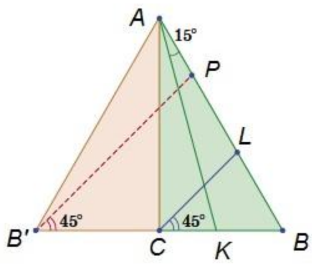
44-й Международный математический Турнир городов
Решения задач весеннего тура

Сложный вариант, 8–9 классы

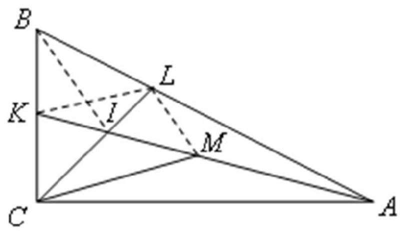
1. [4] Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° одна из биссектрис в два раза короче какой-то другой биссектрисы.

Егор Бакаев



Пусть дан прямоугольный треугольник ABC, $\angle A = 30°$, $\angle C = 90°$. Будем доказывать, что биссектриса AK в два раза больше биссектрисы CL данного треугольника.

Решение 1. Достроим ABC до правильного треугольника ABB'. При этом Ð$BAK = 15°$. Заметим, что прямая, проходящая через точку B' параллельно CL, высекает в треугольнике ABB' отрезок $B'P$, вдвое больший CL (по свойству средней линии треугольника). К тому же Ð$AB'P = 60° – 45° =$ ÐBAK, а значит, $AK = BP = 2CL$.



Решение 2. Пусть I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, M – середина AK (см. рисунок справа). Тогда Ð$BLC = 75° =$ ÐAKC, то есть четырёхугольник $BKIL$ вписанный. Значит, Ð$KLI =$ Ð$KBI = 30°$, но и Ð$KMC = 30°$, то есть четырёхугольник $CKLM$ тоже вписанный. Поэтому Ð$CLM =$ Ð$CKM = 75°$, Ð$CML =$ Ð$CMK +$ Ð$KML =$ Ð$CMK +$ +Ð$KCL = 75°$. Следовательно, $CL = CM = 0{,}5AK$.

Решение 3. Проведём высоту CH. Из подобия треугольников CHL и ACK по острому углу следует, что $CL : AK = CH : AC = 1 : 2$.

2. [5] На клетчатой доске 10´10 в одной из клеток сидит бактерия. За один ход бактерия сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две бактерии (обе остаются в той же клетке). Затем снова одна из сидящих на доске бактерий сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две, и так далее. Может ли после нескольких таких ходов во всех клетках оказаться поровну бактерий?

Александр Грибалко

Ответ: нет. Раскрасим клетки доски в белый и чёрный цвета в шахматном порядке. Рассмотрим разность между количеством бактерий на белых клетках и количеством бактерий на чёрных клетках. При ходе с чёрной клетки на белую она увеличивается на 3, а при ходе с белой на чёрную уменьшается на 3. Поскольку вначале эта разность равнялась 1 или –1, она никогда не станет кратна 3, в частности, не станет равна 0.

3. [7] Назовём натуральное число *заурядным*, если в его десятичной записи встречаются только нули и единицы. Пусть произведение двух заурядных чисел оказалось заурядным числом. Обязательно ли тогда сумма цифр произведения равна произведению сумм цифр сомножителей?

Виктор Клепцын, Константин Кноп

Ответ: не обязательно. **Решение**. Рассмотрим произведение двух заурядных чисел

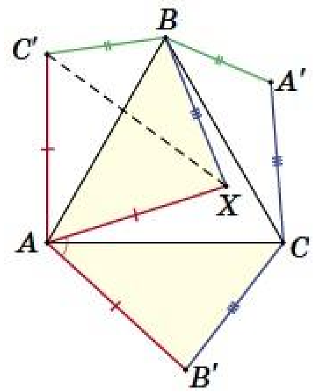
$$(10^2 + 10^4 + 10^8 + \cdots + 10^{1024})(10^{N-2} + 10^{N-4} + 10^{N-8} + \cdots + 10^{N-1024}),$$

где N – большое чётное число (например, миллион). Раскрыв скобки, мы получим много слагаемых, каждое из которых – степень числа 10. Если бы все слагаемые были разными, мы получили бы заурядное число с суммой цифр, равной произведению сумм цифр исходных чисел. Посмотрим, есть ли равные слагаемые. Если $10^a \cdot 10^{N-b} = 10^x \cdot 10^{N-y}$, то $a + N - b = x + N - y$, откуда $a + y = b + x$. Так как a, b, x, y – степени двойки, равенство возможно лишь в случаях $a = x$, $b = y$ (но это одно и то же слагаемое) и $a = b$, $x = y$. Поэтому у нас всего 10 одинаковых слагаемых, равных 10^N, в сумме они дадут 10^{N+1}.

