раздать удавам как угодно, лишь с одним условием: не давать одинаковые яблоки одному и тому же удаву. В самом деле, если найдётся удав, съевший яблоко диаметра N, то его пасть размера N. Иначе такая пасть у удава, не получившего такого яблока. Среди остальных удавов яблоками диаметра $N-1$ точно так же находится пасть размера $N-1$ и так далее. Оставшийся в конце удав будет иметь пасть размера 1.

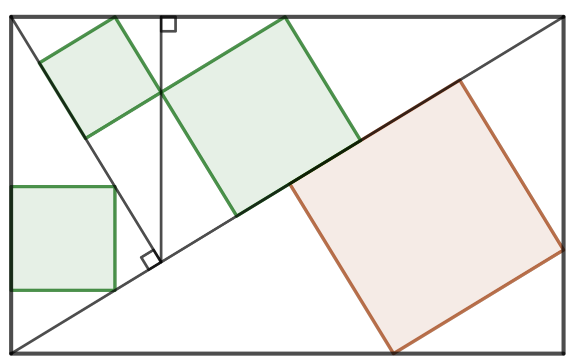
Среди школьников это заметил, например, Гаджиев Низам (10 кл., Махачкала).

Базовый вариант, 10 – 11 классы

1 (3 балла). *В последовательности действительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ каждое число, начиная с третьего, равно полусумме двух предыдущих. Докажите, что все параболы вида $y = x^2 + a_n x + a_{n+1}$ (где $n = 1, 2, 3, \ldots$) имеют общую точку.* *(Михаил Евдокимов)*

Решение. Так как
$$\frac{1}{2}a_{n+1} + a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_{n+1} + a_n}{2} = \frac{1}{2}a_n + a_{n+1},$$
то $(n+1)$-я и n-я параболы пересекаются в точке с абсциссой $x = \frac{1}{2}$.

2 (4 балла). *Произвольный прямоугольник разбит на прямоугольные треугольники так, как показано на рисунке ниже. В каждый треугольник вписан квадрат со стороной, лежащей на гипотенузе. Что больше: площадь самого большого квадрата или сумма площадей трёх остальных квадратов?* *(Михаил Евдокимов)*

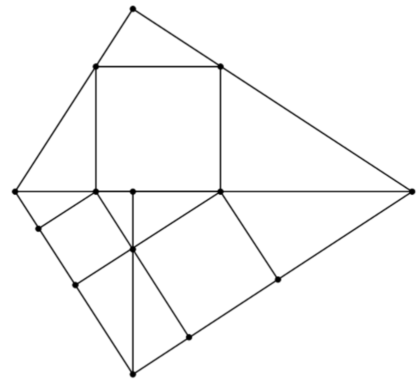


Ответ: они равны.

Заметим сначала, что квадрат со стороной на гипотенузе AB вписывается в прямоугольный треугольник ABC однозначно. (Например, потому, что если есть два таких квадрата, то гомотетия с центром в точке C переводит один из них в другой, оставляя при этом AB на месте, значит, коэффициент равен 1.) Далее можно действовать по-разному.

Решение 1. Заметим, что все прямоугольные треугольники в задаче подобны. Значит, вписанные квадраты занимают в них одинаковую долю площади. Поэтому сумма площадей малых квадратов равна площади большого, так как это верно для содержащих их треугольников.

Решение 2. Отразим прямоугольный треугольник относительно гипотенузы, один из треугольников разобьём высотой на два, впишем в них квадраты (см. рисунок справа). Поскольку треугольники подобны, то вершины квадратов разбивают катеты в одном и том же отношении, поэтому совпадения вершин квадратов не случайны. Тогда по теореме Пифагора для треугольника, заключённого между квадратами, сумма площадей малых квадратов равна площади большого. Дважды заменяя в задаче пару малых квадратов на один вписанный той же площади, оставим только два квадрата, вписанные в равные треугольники. Значит, спрашиваемые в задаче площади равны.



3 (5 баллов). *Если Вася делит пирог или кусок пирога на две части, то всегда делает их равными по массе. А если делит на большее число частей, то может сделать их какими угодно, но обязательно все разной массы. За несколько таких дележей Вася разрезал пирог на N частей. При каждом ли $N \geq 10$ все части могли получиться равными по массе? (Объединять части нельзя.)*

(Борис Френкин)

Ответ: при каждом.

Решение. Кусок массой N (натуральное число) надо разбить на единичные куски. Все степени двойки разбиваются делением пополам. Для дальнейших рассуждений приведём два способа.

Способ 1. Число N разложимо в сумму различных степеней двойки (двоичное представление). Возможны три случая.

1) В этом разложении не два слагаемых (одно или хотя бы три). Тогда разбиваем сначала ровно как в этом двоичном разложении, а потом превращаем в единицы каждую степень двойки.

2) $N = 2^a + 2^b$, где $0 < a < b$. Тогда $b \geqslant 3$, так как $N \geqslant 10$. Разбиваем N на куски 1, 2^a и $2^b - 1$, последний из которых — на b степеней двойки $(1, 2, \ldots, 2^{b-1})$.

3) $N = 1 + 2^b$. Тогда $b \geqslant 4$, и мы разбиваем N на куски 1, 2 и $2^b - 2$, последний из них — на $b - 1$ степеней двойки $(2, \ldots, 2^{b-1})$.

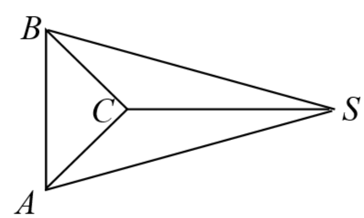
Способ 2. Многократно отделяя пару кусков 1 и 2, сведём задачу к куску 10, 11 или 12. Кусок 10 сведём к 7, затем к 4. Кусок 11 сведём к 8. Кусок 12 разобьём на 1, 4 и 7. Все полученные куски мы уже умеем разбивать.

Замечание. Можно показать, что утверждение задачи неверно в точности для $N = 3,\ 5,\ 6,\ 9$.

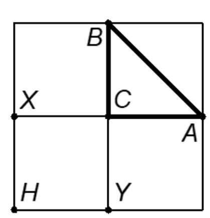
4 (5 баллов). *Верно ли, что сумма внутренних двугранных углов при основании треугольной пирамиды всегда меньше суммы внешних?* *(Алексей Заславский)*

Ответ: неверно.

