44-й Международный математический Турнир городов
Решения задач весеннего тура

Базовый вариант, 8–9 классы

1. В кабинете сидят N неряx, у каждого на его столе скопилось ненулевое количество мусора. Неряхи выходят обедать по одному (после возвращения предыдущего), а в это время каждый из остальных перекладывает половину мусора со своего стола на стол вышедшего. Может ли случиться, что после того, как все пообедали, количество мусора на столах ни у кого не изменится, если **а**) [1] $N = 2$; **б**) [3] $N = 10$?

Алексей Заславский

Ответ: может.

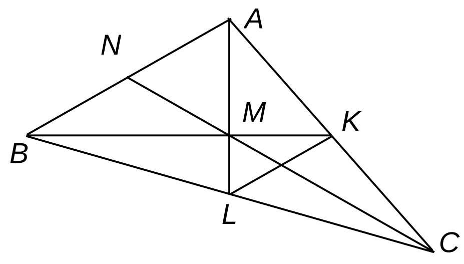
Решение. **а**) Подходит пример, когда у первого ушедшего 2 г мусора, а у второго – 4 г.

б) Занумеруем неряx в порядке их ухода на обед. Пусть на столе i-того неряхи лежит 2^i г мусора. После ухода первого на его столе окажется $2 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^9 = 2^{10}$ г мусора, а на остальных столах вес мусора уменьшится вдвое, то есть произойдёт циклический сдвиг. После ухода второго произойдёт аналогичный сдвиг, а после 10 таких сдвигов на всех столах окажется исходное количество мусора.

2. [4] В треугольнике ABC провели медианы BK и CN, пересекающиеся в точке M. Какое наибольшее количество сторон четырёхугольника $ANMK$ может иметь длину 1?

Егор Бакаев

Ответ: 2 стороны. **Решение**. Подходит, например, любой треугольник, где $AB = AC = 2$. Докажем, что трёх равных сторон быть не может.



Способ 1. Предположим, что хотя бы три стороны четырёхугольника $ANMK$ равны 1. Возможны всего два принципиально различных случая.

1) $AN = NM = MK = 1$. Тогда $NB = 1$, $MB = 2$, значит, $MN + NB = MB$.

2) $KA = AN = NM = 1$. Тогда $AC = 2$, $NC = 3$, значит, $NA + AC = NC$.

В обоих случаях получено противоречие с неравенством треугольника.

Способ 2. Если более двух сторон четырёхугольника равны 1, то либо $AK = NA$, либо $KM = MN$. В первом случае треугольник ABC равнобедренный. Во втором случае $BK = CN = 3$, так что и в этом случае треугольник ABC равнобедренный. Отсюда следует, что $AK = KM = MN = NA$, то есть $AKMN$ – ромб. Противоречие, так как прямые AK и NM не параллельны.

Способ 3. Пусть L – середина стороны BC. Если $NM = NA = NB$, то треугольник AMB прямоугольный. Треугольник LMK подобен треугольнику AMB с коэффициентом 0,5, поэтому $MK < LK = NA$. Далее, $AM > LM$, поэтому у треугольника AMK гипотенуза больше,

чем у треугольника *LMK*, то есть $AK > LK = NA$. Таким образом в четырёхугольнике *ANMK* нет трёх равных друг другу сторон.
Случай, когда $KM=KA$ аналогичен, а если $KM \neq KA$ и $NM \neq NA$, то среди отрезков *NM*, *NA*, *KM*, *KA* также нет трёх равных друг другу.

Замечание. Любые две стороны четырёхугольника *ANMK* могут быть равны 1. Равенство $NM = NA$ выполнено в треугольнике с перпендикулярными медианами (см. способ 3). Равенство $NA = MK$ выполнено в треугольнике, где $AB = 2$, $BK = 3$.

3. [5] На столе лежат 2023 игральных кубика. За 1 рубль можно выбрать любой кубик и переставить его на любую из четырёх граней, которые сейчас для него боковые. За какое наименьшее количество рублей гарантированно удастся поставить все кубики так, чтобы на верхних гранях у них было поровну точек? (Количества точек на гранях каждого игрального кубика равны числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, суммарное число точек на противоположных гранях всегда равно 7.)