Заметим, что никакие другие слагаемые не равны 10^{N+1}, так как у всех слагаемых показатель степени чётный. Поэтому сумма слагаемых будет заурядным числом, но сумма его цифр будет на 9 меньше, чем произведение сумм цифр исходных чисел.

Вариация. Произведение $(x^{3^9}+x^{3^8}+\ldots+x^{3^2}+x^3+1)(x^{-3^9}+x^{-3^8}+\ldots+x^{-3^2}+x^{-3}+1)$ равно 10 + $(x^{3^9-3^8}+x^{3^9-3^7}+\ldots+x^{3^9-3}+x^{3^9})+(x^{3^8-3^7}+\ldots+x^{3^8-3}+x^{3^8})+\ldots+(x^{3^2-3}+x^{3^2})+x^3$ + ... (далее идут отрицательные степени x, отличающиеся от положительных только знаком). Заметим, что степени во всех слагаемых различны, так как любое натуральное число записывается единственным образом в виде суммы степеней троек, каждая из которых повторяется не более двух раз (троичная система счисления).

Подставив x = 10 и умножив второй множитель на 10^{3^9}, получим два заурядных числа m и n, их суммы цифр равны 10. Их произведение – заурядное число с суммой цифр 91.



4. [8] На сторонах равностороннего треугольника ABC построены во внешнюю сторону треугольники $AB¢C$, $CA¢B$, $BC¢A$ так, что получился шестиугольник $AB¢CA¢BC¢$ в котором каждый из углов $A¢BC¢$ $C¢AB¢$ $B¢CA¢$ больше 120°, а для сторон выполнены равенства $AB¢= AC¢$ $BC¢= BA¢$ $CA¢= CB¢$ Докажите, что из отрезков $AB¢$ $BC¢$ $CA¢$ можно составить треугольник.

Давид Бродский

Решение. Чтобы из данных отрезков можно было составить треугольник, достаточно доказать, что наибольший из них (пусть это AC') меньше суммы двух других. Повернём треугольник $AB'C$ вокруг точки A на 60° так, чтобы точка C перешла в точку B. Точка B' перейдёт при этом в новую точку X (см. рис.). Заметим, что в треугольнике $C'AX$ боковые стороны AC' и AX равны, а угол между ними больше 60°. Тогда сторона $C'X$ в нём наибольшая и не превосходит $C'B + BX$ по неравенству треугольника. Получаем, что $AC' < C'X \le C'B + BX$, что и требовалось.

5. [8] Натуральные числа от 1 до 100 раскрашены в три цвета: 50 чисел – в красный, 25 чисел – в жёлтый и 25 – в зелёный. Известно, что все красные и жёлтые числа можно разбить на 25 троек так, чтобы в каждой тройке было два красных числа и одно жёлтое, которое больше одного красного и меньше другого. Аналогичное утверждение верно для красных и зелёных чисел. Обязательно ли все 100 чисел можно разбить на 25 четвёрок, в каждой из которых два красных числа, одно жёлтое и одно зелёное, при этом жёлтое и зелёное числа лежат между красными?

Александр Грибалко

Ответ: обязательно. **Решение**. Упорядочим числа каждого цвета по возрастанию. А красные числа ещё и разобьём на две части: первые 25 назовём *малыми*, а следующие 25 – *большими*. Докажем, что можно взять в качестве k-й четверки k-е жёлтое и k-е зелёное числа и из красных k-е малое и k-е большое.

Действительно, k-е жёлтое число больше одного красного числа из своей тройки и из всех троек с меньшими жёлтыми числами, то есть больше хотя бы k красных чисел. Значит, оно больше k-го малого красного числа. С другой стороны, k-е жёлтое число меньше одного красного числа из своей тройки и из всех троек с большими жёлтыми числами, то есть меньше хотя бы $25 - (k - 1)$ красных чисел. Значит, оно меньше k-го большого красного числа. Те же рассуждения справедливы для k-го зелёного числа.

