Материалы для проведения заключительного этапа

LI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2024–2025 учебный год

Сириус,
16–22 апреля 2025 г.

Москва, 2025

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа LI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Условия и решения задач

9 класс

9.1. На прямоугольном листе бумаги провели несколько отрезков, параллельных его сторонам. Эти отрезки разбили лист на несколько прямоугольников, внутри которых нет проведённых линий. Петя хочет провести в каждом из прямоугольников разбиения одну диагональ, разбив его на два треугольника, и окрасить каждый треугольник либо в чёрный, либо в белый цвет. Верно ли, что он обязательно сможет это сделать так, чтобы никакие два одноцветных треугольника не имели общего отрезка границы?

Ответ. Да, верно.

Решение. Пусть Петя проведёт в каждом из прямоугольников диагональ из левого нижнего угла в правый верхний. После этого все треугольники, примыкающие к левым верхним углам прямоугольников, он покрасит в чёрный цвет, а остальные — в белый.

Докажем, что такая раскраска подойдёт. Рассмотрим общий отрезок границы двух треугольников. Если этот отрезок диагональный, то сверху к нему примыкает чёрный треугольник, а снизу белый. Если отрезок горизонтальный, то к нему сверху примыкает белый треугольник, а снизу — чёрный; случай вертикального отрезка аналогичен. Поэтому такая раскраска подходит.

9.2. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Точки касания описанных окружностей треугольников ABE и CDE с их общими внешними касательными лежат на окружности ω. Точки касания описанных окружностей треугольников ADE и BCE с их общими внешними касательными лежат на окружности γ. Докажите, что центры окружностей ω и γ совпадают.

Решение. Обозначим центры описанных окружностей треугольников ABE, BCE, CDE, ADE через O_{AB}, O_{BC}, O_{CD}, O_{AD} соответственно. Пусть T_1, T_2 — точки касания одной из общих касательных с описанными окружностями треугольников ABE и CDE соответственно; обозначим через O и T середины отрезков $O_{AB}O_{CD}$ и T_1T_2 соответственно (см. рис. 1). Тогда в прямоугольной трапеции $O_{AB}T_1T_2O_{CD}$ прямая OT — средняя линия, поэтому она является серединным перпендикуляром к отрезку T_1T_2. Заметим, что окружность ω симметрична относительно прямой $O_{AB}O_{CD}$, на которой также лежит точка O, значит, O — центр ω.

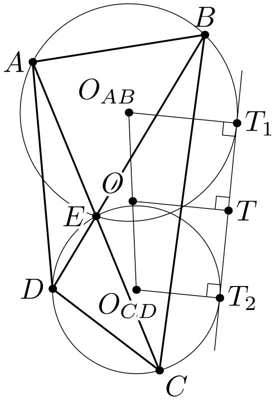


Рис. 1

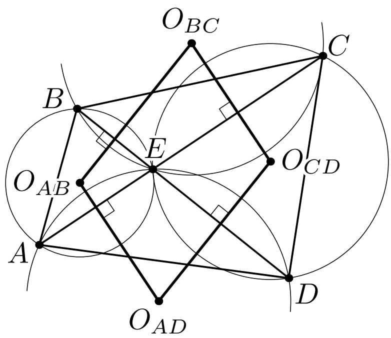


Рис. 2

Аналогично получаем, что середина отрезка $O_{AD}O_{BC}$ является центром γ. Поэтому утверждение задачи равносильно тому, что $O_{AB}O_{BC}O_{CD}O_{AD}$ — параллелограмм. Для доказательства этого достаточно заметить, что $O_{AB}O_{BC}$ и $O_{CD}O_{AD}$ — серединные перпендикуляры к отрезкам EB и ED, поэтому $O_{AB}O_{BC} \parallel O_{CD}O_{AD}$; аналогично, $O_{AB}O_{AD} \parallel O_{BC}O_{CD}$, откуда и следует требуемое.

9.3. Найдите все натуральные n, для которых существует такое *чётное* натуральное a, что число $(a-1)(a^2-1)\ldots(a^n-1)$ является точным квадратом.

Ответ. $n = 1$ и $n = 2$.

Решение. Для $n = 1$ подойдёт любое чётное a вида m^2+1, например, $a = 2$. Для $n = 2$ подойдёт любое чётное a вида m^2-1, например, $a = 8$.

Предположим, что для $n = 3$ нашлось требуемое число a. Тогда число $(a-1)(a^2-1)(a^3-1) = (a-1)^3(a+1)(a^2+a+1)$

является точным квадратом. Поскольку $a^2+a+1 = a(a+1)+1$, числа $a+1$ и a^2+a+1 взаимно просты. Раз число $a+1$ нечётно, числа $a+1$ и $a-1$ также взаимно просты. Следовательно, числа $a+1$ и $(a-1)(a^2+a+1)$ — точные квадраты. В частности, число $a+1$ при делении на 3 может давать лишь остаток 0 или 1, а тогда число $a-1$ не делится на 3. Отсюда

$$\text{НОД}(a-1, a^2+a+1) = \text{НОД}(a-1, (a+2)(a-1)+3) = \\ = \text{НОД}(a-1, 3) = 1,$$

значит, числа $a-1$ и a^2+a+1 также являются точными квадратами. Но второе являться квадратом не может, поскольку $a^2 < a^2+a+1 < (a+1)^2$. Противоречие.

Осталось доказать, что требуемого a не существует при $n \geqslant 4$. Предположим, что такое a нашлось. Возьмём такое натуральное $k \geqslant 2$, что $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. Поскольку $a^{2^k} - 1 = (a^{2^{k-1}} - 1)(a^{2^{k-1}} + 1)$, число $(a-1)(a^2-1)\ldots(a^n-1)$ представляется в виде произведения $a^{2^{k-1}} + 1$ и нескольких множителей вида $a^m - 1$, где $1 \leqslant m \leqslant n$ и $m \neq 2^k$.

Докажем, что множитель $a^{2^{k-1}} + 1$ взаимно прост со всеми остальными множителями в этом разложении. Пусть $a^{2^{k-1}} + 1$ и $a^m - 1$ имеют некоторый общий делитель d. Тогда и $\text{НОД}(a^{2^k} - 1, a^m - 1)$ кратен d. Но $\text{НОД}(a^{2^k} - 1, a^m - 1) = a^{\text{НОД}(2^k, m)} - 1$. Поскольку $m \neq 2^k$ и $m \leqslant n < 2^{k+1}$, число m не может делиться на 2^k. Таким образом, $\text{НОД}(2^k, m)$ — степень двойки, не превосходящая 2^{k-1}. Следовательно, $a^{2^{k-1}} - 1$ делится на $\text{НОД}(a^{2^k} - 1, a^m - 1)$, а значит, делится и на d. Поскольку a чётно, числа $a^{2^{k-1}} - 1$ и $a^{2^{k-1}} + 1$ не имеют общих делителей, отличных от 1, значит, $d = 1$, что и требовалось.

Множитель $a^{2^{k-1}} + 1$ взаимно прост со всеми остальными множителями в произведении, являющемся точным квадратом, поэтому он сам является точным квадратом. Тогда $a^{2^{k-1}} + 1$ и $a^{2^{k-1}}$ — отличающиеся на 1 квадраты натуральных чисел, что невозможно. Значит, наше предположение неверно, и для $n \geqslant 4$ требуемых чисел a не найдётся.

9.4. Шахматного короля поставили на клетку доски 8×8 и сделали им 64 хода так, что он побывал на всех клетках и вернулся в исходную клетку. В каждый момент времени вычислялось расстояние от центра клетки, в которой находился король, до центра всей доски. Назовём сделанный ход *приятным*, если в результате хода это расстояние стало меньше, чем было до хода. Найдите наибольшее возможное количество приятных ходов. (Шахматный король за один ход передвигается на клетку, соседнюю по стороне или по углу.)

Ответ. 44 хода.

Решение. Докажем, что среди ходов должно было быть хотя бы 20 неприятных (а значит, количество приятных ходов не больше 44). Расставим в клетках числа, как показано на рис. 3; клетки с одинаковыми числами удалены на одно и то же расстояние от центра, а клетки с меньшими номерами ближе к центру, чем клетки с бо́льшими.