Решение 1. Плоскую фигуру на рисунке справа можно рассматривать как вырожденную треугольную пирамиду $ABCS$ с двугранным углом $0°$ при ребре AB и двугранными углами $180°$ при рёбрах AC и BC. Сумма внутренних углов при основании равна $360°$, а внешних — равна $180°$. Если немного приподнять вершину S над плоскостью ABC, двугранные углы изменятся не сильно, поэтому сумма внутренних углов останется больше суммы внешних.



Решение 2. На клетчатой плоскости рассмотрим узлы, указанные на рисунке справа. Пусть ABC — основание пирамиды, а высота SH пирамиды равна стороне клетки. Тогда внешний двугранный угол при CA равен $\angle SXH = 45°$, а внутренний равен $135°$. Аналогично при ребре CB. Значит, сумма внутренних двугранных углов при основании больше $270°$, а внешних — меньше.



5 (6 баллов). *В математическом кружке 45 школьников, некоторые дружат. Как ни разбивай их на тройки, в какой-то тройке все будут друг с другом дружить. Докажите, что всех школьников можно разбить на тройки так, чтобы в каждой тройке хотя бы какие-то двое дружили друг с другом.*

(Максим Прасолов)

Докажем аналогичное утверждение для $3N$ школьников:

если при любом разбиении их на N троек в какой-то тройке все будут друг с другом дружить, то всех школьников можно разбить на N троек так, чтобы в каждой тройке хотя бы какие-то двое дружили друг с другом.

Решение 1. Достаточно доказать, что можно выделить N отдельных пар друзей, тогда, подсоединив к каждой паре одного из оставшихся школьников, получим требуемое. Пусть можно выделить максимум $N-1$ пар (людей в них будем обозначать чёрными точками). Тогда осталось минимум $N+2$ человека (их будем обозначать белыми точками), и среди них никто не дружит. Каждые две точки, соответствующие друзьям, соединим отрезком (ребром).

Заметим, что для каждой пары из наших $N-1$ пар чёрных точек есть максимум одна белая точка, соединённая с обеими вершинами пары (иначе можно вместо одной пары чёрных точек создать две новые). Тогда будем постепенно присоединять к каждой чёрной паре по белой точке так, чтобы не получилось полной тройки (в которой все друг с другом дружат). Это получится сделать для всех чёрных пар, и ещё три белые точки останутся, образуя пустую тройку (среди этих троих никто не дружит) — мы получили разбиение на тройки, противоречащее условию!

Решение 2. Обозначим школьников точками и каждых двух друзей соединим отрезком (ребром). Будем формировать «полуполные» тройки — в которых есть хотя бы одно ребро, но не все три ребра. Пусть мы не можем из остатка сформировать очередную «полуполную» тройку. Тогда в остатке либо все попарно не дружат, либо все попарно дружат. (В самом деле, пусть в остатке есть и дружащие, и не дружащие. Выберем из них двоих друзей A и B. Тогда все другие люди из остатка дружат и с A, и с B (иначе возникнет полуполная тройка с ребром AB), но при этом в остатке имеется некто C, который с кем-то из остатка не дружит — скажем, с D. Тогда A, C, D — полуполная тройка.)

Если в остатке все попарно не дружат — получается разбиение без полных троек, что противоречит условию. Если в остатке все попарно дружат — получается разбиение из полуполных и полных троек, что решает задачу.

Сложный вариант, 8 – 9 классы

1 (4 балла). *На урок физкультуры пришло 12 детей, все разной силы. Физрук 10 раз делил их на две команды по 6 человек, каждый раз новым способом, и проводил состязание по перетягиванию каната. Могло ли оказаться, что все 10 раз состязание закончилось вничью (то есть суммы сил детей в командах были равны)?* *(Михаил Евдокимов)*

Ответ: да, могло. **Решение.** Пусть силы мальчиков равны 1, 2, ..., 12.

Способ 1. Разобьём их на пары соседних по силе. В одну команду возьмём сильных детей из каких-то трёх пар и слабых – из других трёх; в другую команду – всех остальных. Получится 10 разбиений на команды равной силы – число способов разбить 6 объектов на две группы по 3.

Способ 2. Разобьём их на пары с равной суммарной силой 13. В одну команду возьмём любые три из этих шести пар, в другую — остальные три пары. Снова 10 разбиений на команды равной силы

2 (5 баллов). *Докажите, что среди вершин любого выпуклого девятиугольника можно найти три, образующие тупоугольный треугольник, ни одна сторона которого не совпадает со сторонами девятиугольника.* *(Александр Юран)*

Решение 1. Обозначим девятиугольник как $A_1A_2\ldots A_9$. Рассмотрим четырёхугольники $A_2A_4A_6A_8$ и $A_1A_4A_6A_8$. Заметим, что оба прямоугольниками они быть не могут, так как он однозначно задаётся тремя точками. Значит, поскольку сумма углов в четырёхугольнике равна 360°, один из них будет иметь тупой угол, который и даст нам искомый треугольник.

Решение 2. Проведём девятизвенную замкнутую ломаную $A_1A_3A_5A_7A_9A_2A_4A_6A_8A_1$, соединяющую вершины 9-угольника через одну. Если угол между какими-то двумя соседними звеньями тупой, задача решена. Предположим, что все эти углы не больше $\pi/2$. Тогда их сумма не больше $9\cdot\pi/2 = 4,5\pi$. К каждому из этих углов примыкают с двух сторон два угла, дополняющие его до угла девятиугольника. Сумму T этих 18 дополнительных углов можно посчитать так: разбить их на пары, дополняющие до π соответствующий угол девятиугольника. Так как сумма углов девятиугольника равна 7π, сумма T равна $9\pi - 7\pi = 2\pi$. Но тогда сумма всех углов девятиугольника не больше, чем $2\pi + 4,5\pi = 6,5\pi < 7\pi$ — противоречие.

3 (7 баллов). *Имеется кучка из 100 камней. Играют двое. Первый берёт 1 камень, потом второй берёт 1 или 2 камня, потом первый берёт 1, 2 или 3 камня, затем второй 1, 2, 3 или 4 камня и так далее. Выигрывает взявший последний камень. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?* *(Людмила Смирнова)*

Ответ: первый игрок.

Решение. Докажем, что для любого натурального $n \leqslant 10$ первый игрок на своём n-м ходе может добиться, чтобы количество забранных из кучки камней равнялось n^2, и второй игрок не сможет ему помешать. Доказательство проведём индуктивно. В свой первый ход первый игрок забирает один камень, т. е. число забранных камней равно 1^2. Пусть в свой n-й ход первому игроку удалось сделать так, чтобы количество забранных камней равнялось n^2. В свой n-й ход второй игрок может взять от 1 до $2n$ камней. Поскольку $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, после его хода общее количество забранных камней будет больше n^2 и меньше $(n+1)^2$. Первый игрок в свой следующий ход может взять от 1 до $2n+1$ камня и точно сможет получить $(n+1)^2$ забранных камней независимо от предыдущего хода второго игрока. Таким образом, поскольку $100 = 10^2$, побеждает первый игрок: ему достаточно каждый раз забирать такое число камней, чтобы общее число забранных камней было точным квадратом, и на своём 10-м ходе он возьмёт последний камень.