6. Пусть X – некоторое множество целых чисел, которое можно разбить на N непересекающихся возрастающих арифметических прогрессий (бесконечных в обе стороны), а меньше чем на N – нельзя. Для любого ли такого X такое разбиение на N прогрессий единственно, если **а**) [4] $N = 2$; **б**) [4] $N = 3$?

(Возрастающая арифметическая прогрессия – это последовательность, в которой каждое число больше своего соседа слева на одну и ту же положительную величину.)

Виктор Клепцын

6. **а) Ответ:** для любого. **Решение**. Предположим противное – есть четыре арифметические прогрессии A, B, C и D, причём A и B не пересекаются и дают в объединении X, и C и D – тоже. Можно считать, что у прогрессии A разность a не больше, чем у каждой из остальных.

Ясно, что A не совпадает ни с C, ни с D – иначе разбиения совпадают. Тогда A и не содержится целиком ни в C, ни в D (так как у A наименьшая разность). Значит, A пересекается и с C, и с D.

Пусть число x лежит в пересечении A и C, тогда ни одно из чисел x-a и x+a не лежит в C (иначе A совпадает с C). Значит, они оба лежат в D, а разность прогрессии D – делитель числа $2a=(x+a)-(x-a)$, причём не меньший a, то есть это $2a$ или a. Последнее невозможно, поскольку A не совпадает с D. Аналогично получаем, что разность прогрессии C равна $2a$. Тогда прогрессии C и D в объединении дают A, а прогрессия B отсутствует – противоречие.

б) **Ответ**: не для любого. **Решение**. Пусть *X* – все целые числа, дающие остатки 0, 3, 4, 6, 8 или 9 при делении на 12. Первое разбиение: все числа, кратные 3; все числа с остатком 4 от деления на 12; все числа с остатком 8 от деления на 12. Второе разбиение: все числа, кратные 4; все числа с остатком 3 от деления на 6; все числа с остатком 6 от деления на 12.

Докажем, что на две прогрессии разбить *X* нельзя. Предположим противное. Заметим, что тогда минимум четыре числа из 0, 3, 4, 6, 8, 9, 12 принадлежат одной прогрессии. Тогда минимум два из них лежат «с одной стороны» от 6, и поэтому разность этой прогрессии – либо 1, либо 2, либо 3, либо 4. Первые два случая невозможны (возникнут лишние числа), а в остальных двух случаях оставшееся множество – не прогрессия.

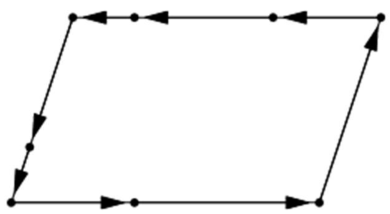
7. [10] Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.

Александр Юран

Решение 1. У каждого параллелограмма с горизонтальными сторонами покрасим верхнюю сторону в синий цвет, а нижнюю в красный. То же сделаем со всеми имеющимися горизонтальными сторонами треугольников (если треугольник снизу от стороны, красим её в синий, иначе – в красный). А если у 100-угольника есть горизонтальные стороны, то их покрасим наоборот: верхнюю в красный цвет, а нижнюю в синий.

Теперь каждый горизонтальный отрезок на рисунке покрашен один раз в синий цвет («снизу») и один раз в красный («сверху»), поэтому синего и красного цвета мы потратили поровну. Но ведь и в каждом параллелограмме, и в нашем 100-угольнике синего и красного цвета было использовано поровну. Поэтому если их стереть и оставить только два треугольника, то в них тоже синего и красного поровну. Другими словами, если у одного есть синяя горизонтальная сторона какой-то длины, то у другого есть красная горизонтальная сторона такой же длины!

Аналогично докажем, что остальные стороны треугольников попарно равны. Следовательно, они равны по трём сторонам.