9	8	7	6	6	7	8	9
8	6	5	4	4	5	6	8
7	5	3	2	2	3	5	7
6	4	2	1	1	2	4	6
6	4	2	1	1	2	4	6
7	5	3	2	2	3	5	7
8	6	5	4	4	5	6	8
9	8	7	6	6	7	8	9

Рис. 3

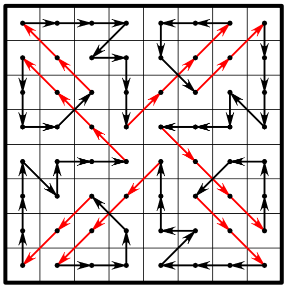


Рис. 4

Каждый ход из клетки с числом 1 не уменьшает расстояния до центра и потому неприятен — таких ходов 4. Ход из клетки с числом 2 может быть приятным, только когда он идёт в клетку с числом 1. Но на доске восемь чисел 2 и только четыре числа 1, поэтому хотя бы четыре хода из клеток с числом 2 будут неприятными.

Рассмотрим теперь ходы, ведущие в 32 клетки с числами, не меньшими 6. Заметим, что эти ходы не могут идти из клеток с числами 1 и 2, то есть в рассуждении выше они не учтены. Такой ход может быть приятным, только если он идёт из клетки с номером, не меньшим 7; однако таких клеток всего 20. Значит, среди рассмотренных ходов ещё $32 - 20 = 12$ неприятных, и общее количество неприятных ходов не меньше, чем $4+4+12 = 20$.

Пример обхода, в котором 44 приятных хода, приведён на рис. 4.

Замечание. По сути, в последней части доказательства оценки показано, что среди ходов, ведущих в клетки, отмеченные зелёным на рис. 3, есть не менее трёх неприятных. Это можно доказать разными способами, например, проведя небольшой перебор.

9.5. Пусть $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — приведённые квадратные трёхчлены, а точки A_1 и A_2 — соответственно вершины парабол $y = P_1(x)$ и $y = P_2(x)$. Через $m(g(x))$ будем обозначать наименьшее значение функции $g(x)$. Известно, что разности $m(P_1(P_2(x))) - m(P_1(x))$ и $m(P_2(P_1(x))) - m(P_2(x))$ оказались равными положительными числами. Найдите угол между прямой A_1A_2 и прямой, содержащей ось Ox.

Ответ. $45°$.

Решение. Пусть данные трёхчлены — $P_1(x) = (x-x_1)^2+y_1$ и $P_2(x) = (x-x_2)^2+y_2$, где $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ — координаты вершин парабол. Тогда $m(P_1(x)) = y_1$, а $P_1(P_2(x)) = ((x-x_2)^2 + y_2 - x_1)^2 + y_1$. Если $y_2 \leqslant x_1$, то минимальное значение выражения $((x-x_2)^2 + y_2 - x_1)^2$ равняется нулю, откуда $m(P_1(P_2(x))) - m(P_1(x)) = y_1 - y_1 = 0$. Последнее противоречит тому, что $m(P_1(P_2(x))) - m(P_1(x))$ — положительное число. Таким образом, $y_2 > x_1$, откуда $m(P_1(P_2(x))) = (y_2 - x_1)^2 + y_1$ и $m(P_1(P_2(x))) - m(P_1(x)) = (y_2 - x_1)^2$.

Аналогично, $y_1 > x_2$ и $m(P_2(P_1(x))) - m(P_2(x)) = (y_1-x_2)^2$. Теперь условие равенства разностей переписывается в виде $(y_1-x_2)^2 = (y_2-x_1)^2$. Отсюда, поскольку $y_2 > x_1$ и $y_1 > x_2$, получаем $y_1 - x_2 = y_2 - x_1$, то есть $y_2 - y_1 = -(x_2 - x_1)$. Значит, искомый угол равен $45°$.

9.6. Петя выбрал 100 попарно различных положительных чисел, меньших 1, и расставил их по кругу. Затем он проделывает с ними операции. За одну операцию можно взять три стоящих подряд (именно в таком порядке) числа a, b, c и заменить число b на $a - b + c$. При каком наибольшем k Петя мог выбрать исходные числа и сделать несколько операций так, чтобы после них среди чисел оказалось k целых?

Ответ. При $k = 50$.

Решение. *Оценка.* Покажем, что целых чисел никогда не станет больше 50.

Будем следить за разностями между числом и следующим за ним по часовой стрелке. Если подряд стояли числа a, b и c, то их разности были равны $a - b$ и $b - c$. После применения операции к числу b получатся числа a, $a-b+c$ и c, разности которых равны $a - (a - b + c) = b - c$ и $(a - b + c) - c = a - b$. Итак, в результате операции две соседние разности просто переставляются местами. Изначально все разности были нецелыми, поэтому они в любой момент времени будут нецелыми. Таким образом, два целых числа никогда не могут появиться рядом и, значит, их будет не больше 50.

Пример. Для начала расставим по кругу попеременно числа 0,1 и 0,2. Если с каждым числом 0,2 проделать операцию, то оно будет заменено на $0{,}1 - 0{,}2 + 0{,}1 = 0$, и числа через одно будут целыми.

Осталось подправить пример так, чтобы все числа стали различными. Для этого достаточно прибавить к каждому числу 0,1 по своему маленькому числу, а к каждому числу 0,2 — сумму чисел, прибавленных к его соседям. Например, выбрав $t = 0{,}001$, можно прибавить к последовательным числам 0,1 числа $0, t, 2t, \ldots, 47t, 48t, 50t$; тогда к числам 0,2 будут прибавляться числа $t, 3t, 5t, \ldots, 95t, 98t, 50t$. В результате все числа станут различными.

Явно построенный пример выглядит так:

$$0{,}1 \quad 0{,}2001 \quad 0{,}1001 \quad 0{,}2003 \quad 0{,}1002 \quad 0{,}2005 \quad 0{,}1003 \quad \ldots$$

$$\ldots \quad 0{,}1047 \quad 0{,}2095 \quad 0{,}1048 \quad 0{,}2098 \quad 0{,}105 \quad 0{,}205$$

9.7. В строку выписаны числа 1, 2, 3, …, 60 (ровно в таком порядке). Игорь и Руслан по очереди ставят знаки $+$, $-$ и $\times$ между ними, начинает Игорь; за ход каждый ставит один знак. Когда между каждыми двумя соседними числами поставлен знак, вычисляется значение полученного выражения. Если оно делится на 3, то победа присуждается Игорю, иначе Руслану. Кто из игроков может выиграть, независимо от действий соперника?

Ответ. Игорь.

Решение. Заменим все числа в строке на их остатки от деления на 3, от этого результат игры не изменится. Получим строку 1, 2, 0, …, 1, 2, 0. Промежутки между числами пронумеруем слева направо от 1 до 59.

Первым ходом Игорь ставит знак «$-$» в 30-й промежуток, а все остальные промежутки он разбивает на пары вида $(i, 30+i)$. Если Руслан ставит в какой-то промежуток знак «$+$» или «$-$», то Игорь в парный промежуток ставит «$-$» или «$+$», соответственно. А если Руслан ставит знак «$\times$», то Игорь ставит в парный промежуток также знак «$\times$».

Когда все знаки расставлены, полученное выражение разбивается на несколько слагаемых. При этом в левой и правой половинах выражения набор слагаемых одинаковый, но берутся они с противоположными знаками. Следовательно, его значение будет давать остаток 0 при делении на 3.

9.8. На периметре треугольника ABC выбраны точки D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2 так, что при обходе периметра точки встречаются в порядке A, F_1, F_2, B, D_1, D_2, C, E_1, E_2. Оказалось, что $AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2$. Докажите, что периметры треугольников, образованных тройками прямых AD_1, BE_1, CF_1 и AD_2, BE_2, CF_2, равны.

Решение. Начнём со следующей полезной леммы.

Лемма. *Пусть точки F и E выбраны соответственно на сторонах AB и AC параллелограмма $ABKC$ так, что $BE = CF$. Тогда точка K равноудалена от прямых BE и CF (см. рис. 8).*

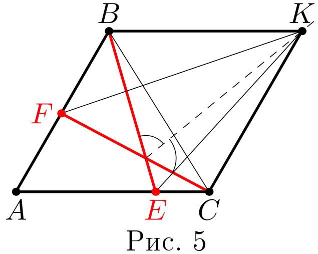


Рис. 5

Доказательство. Поскольку $BK \parallel EC$ и $CK \parallel FB$, имеем $S_{KBE} = S_{KBC} = S_{KFC}$. Так как $BE = CF$, отсюда и следует, что расстояния от точки K до прямых BE и CF равны. $\square$

Перейдём к решению. Пусть прямые из условия образуют треугольники $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$ (точки обозначены как на рис. 9).