4 (7 баллов). *Петя загадал положительную несократимую дробь $x = \frac{m}{n}$. Можно назвать положительную дробь y, меньшую 1, и Петя назовёт числитель несократимой дроби, равной сумме $x+y$. Как за два таких действия гарантированно узнать x?* *(Максим Дидин)*

Решение 1. Можно считать, что m и n — натуральные взаимно простые числа. Назовём сначала дробь $\dfrac{1}{2}$. Петя вычислит дробь $\dfrac{2m+n}{2n}$. Общий делитель числителя $2m+n$ и знаменателя $2n$ будет также общим делителем чисел $2(2m+n) - 2n = 4m$ и $2n$ и, поскольку m и n взаимно просты, может равняться 1, 2 или 4. Узнав числитель, который сообщит нам Петя, мы точно будем знать, что $2m+n$ не больше этого числителя, умноженного на 4. Следующим ходом назовём дробь $\frac{1}{p}$, где p — простое число, большее учетверённого числителя, — тогда p будет больше и m, и n. Петя вычислит дробь $\frac{p\cdot m+n}{p\cdot n}$, она будет несократимой. Узнав её числитель $p\cdot m+n$, возьмём от него остаток от деления на p и таким образом найдём n. Вычтя из числителя n и поделив на p, найдём m.

Решение 2. Назовём сначала $\frac{1}{3}$ и получим ответ a, а потом $\frac{2}{3}$ и получим ответ b. Возможны четыре случая.

Случай 1: n не кратно 3. Тогда $a=3m+n$, $b=3m+2n$. Заметим, что $a<b<2a$.

Пусть $n=3k$. Тогда m не кратно 3.

Случай 2: k кратно 3. Тогда $a=m+k$, $b=m+2k$. Здесь тоже $a<b<2a$.

Случай 3: $k\equiv m \pmod 3$. Тогда $a=m+k$, $b=\dfrac{m+2k}{3}$. Здесь $b<a<3b$.

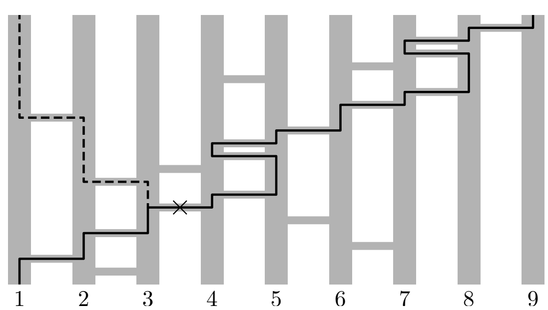
Случай 4: $k\equiv 2m \pmod 3$. Тогда $a=\dfrac{m+k}{3}$, $b=m+2k$. Здесь $b>3a$.

В случаях 1 и 2, как легко проверить, $\frac{m}{n}=\dfrac{2a-b}{3(b-a)}$.

Случаи 3 и 4 отличаются от них и между собой по указанным соотношениям между a и b.

В случае 3 получаем $\dfrac{m}{n}=\dfrac{2a-3b}{3(3b-a)}$, в случае 4 получаем $\dfrac{m}{n}=\dfrac{6a-b}{3(b-3a)}$.

5 (9 баллов). *В ряд стоят 9 вертикальных столбиков. В некоторых местах между соседними столбиками вставлены горизонтальные палочки, никакие две не находятся на одной высоте. Жук ползёт снизу вверх; встречая палочку, он переползает по ней на соседний столбик и продолжает ползти вверх. Известно, что если жук начинает внизу первого (самого левого) столбика, он закончит свой путь на девятом (самом правом) столбике. Всегда ли можно убрать одну палочку так, чтобы жук в конце пути оказался наверху пятого столбика? (Например, если палочки расположены как на рисунке, жук будет ползти по сплошной линии. Если убрать третью палочку на пути жука, дальше он поползёт по пунктирной линии.)* *(Георгий Караваев)*



Ответ: да, всегда.

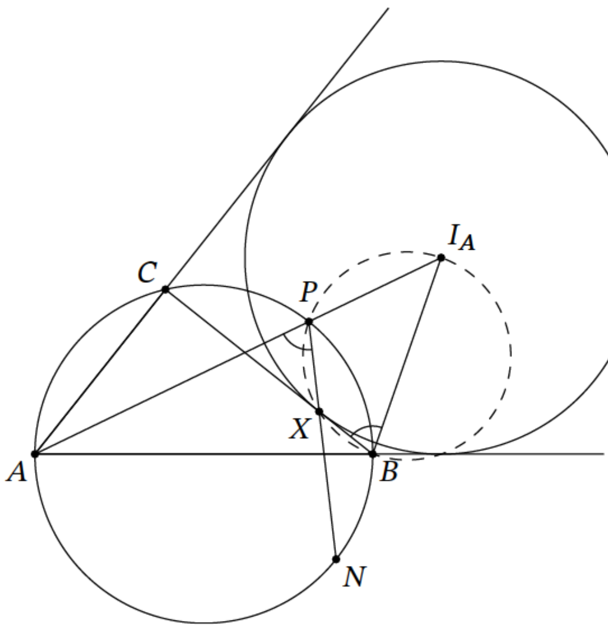
Посадим по жуку на основание каждого столбика. Пусть они будут ползти вверх с одинаковыми скоростями, а на горизонтальных палочках будут мгновенно меняться местами. Тогда в каждый момент времени по каждому столбику ползёт один жук. В частности, на каждом столбике финиширует один из жуков.

Назовём жука, стартовавшего с первого столбика, *красным*, а финишировавшего на вершине пятого столбика — *зелёным.* Красный жук стартует левее зелёного, а финиширует правее. Значит, хотя бы на одной из палочек они должны поменяться местами. Уберём эту палочку. После этого красный жук поползёт по маршруту зелёного, то есть закончит на пятом столбике.

Замечание. Ту же идею можно было оформить по-другому. Изначально посадим синего жука на вершину пятого столбика, и пусть он ползёт сверху вниз. Тогда он пройдёт какую-то палочку в том же направлении, что и красный жук. Эту палочку и уберём.