Егор Бакаев

Ответ: за 2022 рубля.
Решение 1. Пусть есть пара *противоположных* кубиков, то есть сумма точек на их верхних гранях равна 7. Заметим, что на эту пару потребуется суммарно 2 рубля, к какому бы значению ни захотелось их привести. Будем откладывать пары противоположных, пока они есть. Так как исходное количество кубиков нечётно, то в конце останется хотя бы один кубик. Тогда остальные непарные кубики, каждый не более чем за рубль, можно привести в состояние этого оставшегося кубика. Значит, 2022 рублей хватит.
С другой стороны, мог остаться только один кубик без пары, поэтому 2022 рубля необходимо.

Решение 2. Обозначим через k_i общее количество кубиков с i точками на верхней грани, а через n_i – наименьшее количество рублей, за которое можно на всех верхних гранях сделать по i точек. Тогда $k_1 + \ldots + k_6 = 2023$, а $n_1 = k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + 2k_6 = 2023 + k_6 - k_1$, и аналогично $n_2 = 2023 + k_5 - k_2$, ..., $n_6 = 2023 + k_1 - k_6$. Тогда $n_1 + \ldots + n_6 = 6 \times 2023$. Пусть среди чисел $n_1, \ldots, n_6$ нет числа, меньшего 2023. Тогда $n_1 = \ldots = n_6 = 2023$, откуда $k_1 = k_6$, $k_2 = k_5$, $k_3 = k_4$, поэтому $2023 = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = 2(k_1 + k_2 + k_3)$ – чётное число. Противоречие. Значит, одно из чисел $n_1, \ldots, n_6$ не превосходит 2022, то есть 2022 рублей в любом случае достаточно.
При $k_1 = \ldots = k_5 = 337$, $k_6 = 338$ получим $n_1 = 2024$, $n_2 = \ldots = n_5 = 2023$, $n_6 = 2022$, то есть 2021 рубля недостаточно.

4. [5] Для произвольного числа x рассмотрим сумму

$$Q(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{x}{10000} \right\rfloor.$$

Найдите разность $Q(2023) - Q(2022)$. (Здесь $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Алексей Толпыго

Ответ: 6. **Решение**. Очевидно, $\left\lfloor\frac{x-1}{k}\right\rfloor \le \left\lfloor\frac{x}{k}\right\rfloor$. Неравенство $\left\lfloor\frac{x-1}{k}\right\rfloor < \left\lfloor\frac{x}{k}\right\rfloor = m$ означает, что $x - 1 < km \le x$, откуда $x = km$, то есть x делится на k, и тогда $\left\lfloor\frac{x-1}{k}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{k}\right\rfloor - 1$. Верно и обратное: если x кратно k, то $\left\lfloor\frac{x-1}{k}\right\rfloor < \left\lfloor\frac{x}{k}\right\rfloor$.

Значит, среди чисел $\lfloor 2023\rfloor - \lfloor 2022\rfloor$, $\left\lfloor\frac{2023}{2}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{2022}{2}\right\rfloor, \ldots, \left\lfloor\frac{2023}{10000}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{2022}{10000}\right\rfloor$ единиц ровно столько, сколько у числа 2023 натуральных делителей, не превосходящих 2023, а остальные числа равны нулю. *Разность* $Q(2023) - Q(2022)$ равна сумме вышеуказанных чисел, то есть количеству натуральных делителей числа $2023 = 7 \cdot 17^2$, а оно равно 6.

5. На каждой клетке доски 5×5 лежит по одной монете, все монеты внешне одинаковы. Среди них ровно 2 монеты фальшивые, они одинакового веса и легче настоящих, которые тоже весят одинаково. Фальшивые монеты лежат в клетках, имеющих ровно одну общую вершину. Можно ли за одно взвешивание на чашечных весах без гирь гарантированно найти **а**) [2] 13 настоящих монет; **б**) [3] 15 настоящих монет; **в**) [2] 17 настоящих монет?

Рустэм Женодаров, Александр Грибалко, Сергей Токарев

Ответ: а) можно; **б)** можно; **в**) нельзя.

Решение. Раскрасим доску и монеты на ней в шахматном порядке (угловые клетки чёрные). Отметим, что обе фальшивые монеты одного цвета.

а) Способ 1. Положим на весы 16 монет, лежащих на краю доски: на одну чашку – 8 чёрных, на другую – 8 белых. Возможны три случая.