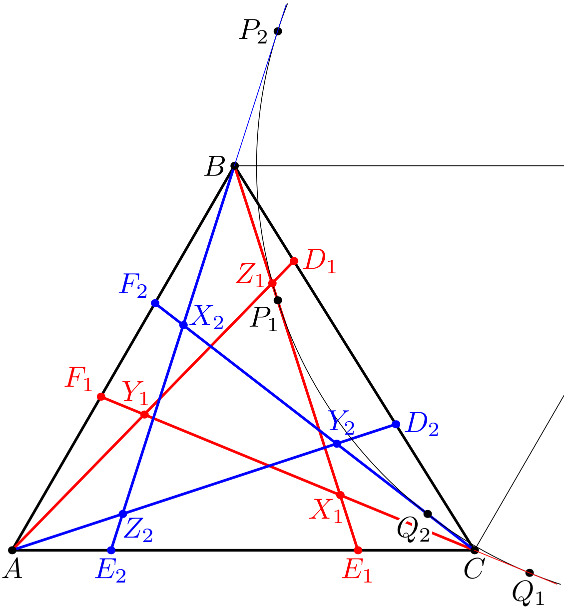


Рис. 6

Выберем точку K так, что $ABKC$ — параллелограмм; согласно лемме, точка K равноудалена от прямых BE_1, CF_1, BE_2 и CF_2; значит, существует окружность с центром K, касающаяся этих прямых в некоторых точках P_1, Q_1, P_2 и Q_2 соответственно. Тогда из равенств отрезков касательных вытекает, что

$$BX_1 - CX_1 = BP_1 + X_1P_1 - X_1Q_1 + CQ_1 = BP_2 + CQ_2 = \\ = BP_2 - X_2P_2 + X_2Q_2 + CQ_2 = CX_2 - BX_2.$$

Аналогично получаем, что $CY_1 - AY_1 = AY_2 - CY_2$ и $AZ_1 - BZ_1 = BZ_2 - AZ_2$. Складывая полученные три равенства, получаем требуемое равенство периметров.

10 класс

10.1. Петя и Вася играют в игру на изначально пустой клетчатой таблице 100×100, делая ходы по очереди. Начинает Петя. За свой ход игрок вписывает в некоторую пустую клетку любую заглавную букву русского алфавита (в каждую клетку можно вписать ровно одну букву). Когда все клетки будут заполнены, Петя объявляется победителем, если найдутся четыре подряд идущие клетки по горизонтали, в которых слева направо написано слово «ПЕТЯ», или найдутся четыре подряд идущие клетки по вертикали, в которых сверху вниз написано слово «ПЕТЯ». Сможет ли Петя выиграть независимо от действий Васи?

Ответ. Не сможет.

Решение. Опишем выигрышную стратегию Васи. Пусть Вася все время пишет букву «Ю» в клетку согласно следующим ниже условиям; а если указанная клетка не существует или уже занята, а также если Петя ставит любую букву отличную от «П», «Е», «Т», «Я», то пусть Вася ставит «Ю» в любую свободную клетку.

Если Петя в некоторой клетке пишет букву «П», то Вася пишет «Ю» в клетке, соседней с ней справа; если Петя пишет букву «Е», то Вася пишет «Ю» в клетке, соседней с ней слева; если Петя пишет букву «Т», то Вася пишет «Ю» в клетке, соседней с ней снизу; если Петя пишет букву «Я», то Вася пишет «Ю» в клетке, соседней с ней сверху.

Из первых двух условий следует, что в двух соседних по горизонтали клетках не могло появиться «ПЕ», читаемое слева направо. В самом деле, предположим, что горизонтальное «ПЕ» появилось; тогда после появления первой из этих двух букв Вася, согласно описанной стратегии, сразу займёт место второй из этих букв — противоречие. Аналогично, в двух соседних по вертикали клетках не могло появиться «ТЯ», читаемое сверху вниз.

10.2. Внутри треугольника ABC отмечена точка P. На отрезке AB отмечена точка Q, а на отрезке AC — точка R так, что описанные окружности треугольников BPQ и CPR касаются прямой AP. Через точки B и C провели прямые, проходящие через центр описанной окружности треугольника BPC, а через точки

Q и R — прямые, проходящие через центр описанной окружности треугольника PQR. Докажите, что существует окружность, которая касается четырёх проведённых прямых.

Решение. Поскольку $AB \cdot AQ = AP^2 = AC \cdot AR$, четырёхугольник $BCRQ$ — вписанный. Пусть O — центр окружности $(BCRQ)$. Обозначим через O_1 и O_2 центры окружностей (BPC) и (QPR). Покажем, что прямые BO_1, CO_1, QO_2, RO_2 равноудалены от O. Так как $OB = OC = OQ = OR$, для этого достаточно установить равенство (направленных) углов $\angle OCO_1 = \angle O_1BO = \angle OQO_2 = \angle O_2RO$. Здесь первое и последнее равенства очевидны из симметрии относительно серединных перпендикуляров к BC и QR.

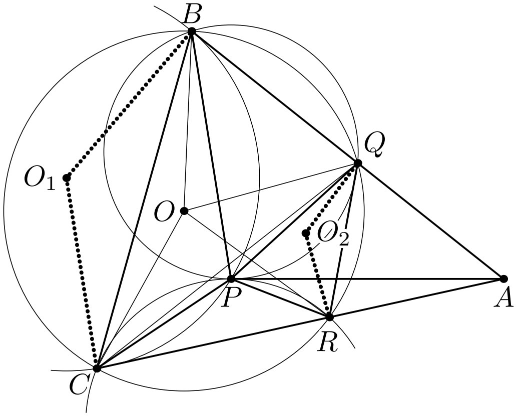


Рис. 7

Остаётся доказать равенство $\angle O_1BO = \angle OQO_2$ $(*)$. Из счёта углов получаем $\angle OQO_2 = \angle OQR - \angle O_2QR = (90^\circ - \angle RCQ) - (90^\circ - \angle RPQ) = \angle RPQ - \angle RCQ$. Аналогично $\angle O_1BO = \angle BPC - \angle BQC$. Значит, $(*)$ эквивалентно равенству $\angle RPQ - \angle RCQ = \angle BPC - \angle BQC$ или $\angle BQC - \angle RCQ = \angle BPC - \angle RPQ$ $(**)$. Из касания окружностей (BPQ) и (CPR) следует $\angle RPQ = \angle RCP + \angle PBQ$, что равно (из суммы углов четырёхугольника $BPCA$) $\angle BPC - \angle BAC$. Тем самым, $(**)$ преобразуется к виду $\angle BQC - \angle RCQ = \angle BAC$, что верно. Задача решена.

10.3. Найдите все натуральные n, для которых существует такое *чёт-*

ное натуральное a, что число $(a-1)(a^2-1)\dots(a^n-1)$ является точным квадратом.

Ответ. $n=1$ и $n=2$.

Решение. Для $n=1$ подойдёт любое чётное a вида m^2+1, например, $a=2$. Для $n=2$ подойдёт любое чётное a вида m^2-1, например, $a=8$.

Предположим, что для $n=3$ нашлось требуемое число a. Тогда число $(a-1)(a^2-1)(a^3-1)=(a-1)^3(a+1)(a^2+a+1)$ является точным квадратом. Поскольку $a^2+a+1=a(a+1)+1$, числа $a+1$ и a^2+a+1 взаимно просты. Раз число $a+1$ нечётно, числа $a+1$ и $a-1$ также взаимно просты. Следовательно, числа $a+1$ и $(a-1)(a^2+a+1)$ — точные квадраты. В частности, число $a+1$ при делении на 3 может давать лишь остаток 0 или 1, а тогда число $a-1$ не делится на 3. Отсюда

$$\text{НОД}(a-1,a^2+a+1)=\text{НОД}(a-1,(a+2)(a-1)+3)=$$
$$=\text{НОД}(a-1,3)=1,$$

значит, числа $a-1$ и a^2+a+1 также являются точными квадратами. Но второе являться квадратом не может, поскольку $a^2<a^2+a+1<(a+1)^2$. Противоречие.

Осталось доказать, что требуемого a не существует при $n\geqslant 4$. Предположим, что такое a нашлось. Возьмём такое натуральное $k\geqslant 2$, что $2^k\leqslant n<2^{k+1}$. Поскольку $a^{2^k}-1=(a^{2^{k-1}}-1)(a^{2^{k-1}}+1)$, число $(a-1)(a^2-1)\dots(a^n-1)$ представляется в виде произведения $a^{2^{k-1}}+1$ и нескольких множителей вида a^m-1, где $1\leqslant m\leqslant n$ и $m\neq 2^k$.