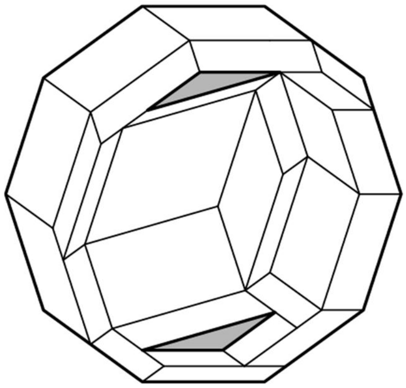


Решение 2. Для каждой фигуры – параллелограмма и треугольника – рассмотрим все вершины фигур на границе. Для каждой фигуры проведём между соседними точками на границе векторы так, чтобы их направление соответствовало обходу границы фигуры против часовой стрелки.

Рассмотрим произвольную прямую ℓ и все векторы, параллельные ей. Сумма этих векторов равна нулю. Действительно, к каждой линии разреза, параллельной ℓ, примыкают наборы противоположных векторов. Если ℓ параллельна сторонам 100-угольника, то сумма векторов, соответствующих противоположным сторонам 100-угольника, также равна нулю, так как они будут направлены в противоположные стороны и равны по длине.

С другой стороны, в каждом параллелограмме сумма векторов, соответствующих противоположным сторонам, равна нулю. Следовательно, и в двух треугольниках сумма всех векторов, параллельных ℓ, также будет нулевой.

Выберем в качестве ℓ прямую, параллельную какой-нибудь из сторон первого треугольника. Получим, что набор векторов второго треугольника, параллельных ℓ, – это векторы, противоположные векторам первого треугольника. Аналогично для двух других сторон. Поэтому для каждой стороны первого треугольника существует параллельная и равная ей по длине сторона второго треугольника. Следовательно, треугольники равны.



Замечание. Разрезания из условия существуют, причём они могут быть устроены достаточно несимметричным образом (например, не обязательно все стороны треугольников параллельны сторонам 100-угольника, треугольники не обязательно: образуют параллелограмм, примыкают к сторонам 100-угольника, симметричны относительно центра 100-угольника). На рисунке справа приведён пример разрезания 10-угольника.

Сложный вариант, 10–11 классы

1. [4] Даны две последовательности из букв А и Б, в каждой из которых по 100 букв. За одну операцию разрешается или вставить в какое-то место последовательности (возможно, в начало или в конец) любое количество одинаковых букв, или убрать из последовательности любое количество подряд идущих одинаковых букв. Докажите, что из первой последовательности можно получить вторую не более чем за 100 операций.

Владислав Новиков

Решение. Сначала решим аналогичную задачу для последовательностей из двух букв, а именно докажем, что из одной последовательности можно получить другую не более чем за 2 операции.

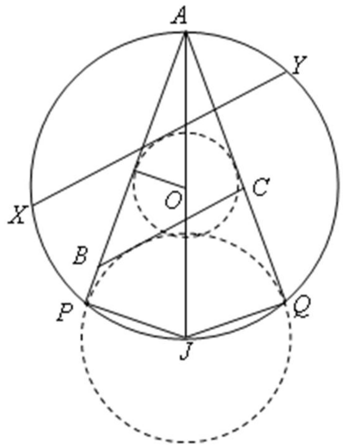
Если одна из последовательностей – это АА, а другая – ББ, уберём все буквы первой последовательности, а затем добавим буквы второй последовательности. В противном случае в последовательностях есть одинаковые буквы (возможно, стоящие на разных местах). Оставим в первой последовательности эту букву, а другую уберём. Затем добавим в нужное место букву, которой недостаёт для второй последовательности.

Вернёмся к первоначальной задаче. Разобьём каждую последовательность на 50 пар подряд идущих букв. За две операции каждую пару первой последовательности можно переделать в соответствующую пару второй последовательности.

2. [5] Периметр треугольника *ABC* равен 1. Окружность w касается стороны *BC*, продолжения стороны *AB* в точке *P* и продолжения стороны *AC* в точке *Q*. Прямая, проходящая через середины сторон *AB* и *AC*, пересекает описанную окружность треугольника *APQ* в точках *X* и *Y*. Найдите длину отрезка *XY*.

Давид Бродский

Ответ. 0,5.