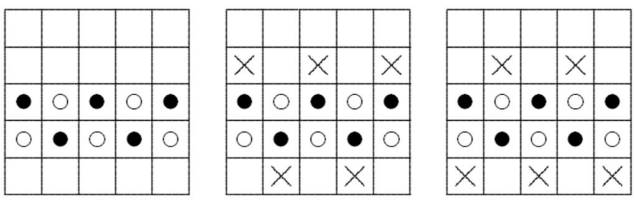
1) Весы в равновесии. Так как фальшивые монеты могли быть на только на одной чаше, их нет среди взвешиваемых монет, то есть все 16 взвешиваемых монет настоящие.

2) Перевесила «чёрная» чашка. Тогда одна фальшивая монета – на «белой» чашке. Следовательно, все 13 чёрных монет настоящие.

3) Перевесила «белая» чашка. Тогда одна фальшивая монета – на «чёрной» чашке. Поэтому центральная монета настоящая. И все 12 белых монет тоже.

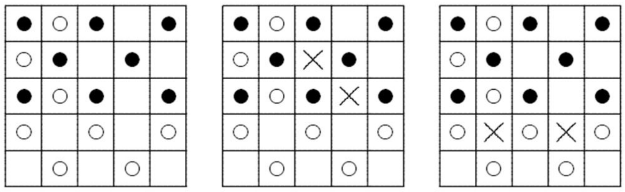
Обобщение. Отложим любую чёрную монету A и всех её соседей по диагонали. Из оставшихся чёрных монет положим на одну чашу не менее 7, а на другую – столько же белых. При равновесии все монеты на весах настоящие (их не меньше 14). Если перевесят чёрные, то все чёрные монеты настоящие, а если белые, то все белые и A.

Способ 2. Положим на чаши 4 чёрные монеты, соседние с центральной, левые – на левую, правые – на правую. При равновесии все чёрные монеты настоящие (так как две фальшивые чёрные монеты не могут быть ни на разных чашах, ни обе вне чаш). Если какая-то чаша перевесит, то настоящие – две монеты на этой чаше и все белые монеты.



б) **Способ 1**. Взвесим чёрные монеты против белых на рисунке слева. В случае равновесия 15 монет в нижних трёх строках настоящие. Если чёрные монеты тяжелее, не взвешиваемая фальшивая монета может находиться только в квадратах, отмеченных крестиками на рис.

в центре. Следовательно, мы нашли $25 - 5 - 5 = 15$ настоящих монет. Если белые монеты тяжелее, ситуация показана на рисунке справа с тем же результатом.



Способ 2. Взвесим чёрные монеты против белых на левом рисунке. В случае равновесия все 16 взвешиваемых монет настоящие. Если чёрные монеты тяжелее, не взвешиваемая фальшивая монета может находиться только в двух квадратах, отмеченных крестиками на центральном рисунке. Таким образом, найдены 25 – 8 – 2 = 15 настоящих монет. Если белые монеты тяжелее, получим тот же результат (правый рисунок.

Способ 3. Из пятой строки две белые монеты положим на левую чашку, две чёрные – на правую, а одну монету отложим. Остальные белые – на правую, чёрные – на левую чашку.
При равновесии все монеты из первых трёх строк настоящие. Если какая-то чашка перевесит, то настоящие – все 12 монет на ней и все монеты из пятой строки (итого 15 монет).

в) Априори любая из 25 монет *подозрительна* (может быть фальшивой). Взвешивание может иметь 3 исхода, поэтому хотя бы при одном из них подозрительными останутся не меньше 9 монет, то есть будет найдено не более $25 - 9 = 16$ настоящих монет.