Докажем, что множитель $a^{2^{k-1}}+1$ взаимно прост со всеми остальными множителями в этом разложении. Пусть $a^{2^{k-1}}+1$ и a^m-1 имеют некоторый общий делитель d. Тогда и $\text{НОД}(a^{2^k}-1,a^m-1)$ кратен d. Но $\text{НОД}(a^{2^k}-1,a^m-1)=a^{\text{НОД}(2^k,m)}-1$. Поскольку $m\neq 2^k$ и $m\leqslant n<2^{k+1}$, число m не может делиться на 2^k. Таким образом, $\text{НОД}(2^k,m)$ — степень двойки, не превосходящая 2^{k-1}. Следовательно, $a^{2^{k-1}}-1$ делится на $\text{НОД}(a^{2^k}-1,a^m-1)$, а значит, делится и на d. Поскольку a

чётно, числа $a^{2^{k-1}} - 1$ и $a^{2^{k-1}} + 1$ не имеют общих делителей, отличных от 1, значит, $d = 1$, что и требовалось.

Множитель $a^{2^{k-1}} + 1$ взаимно прост со всеми остальными множителями в произведении, являющемся точным квадратом, поэтому он сам является точным квадратом. Тогда $a^{2^{k-1}} + 1$ и $a^{2^{k-1}}$ — отличающиеся на 1 квадраты натуральных чисел, что невозможно. Значит, наше предположение неверно, и для $n \geqslant 4$ требуемых чисел a не найдётся.

10.4. На плоскости отмечены 10^6 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и проведены все отрезки между ними. Гриша поставил на каждом проведённом отрезке вещественное число, по модулю не превосходящее 1, и для каждой шестёрки отмеченных точек посчитал сумму чисел на всех 15 отрезках, соединяющих их. Оказалось, что каждая такая сумма по модулю не меньше числа C, при этом среди таких сумм есть как положительная, так и отрицательная. При каком наибольшем C это возможно?

Ответ. $\frac{15}{4}$.

Решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются отмеченные точки, а рёбрами — проведённые отрезки.

Оценка. Докажем оценку $C \leqslant \frac{15}{4}$. Условие гласит, что в нашем полном графе есть как шестёрки вершин, сумма на рёбрах между которыми положительна, так и шестёрки, сумма на рёбрах между которыми отрицательна. Тогда найдутся две шестёрки, отличающиеся заменой только одной вершины, такие, что у одной из них сумма положительна, у другой отрицательна. В самом деле, возьмём шестёрку с положительной суммой, и будем превращать её в шестёрку с отрицательной, меняя вершины по одной – на каком то шаге произошло изменение знака, шестёрки, которые были до и после этого шага – искомая пара.

Далее работаем с полным подграфом на множестве S из семи вершин — объединении вышеописанной пары шестёрок. Рассмотрим все семь шестёрок, которые можно получить выбрасыванием одной вершины из S. Пусть среди них k с отрицательными суммами — получающиеся выбрасыванием вершин $A_1, \ldots, A_k$ (будем называть эти вершины A-*вершинами*, а соответствующие шестёрки — A-*шестёрками*), и $7-k$ с положительными суммами — получающиеся выбрасыванием вершин $B_1, \ldots, B_{7-k}$ (будем называть эти вершины B-*вершинами*, а соответствующие шестёрки — B-*шестёрками*). Рёбра между двумя A-вершинами будем называть AA-*рёбрами*, между двумя B-вершинами — BB-*рёбрами*, а рёбра, соединяющие A-вершину с B-вершиной — AB-*рёбрами*.

Из *старой* расстановки чисел на рёбрах, соединяющих вершины множества S, получим *новую* расстановку, заменив все числа на AA-рёбрах на число x, равное их среднему арифметическому, и аналогично заменив все числа на AB-рёбрах на их среднее арифметическое y, а все числа на BB-рёбрах на их среднее арифметическое z. Очевидно, $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$, так как все старые числа по модулю не превосходят 1.

Лемма. Подграф S с новыми числами на рёбрах удовлетворяет условию с той же константой C.

Доказательство леммы. Заметим, что для каждого AA-ребра есть одно и то же количество A-шестёрок, в которые входят оба его конца. И наоборот, для любой A-шестёрки среди 15 рёбер между её вершинами есть одно и то же количество AA-рёбер. То же верно для AB-рёбер и для BB-рёбер. Значит, сумма Σ_A чисел на рёбрах в A-шестёрке в новой расстановке есть среднее сумм по всем A-шестёркам в старой расстановке, то есть среднее нескольких чисел, не больших $-C$; значит, $\Sigma_A \leqslant -C$. Аналогичное утверждение верно для сумм в B-шестёрках. Лемма доказана. □

Далее изучаем новую расстановку. Рассмотрим случаи.

Случай $k = 1$. Иными словами, есть ровно одна A-шестёрка, на которой пятнадцать BB-рёбер, и шесть B-шестёрок, на каждой из которых десять BB-рёбер и пять AB-рёбер. Имеем систему неравенств: $15z \leqslant -C$, $5y + 10z \geqslant C$. Умножим первое на -2, сложим со вторым, умноженным на 3, получим $15y \geqslant 5C$, откуда $C \leqslant 3$.

Случай $k = 2$. Теперь у нас две A-вершины и пять B-вершин, то есть на A-шестёрке есть десять BB-рёбер и пять AB-рёбер, а на B-шестёрке – шесть BB-рёбер, восемь AB-рёбер и одно AA-ребро. Имеем $5y + 10z \leqslant -C$, $x + 8y + 6z \geqslant C$. Исключая z, получаем $8C \leqslant 5x + 25y \leqslant 30$, значит, $C \leqslant \frac{15}{4}$.

Случай $k = 3$. Аналогично предыдущему, имеем $x + 8y + 6z \leqslant -C$, $3x + 9y + 3z \geqslant C$. Избавляясь на этот раз от y, получаем $17C \leqslant 15x - 30z \leqslant 45$, откуда $C \leqslant \frac{45}{17} < \frac{15}{4}$.

Случаи $k \geqslant 4$ сводятся к рассмотренным умножением всех чисел на -1, что ведёт к замене $k \mapsto 7 - k$. Итак, оценка $C \leqslant \frac{15}{4}$ доказана.

Пример. Любое число вершин от двух до 999995 объявим вершинами типа A, остальные — вершинами типа B. На всех рёбрах между двумя вершинами типа B напишем число $-\frac{7}{8}$, на всех остальных — число 1. Тогда, если в шестёрке вершин хотя бы пять B-вершин, то сумма в ней не больше $-\frac{15}{4}$, а иначе — не меньше $\frac{15}{4}$.

10.5. Дано натуральное число n. Натуральные числа $1, 2, \ldots, n$ выписывают на доске в строчку в некотором порядке. У каждых двух стоящих рядом чисел вычисляют их НОД (наибольший общий делитель) и записывают этот НОД на листке. Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди всех $n - 1$ выписанных на листке чисел?

Ответ. $\lfloor n/2 \rfloor$.

Решение. *Оценка.* Предположим, что какое-то из выписанных на листке чисел больше $\lfloor n/2 \rfloor$, скажем, НОД$(a, b) = d > \lfloor n/2 \rfloor$. Тогда наибольшее из чисел a, b не меньше $2d$, что больше n — противоречие. Значит, каждый из написанных НОДов не превосходит $\lfloor n/2 \rfloor$, потому количество различных НОДов не может превышать $\lfloor n/2 \rfloor$.

Пример. Разобьём все числа от 1 до n на цепочки вида $a, 2a, 4a, 8a, \ldots, 2^k a$, где a — нечётное число, не превосходящее n. Выпишем в строчку цепочки одну за другой. Тогда для любого натурального $d \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ найдётся цепочка, в которой встречается d, а следующее за d число будет $2d$. Видим, что каждое натуральное $d \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ будет выписано на листке.

10.6. При каком наименьшем k для любого многочлена $f(x)$ степени 100 с вещественными коэффициентами найдётся такой многочлен $g(x)$ степени не выше k с вещественными коэффициентами, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют ровно 100 общих точек?

Ответ. 98.

Решение. Положим $n = 100$.

1. Покажем, как подобрать нужный многочлен g степени не выше $n-2$ для данного многочлена f степени n. При домножении f на ненулевую константу условие не поменяется (g можно домножить на ту же константу), поэтому считаем, что старший коэффициент f равен 1, так что $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. Возьмём произвольный набор n различных чисел $x_1, \ldots, x_n$, дающих в сумме $-a_1$, и положим $h(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_n)$, $g(x) = f(x) - h(x)$, так что $h = f - g$. Видим, что у f и h совпадают коэффициенты при x^n и при x^{n-1}, поэтому степень g не превышает $n - 2$. С другой стороны, абсциссы точек пересечения графиков f и g — это в точности корни многочлена h, а их ровно n.