Решение. Отметим, что w – вневписанная окружность треугольника ABC. Пусть J – её центр. Описанная окружность W треугольника APQ – это окружность с диаметром AJ. Пусть O – её центр. Гомотетия с центром в точке A и коэффициентом 0,5 переводит w в окружность с центром O, касающуюся хорд AP, AQ и XY. Значит, эти хорды равноудалены от центра W, то есть имеют равные длины. Но, как известно, длина AP равна половине периметра треугольника ABC, то есть 0,5.

3. [6] Дан многочлен $P(x)$ степени $n > 5$ с целыми коэффициентами, имеющий n различных целых корней. Докажите, что многочлен $P(x) + 3$ имеет n различных действительных корней.

Михаил Малкин

Решение. Пусть $Q(x) = P(x) + 3$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ – корни $P(x)$, $y_i = ½\,(x_i + x_{i+1})$, 1 £ i £ n – 1. Тогда $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_n)$ (a – ненулевое целое число). Заметим, что $|P(y_i)|$ ³ $(½)^2(^3/_2)^2(^5/_2)^2 > 3$ при всех указанных i. Если n чётно и $a > 0$, то $P(x)$ £ 0 на отрезках $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$, а многочлен $Q(x)$ равен 3 в концах этих отрезков и отрицателен в их серединах, то есть имеет по два корня на каждом из них – всего n корней.

Если n чётно и $a < 0$, то $P(x)$ £ 0 на отрезках $[x_2, x_3]$, $[x_4, x_5]$, …, $[x_{n-2}, x_{n-1}]$, а $Q(x)$ имеет по два корня на каждом из них и по корню на (– ¥, x_1) и (x_n, + ¥) – всего n корней.

Если n нечётно, то аналогично $Q(x)$ имеет по два корня на каждом из $^{n-1}/_2$ отрезков вида $[x_i, x_{i+1}]$ и корень на одном из интервалов (– ¥, x_1) или (x_n, + ¥) – всего n корней.

4. [8] См. задачу 7 младших классов.

5. [8] Дано целое число $h > 1$. Назовём положительную обыкновенную дробь (не обязательно несократимую) *хорошей*, если сумма её числителя и знаменателя равна h. Скажем, что число h *замечательное*, если каждую положительную обыкновенную дробь, знаменатель которой меньше h, можно выразить через хорошие дроби (не обязательно различные) с помощью операций сложения и вычитания. Докажите, что h замечательное тогда и только тогда, когда оно простое.
(Напомним, что у обыкновенной дроби числитель целый, а знаменатель натуральный.)

Татьяна Казицына

Решение. 1) h – простое число. Пусть n – натуральное число, меньшее h. Поскольку числа n и $h - n$ взаимно просты, найдутся целые a и b, при которых $a(h - n) + bn = 1$. При этом $a\frac{h-n}{n}+b(h-1)\frac{1}{h-1}=\frac{1}{n}$, то есть дробь $\frac{1}{n}$ является алгебраической суммой хороших дробей. Этого достаточно, чтобы получить все дроби со знаменателем n, следовательно, h – замечательное число.

2) h – составное число. Пусть p – один из простых делителей числа h и $p^k < h \le p^{k+1}$. Заметим, что хорошая дробь со знаменателем, кратным p^k, имеет вид $\frac{h - ap^k}{ap^k}$ ($0 < a < p$), и после сокращения на p её знаменатель не кратен p^k. Значит, всякую хорошую дробь можно записать в виде дроби со знаменателем, не кратным p^k. Но тогда дробь $\frac{1}{p^k}$ не является алгебраической суммой хороших дробей, то есть h – не замечательное число.

6. [10] Середины всех высот некоторого тетраэдра лежат на его вписанной сфере. Обязательно ли тогда этот тетраэдр правильный?

Михаил Евдокимов

Ответ: обязательно. **Решение**. Пусть r – радиус, O – центр вписанной сферы S тетраэдра $ABCD$. Пусть объем V_{OABC} меньше четверти объема V_{ABC} тетраэдра. Тогда r меньше четверти высоты h_D, опущенной на грань ABC, то есть середина этой высоты не может лежать на S. Противоречие.

Отсюда видно, что все высоты равны $4r$, центр O лежит на пересечении высот и делит их в отношении 3:1, считая от вершины. Таким образом, O – пересечение плоскостей, параллельных граням и делящим высоты в отношении 3:1. Но это пересечение совпадает с центром масс вершин тетраэдра, то есть основания высот совпадают с точками пересечения медиан граней.