6 (10 баллов). *На описанной окружности треугольника ABC отметили точки M и N — середины дуг BAC и CBA соответственно, а также точки P и Q — середины дуг BC и AC соответственно. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке A_1 и продолжений сторон AC и AB. Окружность ω_2 касается стороны AC в точке B_1 и продолжений сторон BA и BC. Оказалось, что A_1 лежит на отрезке NP. Докажите, что B_1 лежит на отрезке MQ.* *(Алексей Доледенок)*

Решение 1. Временно забудем о том, что точка A_1 лежит на отрезке NP. Пусть I_A — центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон BA и AC. Обозначим через X точку пересечения прямых BC и PN.



Так как I_A лежит на биссектрисе внешнего угла B, то $\angle CBI_A = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$. Так как I_A лежит на биссектрисе угла A, то точки A, P, I_A лежат на одной прямой. Тогда

$$\angle APN = \frac{\smile AN}{2} = \frac{\smile ABC}{4} = \frac{360^\circ - \smile AC}{4} = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}.$$

Таким образом, $\angle CBI_A = \angle APN$, то есть четырёхугольник I_APXB вписанный.

Вернёмся к решению задачи. Точки X и A_1 совпадают тогда и только тогда, когда

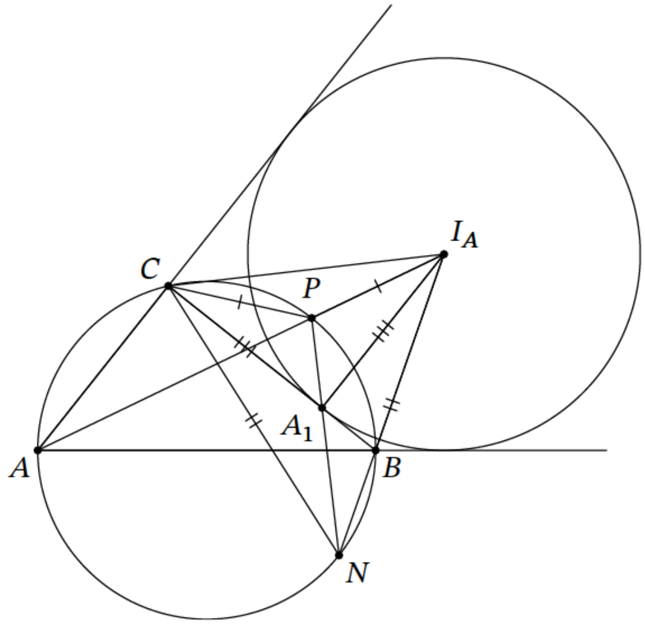
$$\angle BXI_A = \angle BA_1I_A = 90^\circ,$$

что, в свою очередь, эквивалентно тому, что $\angle BPI_A = 90^\circ$, а это эквивалентно тому, что $\angle BCA = 90^\circ$. Проведя аналогичные рассуждения со стороны вершины A, получим, что принадлежность точек Q, B_1, M одной прямой эквивалентна тому, что угол ACB прямой, а следовательно, из одного утверждения следует другое.

Решение 2. Как и в прошлом решении, временно забудем о том, что точка A_1 лежит на отрезке NP. Воспользуемся двумя известными фактами.

- *Лемма о трезубце.* Точка P равноудалена от точек B, C, I_A и центра вписанной окружности треугольника ABC.

- *Внешняя лемма о трезубце.* Точка N равноудалена от точек A, C, I_A и центра окружности, касающейся стороны AB и продолжений сторон CA и CB.



Из этих утверждений следует, что $NC = NI_A$ и $PC = PI_A$, а значит, PN является серединным перпендикуляром к отрезку CI_A.

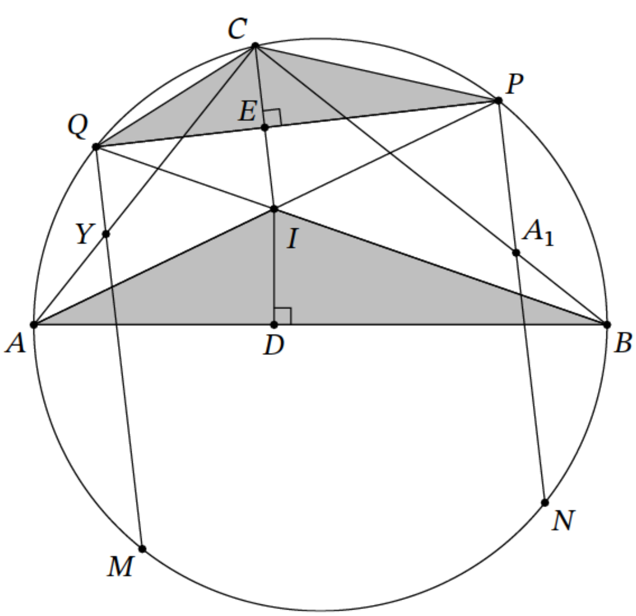
Вернёмся к решению задачи. Точка A_1 лежит на прямой PN тогда и только тогда, когда $CA_1 = A_1I_A$, то есть треугольник CA_1I_A является равнобедренным и прямоугольным. Это, в свою очередь, равносильно тому, что $\angle A_1CI_A = 45^\circ$, что эквивалентно тому, что $\angle BCA = 90^\circ$.

Осталось, как и в концовке прошлого решения, сослаться на то, что аналогично устанавливается эквивалентность утверждений, что $\angle BCA = 90^\circ$ и что точки Q, B_1, M лежат на одной прямой.

Решение 3. Пусть I — центр вписанной в треугольник ABC окружности, D — точка касания этой окружности со стороной AB, E — точка пересечения отрезков CI и PQ. Обозначим через Y точку пересечения прямых AC и MQ. Требуется доказать, что точки B_1 и Y совпадают.

Мы будем пользоваться следующими известными фактами.

- Прямые NP и MQ параллельны биссектрисе угла C, а прямая PQ — перпендикулярна.
- Выполнены равенства $AD = CB_1$ и $BD = CA_1$.