2. Покажем, что $k \leqslant n-3$ не работает. Пусть дан многочлен $f(x) = x^n$, а $g(x)$ — многочлен степени не выше $n - 3$. Предположим, что графики f и g пересекаются в n точках, имеющих абсциссы $x_1, \ldots, x_n$. Но тогда многочлен $f - g$ степени n имеет n вещественных корней $x_1, \ldots, x_n$. С другой стороны, у $f - g$ коэффициенты при x^{n-1} и x^{n-2} равны 0. Но тогда по теореме Виета сумма $s_1 = x_1 + \ldots + x_n$ и сумма попарных произведений $s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$ равны 0. Отсюда $x_1^2+\ldots+x_n^2 = s_1^2-2s_2 = 0$, следовательно $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, что противоречит тому, что x_i различны.

10.7. В программу соревнования входит 25 видов спорта, в каждом из которых определяется один победитель, получающий золотую медаль. В соревновании участвуют 25 спортсменов, каждый — во всех 25 видах спорта. Имеется 25 экспертов, каждый из которых должен сделать *прогноз*, сколько золотых медалей получит каждый спортсмен, при этом в его прогнозе количества медалей должны являться целыми неотрицательными числами с суммой 25. Эксперта признают *компетентным*, если он верно угадает количество золотых медалей хотя бы у одного спортсмена. При каком наибольшем k эксперты могут сделать такие прогнозы, что хотя бы k из них будут признаны компетентными независимо от исхода соревнования?

Ответ. 24.

Решение. *Оценка.* Покажем, что $k \leqslant 24$, т. е. что любой эксперт может оказаться некомпетентным. Если этот эксперт считает, что все спортсмены возьмут по одной медали, опровергнем его результатом $(25, 0, 0, \ldots, 0)$. Иначе эксперт считает, что несколько (хотя бы один) спортсменов получат 0 медалей. Тогда распределим все медали между этими спортсменами так, чтобы каждый из них получил хотя бы одну медаль. В таком случае эксперт не угадает ни одного количества медалей.

Пример. Пусть прогноз одного эксперта — $(1, 1, 1, \ldots, 1)$, а прогнозы остальных — $(1, 0, \ldots, 0, 24)$, $(0, 1, \ldots, 0, 24)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 1, 24)$ (на последнем месте 24, и ещё одна единица).

Если некомпетентным оказался первый эксперт, то в исходе точно есть хотя бы три нуля, иначе хотя бы в 23 позициях количество медалей не меньше 2, и тогда общее количество медалей не меньше $23 \cdot 2 > 25$ — противоречие. Но тогда каждый из остальных экспертов компетентный.

Предположим теперь, что двое экспертов, отличных от первого, оказались некомпетентными. Тогда в двух позициях их прогнозы — 0 и 1 медалей, а значит, в реальном исходе в этих позициях не менее 2 медалей. Кроме того, ещё в 22 позициях прогнозы обоих экспертов — нули, значит, в реальном исходе в этих позициях не менее 1 медали. Тогда общее количество медалей не меньше $2 \cdot 2 + 22 \cdot 1 > 25$ — противоречие.

10.8. На периметре треугольника ABC выбраны точки D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2 так, что при обходе периметра точки встречаются в порядке A, F_1, F_2, B, D_1, D_2, C, E_1, E_2. Оказалось, что $AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2$. Докажите, что периметры треугольников, образованных тройками прямых AD_1, BE_1, CF_1 и AD_2, BE_2, CF_2, равны.

Решение. Начнём со следующей полезной леммы.

Лемма. *Пусть точки F и E выбраны соответственно на сторонах AB и AC параллелограмма $ABKC$ так, что $BE = CF$. Тогда точка K равноудалена от прямых BE и CF (см. рис. 8).*

Доказательство. Поскольку $BK \parallel EC$ и $CK \parallel FB$, имеем $S_{KBE} = S_{KBC} = S_{KFC}$. Так как $BE = CF$, отсюда и следует, что расстояния от точки K до прямых BE и CF равны. □

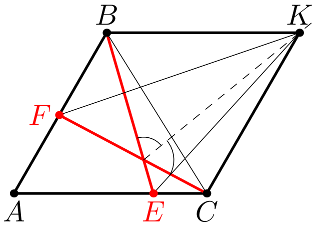


Рис. 8

Перейдём к решению. Пусть прямые из условия образуют треугольники $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$ (точки обозначены как на рис. 9).

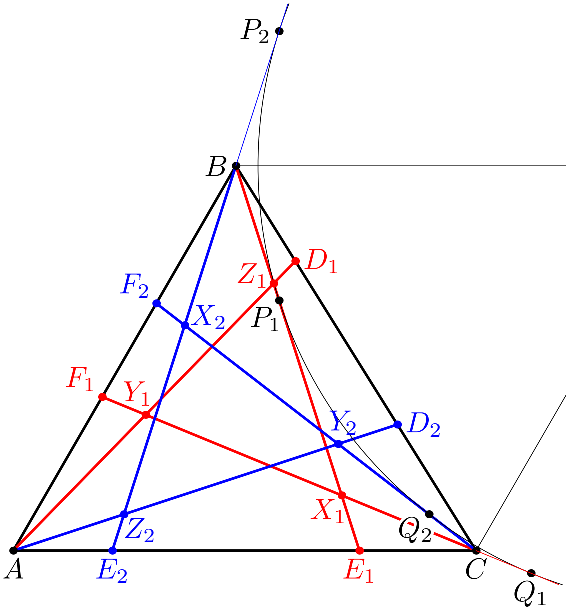


Рис. 9

Выберем точку K так, что $ABKC$ — параллелограмм; согласно лемме, точка K равноудалена от прямых BE_1, CF_1, BE_2 и CF_2; значит, существует окружность с центром K, касающаяся этих прямых в некоторых точках P_1, Q_1, P_2 и Q_2 соответственно. Тогда из равенств отрезков касательных вытекает, что

$$BX_1 - CX_1 = BP_1 + X_1P_1 - X_1Q_1 + CQ_1 = BP_2 + CQ_2 = \\ = BP_2 - X_2P_2 + X_2Q_2 + CQ_2 = CX_2 - BX_2.$$

Аналогично получаем, что $CY_1 - AY_1 = AY_2 - CY_2$ и $AZ_1 -$

$- BZ_1 = BZ_2 - AZ_2$. Складывая полученные три равенства, получаем требуемое равенство периметров.

11 класс

11.1. На доску выписали 777 попарно различных *комплексных* чисел. Оказалось, что можно ровно 760 способами выбрать два числа a и b, записанных на доске, так, чтобы выполнялось равенство

$$a^2 + b^2 + 1 = 2ab.$$

Способы, которые отличаются перестановкой чисел, считаются одинаковыми. Докажите, что можно выбрать такие два числа c и d, записанных на доске, что

$$c^2 + d^2 + 2025 = 2cd.$$

Решение. Заметим, что условие $a^2 + b^2 + 1 = 2ab$ равносильно тому, что $(a-b)^2 = -1$ или же $a - b = \pm i$. Рассмотрим граф, вершины которого — записанные на доску числа, а ребро проводится между двумя числами, которые отличаются на i. Согласно условию задачи, в таком графе ровно 760 рёбер. Каждая компонента связности этого графа представляет собой путь и состоит из вершин-чисел вида z, $z+i$, $z+2i$, $\ldots$, $z+(n-1)i$. Предположим, что в этом графе k компонент связности. Тогда в нём $777-k$ рёбер, поэтому $k = 17$. Поскольку $17\cdot 45 = 765 < 777$, то в какой-то компоненте связности хотя бы 46 вершин, поэтому какие-то две из этих вершин — это числа c и $d = c + 45i$. Тогда $(c-d)^2 = 45^2 \cdot i^2 = -2025$, следовательно, $c^2 + d^2 + 2025 = 2cd$, что и требовалось.

11.2. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. Известно, что треугольники A_1BC, AB_1C, ABC_1 и ABC — остроугольные. Докажите, что точки пересечения высот этих треугольников вместе с точкой пересечения медиан треугольника ABC лежат на одной сфере.