Замечание. Докажем, что даже 16 настоящих монет гарантированно найти нельзя.
Рассмотрим граф: вершины – клетки, рёбра соединяют пары клеток, имеющих единственную общую вершину. Он распадается на две компоненты – чёрную и белую. Взвешивание – разбиение вершин на три части: П – монеты на правой чашке, Л – на левой, С – монеты на столе. В случае равновесия подозрительными остаются рёбра вида ЛП и СС, покрасим их в красный цвет. Если перевесит правая чашка, подозрительны ребра ЛЛ и ЛС (покрасим их в синий), если левая – ПП и ПС (в зелёный).
Пусть при любом исходе удаётся определить 16 настоящих монет. Тогда подграф, порождённый рёбрами каждого цвета, должен содержать не более 9 вершин. Значит, есть вершины, в которых сходятся разные цвета. Пусть в белой компоненте такая вершина единственна. Удалив её со всеми входящими рёбрами, получим связный граф на 11 вершинах, который не может иметь все рёбра одного цвета. Противоречие.
Следовательно, в белой компоненте хотя бы две «нехороших» вершины. Аналогичное верно и для чёрной компоненты.
Оценим двумя способами суммарное число вершин во всех трёх указанных подграфах. С одной стороны, их не больше $3 \cdot 9 = 27$, с другой – не меньше чем 25 + 2 + 2 («нехорошие вершины» подсчитаны как минимум дважды). Противоречие.

Базовый вариант, 10–11 классы

1. [4] См. задачу 3 младших классов.

2. [4] Дано натуральное число n. Для произвольного числа x рассмотрим сумму

$$Q(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{x}{10^n} \right\rfloor.$$

Найдите разность $Q(10^n) - Q(10^n - 1)$. (Здесь $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Алексей Толпыго

Ответ: $(n + 1)^2$. **Решение**. Очевидно, $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$. Неравенство $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor = m$ означает, что $x - 1 < km \le x$, откуда $x = km$, то есть x делится на k, и тогда $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - 1$. Верно и обратное: если x кратно k, то $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$. Пусть $y = 10^n$.

Тогда среди чисел $\lfloor y \rfloor - \lfloor y - 1 \rfloor, \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y-1}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{y}{y} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y-1}{y} \right\rfloor$ единиц ровно столько, сколько у числа y натуральных делителей, не превосходящих y, а остальные числа равны нулю. *Разность* $Q(y) - Q(y - 1)$ равна сумме вышеуказанных чисел, и значит, равна количеству натуральных делителей числа $y = 2^n \times 5^n$, то есть $(n + 1)^2$.

3. [5] Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC, N – основание биссектрисы угла B. Касательная к описанной окружности треугольника AIN в вершине A и касательная к описанной окружности треугольника CIN в вершине C пересекаются в точке D. Докажите, что прямые AC и DI перпендикулярны.

Михаил Евдокимов

Решение 1. Рассмотрим центр J вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC. Поскольку $\angle IAJ = \angle ICJ = 90^\circ$ (биссектрисы смежных углов перпендикулярны), точки A и C лежат на окружности ω с диаметром IJ. По условию $\angle ACD = \angle NCD = \angle CIN = \angle CIJ = \angle CAJ$, аналогично $\angle CAD = \angle ACJ$. Значит, треугольники ACD и CAJ симметричны относительно серединного перпендикуляра к общей стороне AC. Если точки D и J совпадают, то треугольники IAJ и ICJ равны по катету и гипотенузе. Значит, прямая $ID = IJ$ совпадает с указанным серединным перпендикуляром. Если они не совпадают, точка D также лежит на ω и $DI \perp DJ \parallel AC$.

Решение 2. Пусть перпендикуляр, опущенный из I на AC вторично пересекает описанную окружность треугольника AIC в точке D'. Тогда

$$\angle D'AC = \angle D'IC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = \angle AIN.$$

Значит, $D'A$ – касательная к описанной окружности треугольника AIN. Аналогично $D'C$ – касательная к описанную окружности треугольника CIN. Следовательно, D и D' совпадают.

Решение 3. Нетрудно понять, что точки I и D лежат по разные стороны от прямой AC. Поскольку ÐACD = ÐNCD = ÐCIN, ÐCAD = ÐAIN, то

$$\text{Ð}ADC = 180° – \text{Ð}ACD – \text{Ð}CAD = 180° – \text{Ð}AIC.$$

Значит, четырёхугольник $AICD$ вписан. Один из углов между хордами AC и DI равен

$$\text{Ð}DAC + \text{Ð}ADI = \text{Ð}AIN + \text{Ð}ACI = \text{Ð}IAB + \text{Ð}ABI + \text{Ð}ACI = \frac{1}{2}(\text{Ð}A + \text{Ð}B + \text{Ð}C) = 90°.$$

4. [5] Бесконечные возрастающие арифметические прогрессии a_1, a_2, a_3, ... и b_1, b_2, b_3, … состоят из положительных чисел. Известно, что отношение $\frac{a_k}{b_k}$ целое при любом k. Верно ли, что это отношение не зависит от k?