Пусть K – точка пересечения медиан треугольника ABC. Тогда $AO \perp BCD$, прямая AK – проекция прямой AO на грань ABC. По теореме о трёх перпендикулярах $AK \perp BC$, то есть все высоты граней совпадают с медианами. Следовательно, все грани – равносторонние треугольники.

7. [12] На острове живут хамелеоны пяти цветов. Когда один хамелеон кусает другого, цвет укушенного хамелеона меняется на один из этих пяти цветов по некоторому правилу, причём новый цвет зависит только от цвета укусившего и цвета укушенного. Известно, что 2023 красных хамелеона могут договориться о последовательности укусов между собой, после которой все они станут синими. При каком наименьшем k можно гарантировать, что k красных хамелеонов, кусая только друг друга, смогут стать синими? (Например, правила могут быть такими: если красный хамелеон кусает зелёного, укушенный меняет цвет на синий; если зелёный кусает красного, укушенный остаётся красным, то есть «меняет цвет на красный»; если красный кусает красного, укушенный меняет цвет на жёлтый, и т. д. Правила смены цветов могут быть другими.)

Михаил Раскин

Ответ: при $k = 5$.

Решение. Для начала приведём пример правил, при которых для описанной перекраски потребуется хотя бы 5 красных хамелеонов. Занумеруем цвета так, чтобы красный был первым цветом, а синий – последним. Пусть правила выглядят так: если хамелеон цвета $k < 5$ кусает хамелеона того же цвета, укушенный меняет цвет на $k + 1$. Кроме того, хамелеон, укушенный хамелеоном синего цвета, становится синим. Никакие другие ситуации цвета хамелеонов не меняют. Несложно заметить, что если изначально хамелеонов всего 4, то ни у одного из них не получится стать синим. (Действительно, никакой появившийся цвет не может исчезнуть раньше появления синего. Кроме того, никакой цвет не может появиться раньше, чем появятся все предыдущие. Тогда к моменту появления первого синего хамелеона есть хотя бы по одному хамелеону каждого из остальных цветов, то есть это 4 хамелеона разного цвета, но их укусы друг друга уже не изменят их окраски.) С другой стороны, если красных хамелеонов больше 4, то сначала четыре из них приобретают 2-й цвет, потом три – 3-й, два – 4-й, после чего один становится синим и превращает в синих всех остальных.

Теперь докажем, что 5 хамелеонов хватит. Рассмотрим *основную* группу из 2023 хамелеонов, которые постепенно из красных становятся синими, и *контрольную* группу из пяти красных хамелеонов, которых предстоит превратить в синие.

1-й этап. Пусть в основной группе использовалось всего n £ 5 цветов. Пронумеруем эти цвета в соответствии с моментами их первого появления (1-й цвет будет красным). На этом этапе на m-м шаге ($1 < m$ £ n) будем превращать одного из красных хамелеонов контрольной группы в хамелеона цвета m (после этого в контрольной группе будет по одному хамелеону цветов 2, ..., m и $6 - m$ красных). Для этого рассмотрим момент, когда в основной группе впервые возник хамелеон X цвета m. В начале он был красным и приобрел свой цвет после того, как его укусили несколько хамелеонов, имеющих цвета с меньшими номерами (других до этого момента в основной группе не было). Возьмём в контрольной группе красного хамелеона и устроим ему ту же последовательность кусаний (это возможно, поскольку среди оставшихся хамелеонов есть хамелеоны всех цветов от 1 до $m - 1$). В конце этого этапа в контрольной группе будет по одному хамелеону цветов 2, ..., n и $6 - n$ красных.

2-й этап. Перенумеруем цвета в соответствии с моментами их последнего исчезновения в основной группе (n-й цвет будет синим). Рассмотрим момент исчезновения цвета 1. При этом последний хамелеон цвета 1 перекрасился после укуса хамелеона, имеющего цвет с большим номером (хамелеонов с номером 1 в основной группе больше нет). Пусть после окончания 1-го этапа хамелеон контрольной группы с тем же номером укусит всех хамелеонов цвета 1 (если они красные, то их может быть больше одного). Далее аналогично уберём хамелеонов цвета 2, ..., пока все хамелеоны не станут синими.