Решение. Обозначим через M и H точки пересечения медиан и высот треугольника ABC, а также отметим точку T так, что $3\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$. Пусть сфера ω построена на отрезке HT как на диаметре. Поскольку прямая MT перпендикулярна плоскости ABC, то точка M лежит на ω. Покажем, что на сфере ω лежит точка пересечения высот H_1 треугольника A_1BC, рассуждение для двух других треугольников аналогично.

Обозначим через N середину отрезка BC. Поскольку $NA =$

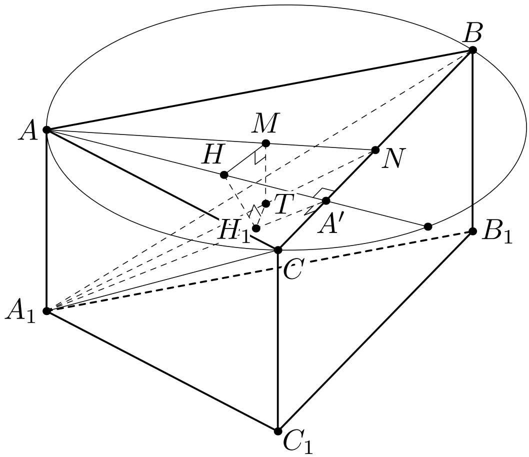


Рис. 10

$= 3NM$, точка T лежит на отрезке A_1N, в частности, она лежит в плоскости A_1BC. Пусть AA' — высота треугольника ABC. Поскольку прямая AA_1 перпендикулярна плоскости ABC, то $\angle A_1AA' = 90°$, а также $A'A_1 \perp BC$ по теореме о трёх перпендикулярах, то есть точка H_1 лежит на отрезке A_1A'. Поскольку точка, симметричная точке пересечения высот H треугольника ABC относительно прямой BC, лежит на его описанной окружности, то $A'H \cdot A'A = A'B \cdot A'C$. Применяя то же рассуждение для треугольника A_1BC, мы получаем, что $A'H_1 \cdot A'A_1 = A'B \cdot A'C = A'H \cdot A'A$. Следовательно, четырёхугольник AHH_1A_1 вписанный, поэтому $\angle HH_1A_1 = 180° - \angle A_1AH = 90°$. Поскольку ещё $HA' \perp BC$ и $H_1A' \perp BC$, вновь применяя теорему о трёх перпендикулярах, мы получаем, что прямая HH_1 перпендикулярна плоскости A_1BC. Значит, $\angle HH_1T = 90°$, то есть точка H_1 лежит на сфере ω, что и требовалось.

Замечание. Точка T — общая точка пересечения медиан треугольников A_1BC, AB_1C, ABC_1.

11.3. Пару многочленов $F(x, y)$ и $G(x, y)$ с целыми коэффициентами назовём *важной*, если из делимости на 100 обеих разностей $F(a, b) - F(c, d)$ и $G(a, b) - G(c, d)$, где a, b, c, d — целые, следует, что числа $a - c$ и $b - d$ делятся на 100. Существует ли такая важная пара многочленов $P(x, y)$, $Q(x, y)$, что пара многочленов $P(x, y) - xy$ и $Q(x, y) + xy$ также является важной?

Ответ. Не существует.

Решение. Пусть пара многочленов F и G — важная. Рассмотрим пары остатков от деления на 100 чисел $F(a,b)$ и $G(a,b)$, где a, b — всевозможные пары целых чисел от 0 до 99. Согласно условию задачи, все такие пары остатков разные. Поскольку всего пар чисел 100^2, то каждая пара остатков от деления на 100 достигается ровно один раз. Значит, достигаются все 4 возможные пары чётностей чисел $F(a,b), G(a,b)$. Поскольку чётность значения многочлена с целыми коэффициентами в точке (a,b) зависит только от чётности чисел a и b, мы получаем, что пары значений $(F(0,0); G(0,0))$, $(F(1,0); G(1,0))$, $(F(0,1); G(0,1))$, $F(1,1); G(1,1))$ дают все четыре возможные пары чётностей. Однако заметим, что для пар многочленов $F = P$, $G = Q$ и $F(x,y) = P(x,y) - xy$, $G(x,y) = Q(x,y) + xy$ первые три пары чётностей одинаковые, а последняя пара — разная. Следовательно, обе такие пары многочленов важными быть не могут.

11.4. Дано натуральное число N. Куб со стороной $2N+1$ сложен из $(2N+1)^3$ единичных кубиков, каждый из которых — либо чёрный, либо белый. Оказалось, что среди любых 8 кубиков, имеющих общую вершину и образующих куб $2\times2\times2$, не более 4 чёрных кубиков. Какое наибольшее количество чёрных кубиков могло быть использовано?

Ответ. $(N+1)^2(4N+1)$.

Решение. Положим $k = (N+1)^2(4N+1)$. Введём систему координат так, что все вершины единичных кубиков будут иметь целые координаты от 0 до $2N+1$.

Начнём с примера, показывающего, что количество чёрных кубиков действительно может быть равно k. У каждого кубика рассмотрим его вершину, ближайшую к началу координат (её координаты принимают значения от 0 до $2N$). Пусть кубик чёрный, если хотя бы две координаты этой вершины чётны, и белый иначе. Ясно, что тогда в любом кубе $2 \times 2 \times 2$ будет ровно 4 чёрных и 4 белых кубика. При этом количество чёрных кубиков, у которых все три соответствующих координаты чётны, равно $(N+1)^3$, а количество кубиков, у которых чётны ровно две координаты, равно $3(N+1)^2N$, поэтому общее количество чёрных кубиков будет равно k.

Осталось доказать, что этот пример оптимальный. Пусть куб сложен из чёрных и белых кубиков так, что выполнены условия задачи. Назовём кубик *тёмным* или *светлым*, если он является соответственно чёрным или белым в приведённом выше примере.

Для каждой точки с координатами (a, b, c) в большом кубе назовём её x-, y- и z-рангом числа $r_x = \min(a, 2N+1-a)$, $r_y = \min(b, 2N+1-b)$ и $r_z = \min(c, 2N+1-c)$ соответственно. Назовём *рангом* этой точки число $r = \min(r_x, r_y, r_z)$. Иначе говоря, x-, y- или z-ранг точки — это расстояние от неё до ближайшей грани большого куба, перпендикулярной соответствующей оси, а её ранг — это просто расстояние от неё до ближайшей грани большого куба.

Отметим все вершины единичных кубиков с нечётными рангами. Для каждой отмеченной вершины рассмотрим разность количеств чёрных и белых кубиков, сходящихся в этой вершине; поскольку все эти вершины являются центрами кубов $2 \times 2 \times 2$, эта разность неположительна. Значит, и сумма Σ всех таких разностей неположительна.

Скажем, что *кратность* единичного кубика — это количество его отмеченных вершин (столько раз этот кубик учтён в Σ). Тогда Σ равна разности суммы всех кратностей чёрных кубиков и суммы кратностей всех белых кубиков. Поэтому нам достаточно доказать, что если такая разность неположительна, то количество чёрных кубиков ℓ не превосходит k.

Пусть r_x, r_y и r_z — это x-, y- и z-ранги центра некоторого кубика; пусть для определённости $r_x \leqslant r_y \leqslant r_z$. Тогда нетрудно видеть, что

• если $r_x < r_y$, то кратность этого кубика равна 4;

• если $r_x = r_y = 1/2 + d$, где d чётно, то кратность кубика меньше 4, и он тёмный;

• если $r_x = r_y = 1/2 + d$, где d нечётно, то кратность кубика больше 4, и он светлый.

Итак, кратности всех тёмных кубиков не больше 4, а всех светлых — не меньше 4.

Пусть теперь $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_{(2N+1)^3}$ — кратности всех кубиков, расположенные в неубывающем порядке. Из сказанного выше вытекает, что $s_1+s_2+\ldots+s_k-s_{k+1}-\ldots-s_{(2N+1)^3}=0$, поскольку в приведённом выше примере значение Σ было равно 0.

Если теперь в рассматриваемой раскраске $\ell>k$ чёрных кубиков, то

$$0\geqslant\Sigma\geqslant s_1+s_2+\ldots+s_\ell-s_{l+1}-s_{\ell+2}-\ldots-s_{(2N+1)^3}>$$
$$>s_1+s_2+\ldots+s_k-s_{k+1}-\ldots-s_{(2N+1)^3}=0,$$

поскольку $s_{k+1}\geqslant 4$. Это противоречие показывает, что $\ell\leqslant k$, что и требовалось доказать.

Замечание. Оценку можно доказать и по-другому — например, так.