Поскольку $\angle CPQ = \angle CBQ = \angle IBA$ и аналогично $\angle CQP = IAB$, то треугольники IBA и CPQ подобны. Тогда D и E — соответствующие точки в подобных треугольниках IBA и CPQ, поэтому

$PE/EQ = BD/DA$. Так как длина отрезка PE равна расстоянию между параллельными прямыми CI и NP, то

$$PE = CA_1 \cdot \sin\frac{\angle C}{2}.$$

Аналогично $QE = CY \cdot \sin\frac{\angle C}{2}$, поэтому

$$\frac{CA_1}{CY} = \frac{PE}{EQ} = \frac{BD}{DA}.$$

Подставив $CA_1 = BD$, получим

$$\frac{CA_1}{CY} = \frac{BD}{DA} \Leftrightarrow \frac{BD}{CY} = \frac{BD}{DA} \Leftrightarrow CY = DA.$$

Но $DA = CB_1$, то есть $CB_1 = CY$. Следовательно, точки Y и B_1 совпадают.

7 (12 баллов). *На каждой из 99 карточек написано действительное число. Все 99 чисел различны, а их общая сумма иррациональна. Стопка из* 99 *карточек называется* неудачной*, если для каждого k от 1 до* 99 *сумма чисел на k верхних карточках иррациональна. Петя вычислил, сколькими способами можно сложить исходные карточки в неудачную стопку. Какое наименьшее значение он мог получить?* *(Андрей Кушнир)*

Ответ: 98!.

Пример. Пусть на карточках написаны числа $\sqrt{2}, 1, 2, \ldots, 98$. Тогда в неудачной стопке карточка $\sqrt{2}$ должна находиться сверху, а остальные карточки можно расположить любым из 98! способов. В этом случае всякая сумма чисел на нескольких верхних карточках будет иметь вид $\sqrt{2} + n$, где n — натуральное число, то есть будет иррациональна.

Оценка. Разобьём все стопки карточек на 98! групп, в каждой из которых одна стопка получается из другой циклической перестановкой (то есть перекладыванием нескольких верхних карточек вниз стопки). Каждая группа состоит из 99 стопок. Докажем, что каждая группа содержит хотя бы одну неудачную стопку.

Предположим, что нашлась группа без неудачных стопок. Выберем одну из стопок и расположим карточки из неё по кругу в том же порядке, в котором они лежат в стопке: $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$. Тогда все стопки из группы будут иметь вид $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{99}, a_1, \ldots, a_{i-1}$ для i от 1 до 99.

Начнём идти от карточки a_1 по часовой стрелке до тех пор, пока сумма чисел $a_1 + a_2 + \ldots + a_j$ на пройденных карточках не станет рациональной. Далее начнём идти от a_{j+1} до тех пор, пока сумма чисел на пройденных карточках не станет рациональной. Такой момент настанет, потому что соответствующая стопка, начинающаяся с a_{j+1}, удачная. Проделаем описанную операцию 100 раз. По принципу Дирихле найдётся карточка a_t, с которой начинали отсчитывать сумму хотя бы дважды. Оставим только шаги процесса между первым и вторым отсчитыванием от карточки a_t (включая первое, но не включая второе).

Посмотрим на сумму S пройденных чисел (каждое число считается столько раз, сколько его прошли). С одной стороны, S рационально, так как мы брали отрезки карточек с рациональной суммой. С другой стороны, мы начали с карточки a_t, а закончили карточкой a_{t-1}, то есть прошли несколько полных кругов. Из этого следует, что сумма всех пройденных чисел будет равна nS', где n — количество пройденных кругов, а S' — сумма чисел на всех карточках. Однако S' по условию иррационально, откуда nS' также иррационально. Противоречие.

Таким образом, в каждой группе есть хотя бы одна неудачная стопка. Тогда общее количество неудачных стопок не меньше, чем $99! \cdot \frac{1}{99} = 98!$.

Замечание. Существуют и другие примеры. Например, можно взять карточки

$$1+\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2},\ \ldots,\ 50+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2},\ \ldots,\ 49-\sqrt{2}.$$

Назовём первые 50 карточек *положительными*, а остальные — *отрицательными*. В неудачной стопке, состоящей из этих карточек, первая карточка должна быть положительной, и для любого k среди первых k карточек положительных карточек должно быть больше, чем отрицательных. Количество неудачных стопок в этом случае также будет равно 98!.

Сложный вариант, 10 – 11 классы

1 (4 балла). *Найдите все пары натуральных чисел m и n, для которых $m!! = n!$. (Двойной факториал $m!!$ — это произведение всех натуральных чисел, не превосходящих m и имеющих ту же чётность, что m. Например, $5!! = 15$, $6!! = 48$).* *(Борис Френкин)*

Ответ: $m = n = 1$ и $m = n = 2$.

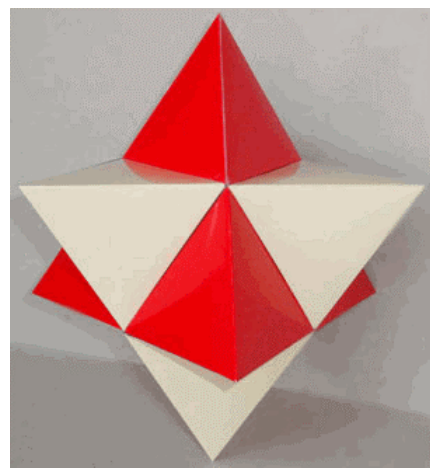
Решение. Пусть $m!! = n!$. Заметим, что $n!$ чётно при $n > 1$. Поэтому при нечётных $m > 1$ решений нет. Ясно, что $m = n = 1$ является решением.

Пусть $m = 2k$, где k натуральное. Тогда $n! = m!! = k!2^k$. Отсюда $(k+1) \cdot \ldots \cdot n = 2^k$. Одно из чисел $k+1, k+2$ нечётно. Так как оно больше единицы, оно не является делителем для 2^k. Значит, единственно возможный случай — это $2^k = k+1$. Но $2^k > k+1$ при $k \geq 2$ (так как $2^2 > 3$, а при дальнейшем увеличении k правая часть неравенства всегда увеличивается на 1, а левая — больше, чем на 1). Значит, в нашем случае $k = 1$, $m = 2$. Очевидно, $m = n = 2$ является решением.

2 (6 баллов). *В пространстве расположили конечный набор кругов радиуса 1. Круги могут пересекаться друг с другом, но не проходят через центры друг друга. В центре каждого круга зажгли точечную лампочку, светящую во все стороны. Могло ли случиться, что любой луч света, выходящий из центра любого круга, упирается в какой-то другой круг?* *(Марк Алексеев)*

Ответ: могло.

Рассмотрим звёздчатый октаэдр (см. рисунок). Его можно рассматривать как объединение двух правильных тетраэдров с общим центром, пересекающихся по октаэдру, или как октаэдр, у которого «продлены» грани. В центре каждой грани обоих тетраэдров поместим лампочку и возьмём круги, содержащие эту грань. Ясно, что все лучи не выйдут за пределы звёздчатого октаэдра и тем более за пределы наших кругов.