Борис Френкин

Ответ: верно.

Решение 1. Пусть $a_k = a + ck$, $b_k = b + dk$. Тогда $\lim\limits_{k \text{®} \text{¥}} \frac{a_k}{b_k} = \frac{c}{d}$. Но целочисленная последовательность может иметь пределом только целое число, причём все её члены с какого-то момента должны совпадать с этим пределом. Значит, $m = \frac{c}{d}$ – целое число и $\frac{a+ck}{b+dk} = \frac{c}{d}$ при всех достаточно больших k. Но тогда $ad = bc$, то есть $a = bm$, и поскольку $c=dm$, получаем, что $\frac{a_k}{b_k} = m$ при всех k.

Решение 2. Для положительных чисел p, q, r, s воспользуемся следующим фактом: если $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, то $\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$ (легко проверить). Используем обозначения решения 1. Доопределим $a_0 = a$, $b_0 = b$. Предположим, что $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Докажем индукцией по $k \geq 0$, что $\frac{a_k}{b_k} < \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} < \frac{c}{d}$. База k=0 получается применением указанного факта к неравенству $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, а переход от k к k+1 – применением факта к неравенству $\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} < \frac{c}{d}$. Тогда последовательность $\frac{a_k}{b_k}$ целых чисел возрастает, оставаясь ограниченной сверху. Противоречие. Аналогично к противоречию ведёт предположение $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. Значит, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, а тогда и $\frac{a_k}{b_k} = \frac{c}{d}$.

5. Даны пять точек, расстояние между любыми двумя из них больше 2. Верно ли, что расстояние между какими-то двумя из них больше 3, если эти 5 точек расположены

а) [3] на плоскости;

б) [3] в пространстве?

Алексей Толпыго

а) **Ответ:** верно.

Решение 1. **Лемма**. Если в треугольнике две стороны больше 2, а угол между ними больше 105°, то длина третьей стороны больше 3.

Доказательство. Заметим, что $\sin 15^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{2\cos 15^\circ} > \frac{\sin 30^\circ}{2} = \frac{1}{4}$. По теореме косинусов квадрат третьей стороны больше $2^2 + 2^2 - 8\cos 105^\circ = 8 + 8\sin 15^\circ > 10 > 3^2$. •

Рассмотрим два случая.

1) Выпуклая оболочка данных пяти точек – пятиугольник *ABCDE*. Тогда один из его углов (пусть *B*) не меньше 3×180°:5 = 108°. По лемме *AC* > 3.

2) Выпуклая оболочка – четырёхугольник или треугольник. Тогда одна из точек (пусть *D*) принадлежит одному из треугольников (пусть *ABC*), образованному тремя другими точками. В этом случае один из углов *ADB*, *ADC*, *BDC* не меньше 120°. По лемме сторона треугольника, на которую он опирается, больше 3.

Замечания. **1**. Случай, когда выпуклая оболочка – отрезок, очевиден.

2. Аналогичные рассуждения доказывают, что найдутся даже точки на расстоянии, большем 1 + $\sqrt{5}$. Улучшить этот результат нельзя, что доказывает пример правильного пятиугольника.

б) **Ответ**. Неверно. *Пример*. Рассмотрим пять вершин правильной четырёхугольной пирамиды с равными рёбрами и диагональю основания длины 3. Тогда длины всех рёбер равны $\frac{3}{\sqrt{2}} > 2$. Можно даже взять 6 точек – в вершинах правильного октаэдра, или в вершинах правильной треугольной призмы с равными рёбрами, у которой диагональ боковой грани равна 3.

Замечание 1. В условиях задачи в пространстве можно показать, что расстояние между какими-то двумя точками больше $4\sqrt{\frac{3}{7}} \approx 2{,}6186$. Этот результат нельзя улучшить, что показывает следующий пример.

Рассмотрим правильную треугольную пирамиду со стороной основания 3 и высотой 1,5. Её боковое ребро равно $\sqrt{3 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{2}$ > 2. Склеив две такие пирамиды основаниями, получим бипирамиду (5 вершин), у которой отношение наибольшего расстояния между вершинами к наименьшему как раз равно $2\sqrt{\frac{3}{7}}$.