Рассмотрим четыре вершины большого куба A, B, C, D, образующие правильный тетраэдр. Отметим вершину единичного кубика, если у вектора, соединяющего её с ближайшей к ней вершиной из A, B, C и D, все координаты нечётны. Пусть p — количество отмеченных вершин, а q — количество единичных кубиков, не имеющих отмеченной вершины. Тогда количество чёрных кубиков не превосходит $4p+q$.

Осталось выяснить, что $4p+q=k$. Это можно сделать непосредственно; но вместо этого можно воспользоваться той же схемой, что и в решении выше. Именно, нетрудно заметить, что если у единичного кубика есть две отмеченных вершины, то он светлый, а если нет отмеченных вершин, то он тёмный. Тогда рассуждение выше сработает с несложными изменениями.

11.5. Дано натуральное число n. Натуральные числа $1,2,\ldots,n$ выписывают на доске в строчку в некотором порядке. У каждых двух стоящих рядом чисел вычисляют их НОД (наибольший общий делитель) и записывают этот НОД на листке. Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди всех $n-1$ выписанных на листке чисел?

Ответ. $\lfloor n/2\rfloor$.

Решение. *Оценка.* Предположим, что какое-то из выписанных на листке чисел больше $\lfloor n/2\rfloor$, скажем, НОД$(a,b)=d>$ $>\lfloor n/2\rfloor$. Тогда наибольшее из чисел a,b не меньше $2d$, что больше n — противоречие. Значит, каждый из написанных НОДов не превосходит $\lfloor n/2 \rfloor$, потому количество различных НОДов не может превышать $\lfloor n/2 \rfloor$.

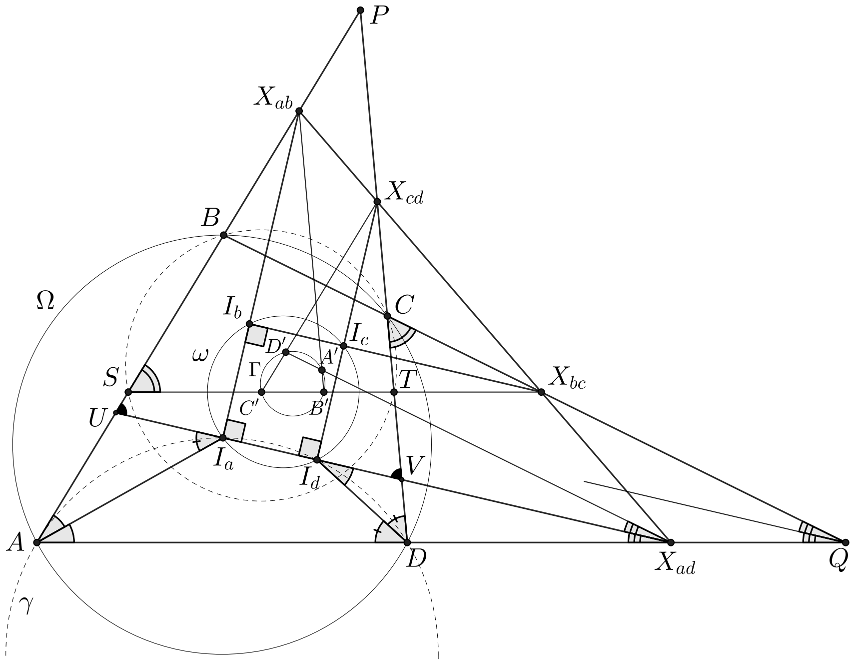
Пример. Разобьём все числа от 1 до n на цепочки вида $a, 2a, 4a, 8a, \ldots, 2^k a$, где a — нечётное число, не превосходящее n. Выпишем в строчку цепочки одну за другой. Тогда для любого натурального $d \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ найдётся цепочка, в которой встречается d, а следующее за d число будет $2d$. Видим, что каждое натуральное $d \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ будет выписано на листке.

11.6. По кругу выписаны 100 единиц. Петя и Вася играют в игру, каждый делает по 10^{10} ходов. Петя каждым своим ходом выбирает 9 стоящих подряд чисел и уменьшает каждое из них на 2. Вася каждым своим ходом выбирает 10 стоящих подряд чисел и увеличивает каждое из них на 1. Ребята ходят по очереди, начинает Петя. Докажите, что Вася сможет действовать так, чтобы после каждого его хода среди 100 выписанных чисел было не менее пяти положительных, как бы ни играл Петя.

Решение. Обозначим записанные по кругу числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{100}. Вася будет следить лишь за десятью числами, которые он разобьёт на пары: (a_9, a_{18}), (a_{27}, a_{36}), $\ldots$, (a_{90}, a_{99}). За один ход Петя может уменьшить не более чем одно из этих 10 чисел. Если Петя уменьшил одно из чисел пары (a_i, a_{i+9}), Вася в ответ добавит 1 к числам a_i, a_{i+1}, $\ldots$, a_{i+9}. Если же Петя не уменьшил ни одно из этих 10 чисел, Вася сделает любой разрешённый ход. Таким образом, после пары ходов Пети и Васи сумма чисел в каждой из пяти Васиных пар не уменьшится. Поскольку изначально пять сумм в парах положительны, то после каждого Васиного хода сумма в каждой из этих пяти пар будет положительной, поэтому в каждой из пар будет хотя бы одно положительное число. Таким образом, после любого Васиного хода будет хотя бы 5 положительных чисел, что и требовалось.

11.7. Четырёхугольник $ABCD$, в котором нет параллельных сторон, вписан в окружность Ω. В треугольники DAB, ABC, BCD, CDA вписаны окружности $\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d$ соответственно. Проведены общие внешние касательные к окружностям ω_a и ω_b, ω_b и ω_c, ω_c и ω_d, ω_d и ω_a, не содержащие сторон четырёхугольника $ABCD$. Четырёхугольник, последовательные стороны которого лежат на четырёх проведённых прямых (именно в таком порядке), вписан в окружность Γ. Докажите, что прямые, соединяющие центры окружностей ω_a и ω_c, ω_b и ω_d, Ω и Γ, пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть, не умаляя общности, лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи AD и BC — в точке Q. Обозначим центр окружности ω_a через I_a, точки I_b, I_c, I_d определим аналогично. Обозначим четырёхугольник, образованный четырьмя касательными через $A'B'C'D'$ (прямая $A'B'$ — общая внешняя касательная к ω_a и ω_b, аналогично с тремя другими сторонами).



В силу леммы о трезубце для треугольников ABD и ACD, точки A, D, I_a, I_d лежат на одной окружности (с центром в середине дуги AD окружности Ω). Пусть прямая I_aI_d пересекает стороны AB и CD в точках U и V, а также пересекает прямую AD в точке X_{ad}. Обозначим в четырёхугольнике $ABCD$: $\angle A = \alpha$, $\angle D = \delta$. Тогда в силу вписанности четырёхугольников $ABCD$ и AI_aI_dD, выполняются равенства углов: $\angle QCD = \alpha$, $\angle UI_aA = \angle ADI_d = \delta/2$, $\angle VI_dD = \angle DAI_a = \alpha/2$. Следовательно, $\angle CQD = \delta - \alpha$ и $\angle PUV = \angle PVU = (\alpha + \delta)/2$. В частности, $\alpha < \delta$, поэтому точка X_{ad} лежит на луче AD и $\angle DX_{ad}I_d = \angle ADV - \angle PVU = (\delta - \alpha)/2$. Последнее равенство означает, что прямая I_aI_d параллельна биссектрисе угла CQD. Поскольку прямая $A'D'$ симметрична прямой AD относительно линии центров I_aI_d, мы получаем, что $A'D' \parallel BC$, а также прямая $A'D'$ проходит через точку X_{ad}. Определим аналогично точки X_{ab}, X_{bc}, X_{cd} и получим, что эти точки лежат на прямых $A'B', B'C', C'D'$, которые параллельны сторонам четырёхугольника $ABCD$.

Как мы поняли выше, прямая I_aI_d параллельна биссектрисе угла CQD. Рассуждая аналогично, мы получаем, что этой биссектрисе параллельна прямая I_bI_c, а прямые I_aI_b и I_cI_d параллельны биссектрисе угла BPC. Поскольку $\angle PUV = \angle PVU$, то биссектриса угла BPC перпендикулярна прямой I_aI_d. Таким образом, соседние стороны четырёхугольника $I_aI_bI_cI_d$ перпендикулярны, то есть это прямоугольник. Значит, он вписан в окружность, обозначим её через ω, центр которой — точка пересечения диагоналей. Таким образом, достаточно доказать, что центры окружностей ω, Ω и Γ лежат на одной прямой. Мы докажем, что у этих трёх окружностей общая радикальная ось, причём на ней лежат точки $X_{ab}, X_{bc}, X_{cd}, X_{da}$ $(\star)$.