Замечание. Аналогичные конструкции можно получить на основе додекаэдра или икосаэра, но количество кругов будет больше. Подойдёт также любой выпуклый многогранник, у которого все двугранные углы тупые: если в плоскости каждой его грани взять большой круг с центром внутри грани, то над каждой гранью соседние круги образуют «домик», который блокирует все лучи, выходящие из центра, лежащего в этой грани, наружу многогранника, а лучи, идущие внутрь многогранника, блокируются его гранями (содержащимися в соответствующих кругах).

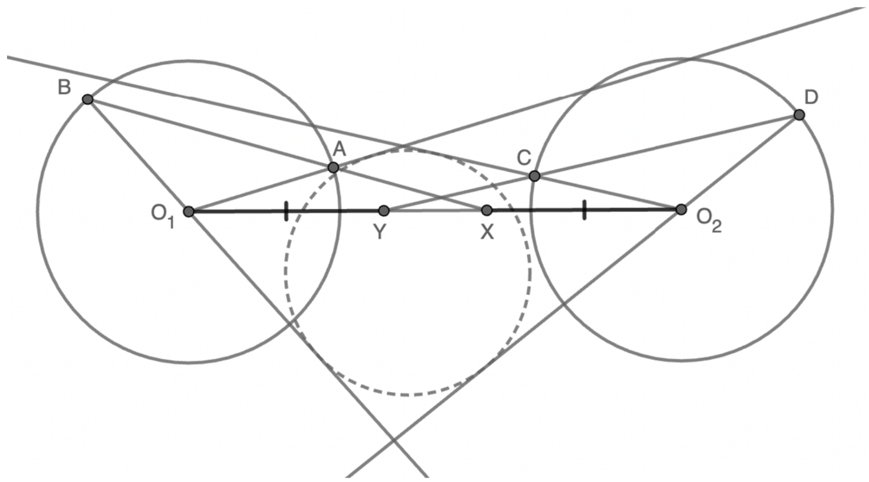
3 (7 баллов). *В каждой клетке таблицы $N \times N$ записано число. Назовём клетку C* хорошей, *если в какой-то из клеток, соседних с C по стороне, стоит число на 1 больше, чем в C, а в какой-то другой из клеток, соседних с C по стороне, стоит число на 3 больше, чем в C. Каково наибольшее возможное количество хороших клеток?* *(Александр Чеботарев)*

Ответ: $N^2 - N$. Пример расстановки для таблицы 5×5 показан на рисунке, в общем случае он строится аналогично (таблица симметрична относительно диагонали, ведущей из левого нижнего угла в правый верхний, все числа хорошие, кроме чисел на этой диагонали).

0	1	2	3	4
3	4	5	6	3
6	7	8	5	2
9	10	7	4	1
12	9	6	3	0

Докажем, что хороших чисел не более $N^2 - N$. Пусть их всего X. Соединим каждое хорошее число с двумя его соседями — с тем соседом, который на 1 больше, и с тем, который на 3 больше (соединяем отрезком). Тогда каждое хорошее число даст по два отрезка, каждый из которых будет подсчитан ровно один раз. Итого, всего будет $2X$ отрезков. Но всего на доске пар соседних клеток ровно $2N(N-1)$, откуда $2N(N-1) \geqslant 2X$, что и требовалось.

4 (8 баллов). *Даны две равные окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2. На отрезке O_1O_2 взяты точки X и Y так, что $O_1Y = O_2X$. Точки A и B лежат на ω_1, и прямая AB проходит через X. Точки C и D лежат на ω_2, и прямая CD проходит через Y. Докажите, что существует окружность, касающаяся прямых AO_1, BO_1, CO_2 и DO_2.* *(Иван Кухарчук, Артемий Соколов)*



Решение. Пусть внешние биссектрисы углов AO_1B и CO_2D пересекаются в точке S, а прямые BO_1 и DO_2 — в точке T . Тогда $\angle TO_1S = \frac{1}{2}\angle TO_1A = \angle O_1BA$, то есть O_1S и BX параллельны. Аналогично O_2S и DY параллельны. Заметим, что следующие площади треугольников равны:

$$S_{O_1AS} = S_{O_1XS} = S_{O_2YS} = S_{O_2CS}$$

(первое и последнее равенство следуют их полученных параллельностей, а второе — из равенства отрезков O_1X и O_2Y). Следовательно, точка S равноудалена не только от прямых O_1T и O_1A (O_2T и O_1C), но и от прямых O_1A и O_2C, то есть является центром окружности, касающейся прямых AO_1, BO_1, CO_2 и DO_2, что и требовалось.

5 (10 баллов). *Дан многочлен степени $n > 0$ с целыми ненулевыми коэффициентами, каждый из которых является его корнем. Докажите, что у этого многочлена не может быть никаких других коэффициентов, кроме 1, -1 и -2.* *(Леонид Шатунов)*

Пусть наш многочлен $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 = Q(x)x + a_0 = R(x)x^2 + a_1x + a_0$. Подставив в $P(x)$ любой его коэффициент, видим, что все слагаемые, кроме a_0, делятся на этот корень, а значит и a_0 на него делится. Поэтому, если $|a_0| = 1$, то всё доказано. Далее считаем, что $|a_0| > 1$.

По условию $P(a_0) = 0$. Если и $P(-a_0) = 0$, то $P(x)$ делится на $(x - a_0)(x + a_0) = x^2 - a_0^2$. Но тогда a_0 делится на a_0^2, что не так. Значит, среди коэффициентов $-a_0$ отсутствует.

Так как $P(a_0) = 0$, то $R(a_0)a_0 + a_1 + 1 = 0$. Поскольку a_1 делит a_0, получаем, что a_1 делит 1. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $a_1 = 1$. Тогда $R(a_0)a_0 = -2$, то есть $|a_0| = 2$. Если $a_0 = -2$, то все доказано. Пусть $a_0 = 2$. Тогда все остальные коэффициенты равны ± 1 или 2. Поэтому равенство $P(2) = 0$ имеет вид $2S_2 + S_1 - S = 0$ (где в $2S_2$ входят слагаемые с коэффициентом 2, в S_1 — с коэффициентом 1, а в S — с коэффициентом -1), или

$$S_2 + S_2 + S_1 = S, \qquad (*)$$

причём S_2, S_1, S — суммы различных степеней двойки. При этом в силу равенства $P(1) = 0$, означающего, что сумма коэффициентов многочлена равна 0, получаем, что число слагаемых (степеней двойки) в левой части равенства ($*$) равно числу слагаемых в правой. В левой части будем проделывать следующие операции: если в ней встречаются два одинаковых слагаемых 2^i, заменим их на 2^{i+1}. Хотя бы одна такая операция будет проделана: поскольку $a_0 = 2$, в сумму $S_2 + S_2$ дважды входит 1. Когда этот процесс остановится, как в левой, так и в правой части будут стоять суммы различных степеней двоек (но какие то слагаемые левой части могут совпадать со слагаемыми правой). При этом число слагаемых в левой части будет меньше: каждая операция уменьшала его на единицу. Противоречие с единственностью разложения натурального числа в сумму степеней двойки.