Обозначим через γ описанную окружность четырёхугольника AI_aI_dD. Тогда точка X_{ad} — радикальный центр окружностей γ, ω и Ω, поскольку она лежит на двух их радикальных осях. Значит, радикальная ось окружностей ω и Ω проходит через точку X_{ad}, аналогично, на ней лежат и точки X_{ab}, X_{bc}, X_{cd}. В частности, эти 4 точки лежат на одной прямой.

Пусть прямая $B'C'$ пересекает сторону AB в точке S и сторону CD в точке T. Поскольку $B'C' \parallel AD$, то $\angle BST = \angle BAD = 180^\circ - \angle BCT$, поэтому четырёхугольник $BCTS$ — вписанный. Поскольку $C'D' \parallel AB$ и $A'B' \parallel CD$, то по теореме Фалеса

$$\frac{X_{bc}B'}{X_{bc}T} = \frac{X_{bc}X_{ab}}{X_{bc}X_{cd}} = \frac{X_{bc}S}{X_{bc}C'}.$$

Из этого равенства отношений и вписанности $BCTS$ мы получаем, что $X_{bc}B' \cdot X_{bc}C' = X_{bc}S \cdot X_{bc}T = X_{bc}B \cdot X_{bc}C$, то есть степень точки X_{bc} относительно окружностей Ω и Γ одинакова.

Рассуждение для точек X_{ab}, X_{ad}, X_{cd} аналогично. Итого доказано утверждение ($\star$), что и требовалось.

11.8. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. *Хордой* будем называть отрезок целой длины, параллельный оси абсцисс, концы которого лежат на графике функции f. Известно, что у графика функции f ровно N хорд, причём среди них есть хорда длины 2025. Найдите наименьшее возможное значение N.

Ответ. 4049.

Решение. Для натурального n положим $g_n(x) = f(x+n) - f(x)$. Тогда число хорд длины n равно количеству нулей функции $g_n(x)$.

В качестве *примера* выберем следующую кусочно-линейную функцию f: $f(x) = x$ при $x \leqslant 2024\frac{9}{10}$ и $f(x) = 20249 \cdot |2025 - x|$ при $x \geqslant 2024\frac{9}{10}$. Заметим, что при $a \notin \left[0; 2025\frac{1}{10}\right]$ функция $f(x)$ принимает значение $f(a)$ только в точке a. Следовательно, если $g_n(x) = 0$, то обе точки x и $x+n$ лежат в отрезке $\left[0, 2025\frac{1}{10}\right]$. В частности, $n \leqslant 2025$, и нули функции $g_n(x)$ лежат в промежутке $\left[0; 2025\frac{1}{10} - n\right]$. Для $n = 2025$ при $x \in \left[0, \frac{1}{10}\right]$ имеем, что $g_{2025}(x) = 20248x$. Значит, $g_{2025}(x)$ имеет единственный нуль $x = 0$, то есть хорда длины 2025 у функции f единственна. При натуральном $n \leqslant 2024$ функция $g_n(x)$ монотонно убывает при $x \in [0, 2025 - n]$ и монотонно возрастает при $x \in \left[2025 - n, 2025\frac{1}{10} - n\right]$, при этом $g_n(0) > 0$, $g_n(2025 - n) < 0$ и $g_n\left(2025\frac{1}{10} - n\right) > 0$. Таким образом, у этой функции ровно два нуля, то есть функция f имеет по две хорды длины $n = 1$, 2, …, 2024. Итого у неё 4049 различных хорд.

Теперь перейдём к *оценке*. Без ограничения общности будем считать, что хорда длины 2025 соединяет точки $(0; 0)$ и $(0; 2025)$, т. е. $f(0) = f(2025) = 0$. Положим $g(x) = g_1(x) = f(x+1) - f(x)$. Из условия следует, что у функции g конечное число нулей, а также эта функция непрерывна. Пусть все её нули лежат в промежутке $[-M, M]$. Тогда функция g знакопостоянна на лучах $x > M$ и $x < -M$. При необходимости, заменив функцию f на $-f$, мы будем считать, что $g(x) > 0$ при $x > M$.

Предположим, что $g(x) < 0$ при $x < -M$. Заметим, что $g_n(x) = g(x) + g(x+1) + \ldots + g(x+n-1)$, поэтому $g_n(x) > 0$ при $x > M$ и $g_n(x) < 0$ при $x < -M-n$. Значит, функция $g_n(x)$ имеет нуль, то есть у функции f есть хорда любой натуральной длины, что противоречит условию задачи.

Таким образом, $g(x) > 0$ при $x < -M$. Значит, $g_n(x) > 0$ при $x > M$ и при $x < -M-n$. Далее мы докажем, что при натуральных k и m, в сумме дающих 2025, функция f имеет хотя бы 4 хорды длин k и m. Применяя это утверждение для каждой такой пары k, m, мы получим заявленную оценку. Иными словами, мы докажем, что у функций $g_k(x)$ и $g_m(x)$ при $k+m = 2025$ суммарно хотя бы 4 нуля. Предположим, что это не так. Тогда можно считать, что функция g_k имеет не более одного нуля. Значит, эта функция не может принимать отрицательных значений. Действительно, пусть $g_k(t) < 0$. Поскольку функция $g_k(x)$ непрерывна и неотрицательна при достаточно больших по модулю значениях x, то у неё есть нуль на луче $(-\infty, t)$ и на луче (t, ∞), то есть хотя бы два нуля, противоречие.

Итого $g_k(x) \geqslant 0$, причём равенство нулю достигается не более чем в одной точке. Покажем, что $g_m(t) > 0$ для некоторого $t \in (0, k)$. Рассмотрим наименьшее натуральное число N, для которого число Nk делится на 2025, и обозначим через $r_1, r_2, \ldots, r_{N-1}$ остатки чисел $k, 2k, \ldots, (N-1)k$ по модулю 2025. Если $g_k(0) > 0$, положим $r_0 = r_N = 0$, если же $g_k(0) = 0$, положим $r_0 = r_N = 2025$. Рассмотрим разности $d_j = f(r_{j+1}) - f(r_j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Заметим, что если $r_{j+1} > r_j$, то $r_{j+1} = r_j + k$ и $d_j = g_k(r_j) \geqslant 0$; если же $r_{j+1} < r_j$, то $r_j = r_{j+1} + (2025 - k) = r_{j+1} + m$ и $d_j = -g_m(r_{j+1})$. Если $r_0 = 0$, то $d_0 = g_k(0) > 0$. В случае $r_N = 2025$ мы получаем, что $d_{N-1} = g_k(2025-k) > 0$, поскольку $g_k(0) = 0$, а $2025 - k \neq 0$. Таким образом, $d_0 + d_1 + \ldots + d_{N-1} = 0$, и первое или последнее слагаемое в этой сумме положительно. Значит, найдётся отрицательное слагаемое $d_j < 0$, что возможно лишь в ситуации $r_j = r_{j+1} + m$ и $d_j = -g_m(r_{j+1})$. Тогда для $t = r_{j+1} \in [0, k]$ мы получаем, что $g_m(t) = -d_j > 0$.

Заметим, что $g_k(0) + g_m(k) = g_m(0) + g_k(m) = f(2025) - -f(0) = 0$. Поскольку функция g_k неотрицательна, то $g_m(0) \leqslant 0$

и $g_m(k) \leqslant 0$, в частности, $t \neq 0$ и $t \neq k$, поэтому $t \in (0, k)$. В случае, когда $g_k(0) > 0$ и $g_k(m) > 0$, мы получаем, что $g_m(0) < 0$, $g_m(t) > 0$, $g_m(k) < 0$, а также функция $g_m(x)$ положительна при достаточно больших по модулю x. Значит, функция g_m имеет по нулю на промежутках $(-\infty, 0)$, $(0, t)$, $(t, k), (k, \infty)$, то есть уже эта функция имеет хотя бы 4 нуля. Если $g_k(0) = 0$, то $g_k(m) > 0$, поскольку у функции g_k не более одного нуля. Тогда $g_m(k) = 0$, $g_m(t) > 0$, $g_m(0) < 0$. В этом случае у функции g_m есть по нулю на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, t)$, а также нуль k, то есть хотя бы 3 нуля, и ещё один нуль в точке 0 есть у функции g_k, что в сумме составляет хотя бы 4 нуля. Случай $g_k(m) = 0$ разбирается аналогично.