Случай 2: $a_1 = -1$. Тогда $R(a_0)a_0 = 0$, то есть $R(a_0) = a_n a_0^{n-2} + \ldots + a_3 a_0 + a_2 = 0$. Если $n > 1$, то $n \geqslant 3$ (так как $a_2 \neq 0$). Далее, a_2 делится на a_0, то есть $a_2 = a_0$, а $a_3 a_0 + a_0$ делится на a_0^2, то есть $a_3 + 1$ делится на a_0, которое само делится на a_3. Значит, 1 делится на a_3, откуда $|a_3| = 1$.

Если $a_3 = 1$, то $P(1) = 0$. Кроме того, $|a_0| = 2$. Повторяя рассуждения случая 1, снова получим, что $a_0 = -2$.

Если $a_3 = -1$ и $n > 3$, то $P(a_0) = a_n a_0^n + \ldots + a_5 a_0^5 + a_4 a_0^4 = 0$. Поделив на a_0^4, видим, что $n \geqslant 5$, и повторив предыдущие рассуждения, получаем, что либо $a_0 = -2$, либо $a_4 = a_0$, $a_5 = -1$. И так далее.

Так мы получим, что либо $a_0 = -2$, либо $n = 2m - 1$ нечётно и все коэффициенты при чётных степенях многочлена равны a_0, а при нечётных равны -1. Тогда $P(a_1) = P(-1) = m(a_0 + 1) \neq 0$, так как $a_0 \neq -1$. Противоречие.

6 (12 баллов). *Кощей придумал для Ивана-дурака испытание. Он дал Ивану волшебную дудочку, на которой можно играть только две ноты — до и си. Чтобы пройти испытание, Ивану нужно сыграть какую-нибудь мелодию из 300 нот на свой выбор. Но до того, как он начнёт играть, Кощей выбирает и объявляет запретными одну мелодию из пяти нот, одну — из шести нот, ..., одну — из 30 нот. Если в какой-то момент последние сыгранные ноты образуют одну из запретных мелодий, дудочка перестаёт звучать. Сможет ли Иван пройти испытание, какие бы мелодии Кощей ни объявил запретными?* *(Виктор Клепцын)*

Решение.

Первый способ (предложен участником Московской математической олимпиады). Рассмотрим всевозможные мелодии из нот до и си длины 13 (их 2^{13} штук). Каждую такую мелодию периодически продолжим в обе стороны, получив бесконечную в обе сторону мелодию. Назовём две получившиеся бесконечные мелодии эквивалентными, если одна получается из другой сдвигом.

Наименьший период всех бесконечных мелодий, кроме двух, состоящих только из нот до и только из нот си, равен 13 (поскольку число 13 простое).

Количество не эквивалентных друг другу бесконечных мелодий равно $\frac{2^{13}-2}{13} + 2 = 632$. Из них мелодий, содержащих запрещённые Кощеем мелодии, не больше

$$\left(2^8 + 2^7 + \ldots + 2^1\right) + 18 = 528$$

(в скобках учтены запретные мелодии длины $\leqslant 12$, за скобками — все остальные).

Таким образом, найдётся бесконечная мелодия, которая не содержит запретных мелодий, и для прохождения испытания Ивану достаточно сыграть её кусок длины 300.

Второй способ. Пусть L_n — число мелодий длины n, не содержащих запретных последовательностей нот. Будем считать, что $L_0 = 1$. По индукции докажем, что $L_{n+1} \geqslant L_n + L_{n-1}$ для всех натуральных n.

База индукции ($n = 1$): $L_2 = 4 \geqslant 2 + 1 = L_1 + L_0$.

Предположим, что неравенство $L_{k+1} \geqslant L_k + L_{k-1}$ верно для всех k, меньших n. Покажем, что тогда $L_{n+1} \geqslant L_n + L_{n-1}$. Заметим, что

$$L_{n+1} \geqslant 2L_n - L_{n-4} - L_{n-5} - \ldots - L_0. \tag{1}$$

Действительно, мы можем добавить одну из двух нот к уже имеющейся мелодии из n нот, при этом добавленная нота могла завершить запретную мелодию из 5 нот и испортить разрешённую мелодию из $n - 4$ нот, завершить запретную мелодию из 6 нот и испортить разрешённую мелодию из $n - 5$

нот и т. д. (Здесь мы можем вычесть лишнее, если $n > 30$, и часть вычитаемых мелодий могут быть одинаковыми, но поскольку мы пишем оценку снизу, всё правильно.)

Из неравенства $L_{k+1} \geqslant L_k + L_{k-1}$ следуют неравенства

$$L_{k+1} - L_k \geqslant L_{k-1}, \tag{2}$$

$$L_{k+1} - L_{k-1} \geqslant L_k. \tag{3}$$

Применяя неравенства (1), (2) и (3), получим

$$L_{n+1} - L_n - L_{n-1} \geqslant (L_n - L_{n-1}) - L_{n-4} - L_{n-5} - \ldots - L_0 \geqslant L_{n-2} - L_{n-4} - L_{n-5} - \ldots - L_0 =$$

$$= (L_{n-2} - L_{n-4}) - L_{n-5} - \ldots - L_0 \geqslant L_{n-3} - L_{n-5} - L_{n-6} - \ldots - L_0 \geqslant$$

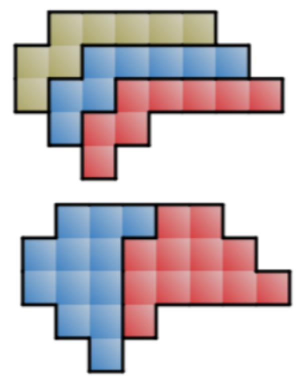
$$\geqslant L_{n-4} - L_{n-6} - L_{n-7} - \ldots - L_0 \geqslant \ldots \geqslant L_3 - L_1 - L_0 = 8 - 2 - 1 = 5 > 0.$$

Следовательно, $L_{n+1} \geqslant L_n + L_{n-1}$, и шаг индукции доказан.

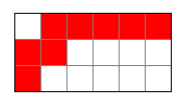
Поскольку L_0 и L_1 положительны, то из доказанного неравенства следует, что L_n — возрастающая последовательность положительных чисел. Следовательно, $L_{300} > 0$ и Иван справится с испытанием.

7 (12 баллов). *Назовём* полоской *клетчатый многоугольник, который можно пройти целиком, начав из какой-то его клетки и далее двигаясь только в двух направлениях — вверх или вправо. Несколько таких одинаковых полосок можно вставить друг в друга, сдвигая на вектор* $(-1, 1)$. *Докажите, что для любой полоски, состоящей из чётного числа клеток, найдётся такое нечётное* k, *что если объединить* k *таких же полосок, вставив их последовательно друг в друга, то полученный многоугольник можно будет разделить по линиям сетки на две равные части. (На рисунке приведён пример.)*

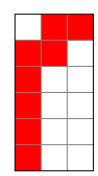
(Сергей Маркелов, Игорь Маркелов)



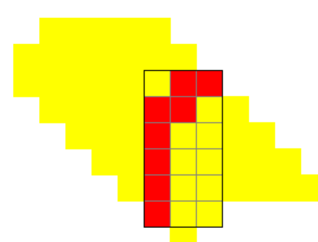
Решение. Построим прямоугольник наименьшего размера, содержащий полоску (см. рисунок). Так как полоска состоит из чётного числа клеток, то при шахматной раскраске её крайние клетки будут разного цвета. Эти клетки расположены в противоположных углах прямоугольника, поэтому его длина и ширина имеют разную чётность.



Без ограничения общности будем считать, что длина прямоугольника a больше его ширины b. Отразим прямоугольник относительно вертикальной линии и повернём на $90°$ против часовой стрелки (см. рисунок).



Вставим друг в друга достаточно большое количество исходных полосок и пронумеруем их снизу вверх. Расположим новый прямоугольник так, чтобы его левая нижняя клетка совпала с левой нижней клеткой первой полоски. Заметим, что при этом его правая верхняя клетка совпадёт с правой верхней клеткой полоски с номером $a - b + 1$. Начнём смещать прямоугольник на вектор $(-1, 1)$ до тех пор, пока он полностью не окажется внутри фигуры из полосок (см. рисунок). Такой момент наступит, когда нижний ряд прямоугольника попадёт в горизонталь, в которой будет $a - b + 1$ клеток.



Пусть при этом левая нижняя клетка прямоугольника совпадает с левой нижней клеткой полоски с номером x, а правая верхняя — с правой верхней клеткой полоски с номером y. Тогда $y - x = a - b$, поэтому числа x и y имеют разную чётность. Оставим $k = x + y$ полосок. Может оказаться, что после этого левая верхняя часть прямоугольника уже не будет находиться внутри фигуры. Исправляем это так: увеличиваем x на 1, то есть смещаем прямоугольник на вектор $(-1, 1)$, при этом y тоже увеличивается на 1, то есть число полосок увеличивается на 2. Если этого не хватило, повторяем процедуру (после каждого шага прямоугольник смещается на одну горизонталь и одну вертикаль, а число полосок увеличивается на 2, поэтому в какой-то момент прямоугольник окажется полностью внутри фигуры).

Докажем, что полученную фигуру можно разрезать по линиям сетки на две равные части. Сделаем разрез по границе исходной полоски, помещенной внутрь нашей фигуры, так, чтобы она осталась целиком в правой нижней части (на нашем рисунке режем вдоль левой и верхней границы красной полоски). Тогда граничный слой клеток в обеих полученных фигурах выглядит так (в левой верхней фигуре делаем обход по часовой стрелке, а в правой нижней — против часовой стрелки):

1) полоска (в левой верхней фигуре это полоска с наибольшим номером, а в правой нижней — наша полоска);

2) лесенка из x ступенек;

3) полоска (в левой верхней фигуре это полоска, получающаяся из нашей полоски смещением на вектор $(-1, 1)$, а в правой нижней — первая полоска);

4) лесенка из y ступенек.

Таким образом, полученные фигуры равны.

Решение 2. Будем, считать, что полоска расположена на бесконечной клетчатой (координатной) плоскости. Впишем нашу полоску Π в клетчатый прямоугольник $ABCD$ размера $a \times b$ ($AB = a$, $BC = b$). В полоске будет $(a + b - 1)$ клетка, поэтому $(a + b)$ нечётно. Пусть Π ограничена слева и сверху ломаной ℓ, идущей из A в C (вправо-вверх).

Параллельно перенесём прямоугольник $ABCD$ вместе с полоской Π и ломаной ℓ на вектор $(-a - b, a + b)$; пусть после переноса мы получили прямоугольник $A'B'C'D'$, вписанную в него полоску Π' и ограничивающую ее ломаную ℓ', идущую из A' в C'.

Рассмотрим все клетки, лежащие целиком в области, ограниченной ломаными ℓ, ℓ' и отрезками AA', CC'. Докажем, что эти клетки образуют искомый клетчатый многоугольник M. Во-первых, ясно, что M получается как объединение $k = a + b$ сдвигов полоски Π на векторы $(-1, 1)$, $(-2, 2)$, $\ldots$, $(-k, k)$.

Остаётся показать, как разбить M на два равных клетчатых многоугольника. Пусть $E = CD \cap C'B'$ и $F = AD \cap A'B'$ так, что $B'EDF$ — прямоугольник. По построению $CE = C'E = a+b$, значит $DE = b$. Аналогично $B'E = a$. Видим, что E и F лежат соответственно на отрезках AA' и CC', а прямоугольники $B'EDF$ и $DCBA$ равны. Наложим прямоугольник $DCBA$ на $B'EDF$ (так, чтобы совместились соответствующие вершины: D — с B', C — с E, и т.д.). Пусть при этом наложении ломаная ℓ перешла в ломаную ℓ''. Ломаная ℓ'' и будет делить M на две равные части. Действительно, рассмотренное выше наложение $DCBA$ на $B'EDF$ можно получить преобразованием плоскости φ, где φ — последовательное применение сдвига на вектор $(-\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$ и отражения относительно средней линии между параллельными прямыми AA' и CC' (φ — скользящая симметрия). Легко видеть, что это же преобразование φ переводит соответственно A, C, F, E — в F, E, A', C', а ломаную ℓ'' — в ℓ'. Значит, φ совмещает указанные части многоугольника M.