Подмосковная олимпиада школьников, 7 класс

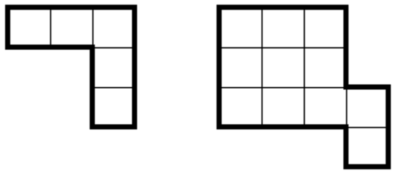
1. Дим Димыч написал в своей тетради некоторую положительную дробь, а затем увеличил ее числитель на 2024. Получившаяся дробь оказалась на 2 больше, чем исходная. Приведите пример дроби, которую Дим Димыч мог записать в своей тетради.

Ответ. Любая дробь вида $\frac{a}{1012}$, где $a \in \mathbb{N}$. **Решение.** Пусть Дим Димыч записал дробь $\frac{a}{b}$. Из условия имеем $\frac{a}{b} + 2 = \frac{a+2024}{b}$, после приведения имеем $a + 2b = a + 2024$, то есть $b = 1012$, a — любое натуральное.

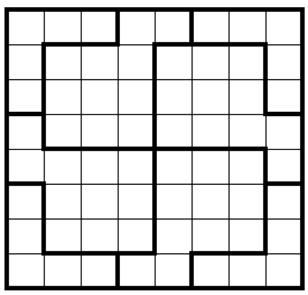
♦ Любой неверный пример — 0 баллов.

♦ Отсутствует доказательство корректности примера — баллы не снимать.

2. Квадрат какой наименьшей площади можно составить из нескольких фигур, показанных на рисунке ниже, так, чтобы фигурок каждого типа было поровну?



Ответ. 8×8. **Решение.** *Оценка.* Так как фигуры обоих типов должны присутствовать, значит, минимальная площадь полученного квадрата равна $11+5 = 16$. Простой перебор расположения двух фигур показывает, что, взяв по одной фигурке каждого типа, квадрат составить невозможно. Если взять по две фигурки каждого типа, то площадь получившегося квадрата должна быть равна $2 \cdot 11 + 2 \cdot 5 = 32$, а, если взять по три фигурки каждого типа, то площадь получившегося квадрата должна быть равна $3 \cdot 11 + 3 \cdot 5 = 48$. Как можно заметить, оба этих числа не могут быть площадью квадрата с целыми сторонами. Значит, минимальная площадь искомого квадрата не меньше, чем $4 \cdot 11 + 4 \cdot 5 = 64$. *Пример.* Как составить квадрат площади 64 показано на рисунке ниже.



♦ Оценка — 3 балла.

♦ Пример — 4 балла.

3. Квадрат $ABCD$ разделен отрезком EF на два прямоугольника $AEFD$ и $BCFE$. Длины сторон обоих прямоугольников выражаются натуральными числами. Известно, что площадь прямоугольника $AEFD$ равна 30, и она больше площади прямоугольника $BCFE$. Найдите площадь исходного квадрата $ABCD$.

Ответ. 36. **Решение.** Сторона квадрата $ABCD$ равна одной из сторон полученных прямоугольников. Значит, сторона квадрата также является натуральным числом, а его площадь является квадратом натурального числа. Обозначим площадь прямоугольника $BCFE$ за x. Тогда по условию $x < 30$, кроме того, получается, что площадь исходного квадрата равна $x+30$. Имеем $x+30 > 30$, так как x — натуральное число, $x+30 < 60$, так как $x < 30$ и $x+30$ — точный квадрат. Получаем два возможных варианта для значения $x+30$ — это 49 и 36. Заметим, что одна из сторон квадрата является так же стороной прямоугольника, то есть площадь обоих должна делиться на длину этой стороны, но числа 30 и 49 не имеют общих делителей, больших единицы. Число 36 подходит — прямоугольники $AEFD$, $BCFE$ и квадрат $ABCD$ будут иметь размеры 5×6, 1×6 и 6×6 соответственно.

⧫ Получены все оценки на число $x+30$, дальнейшего содержательного продвижения нет — 3 балла.

4. Полина разложила 50 различных карт поровну по пяти стопкам и загадала одну из них. Женя может задавать вопросы, ответы на которые только «да» или «нет». Сможет ли Женя за 6 вопросов узнать, какую именно карту загадала Полина? Полина знает расположение всех карт в стопках, а Женя — нет. Жене достаточно указать на загаданную Полиной карту, а не назвать ее в явном виде.

Ответ. Да, сможет. **Решение.** Покажем, как Жене добиться желаемого за 6 вопросов. Будем называть карту «подозрительной», если на текущий момент она может быть загадана (в начале у нас 50 подозрительных карт). Будем считать, что нет никаких стопок, и Женя хочет угадать одну из 50 карт — загаданную Полиной. Каждым вопросом будем спрашивать, находится ли загаданная карта в первой «половине» (если количество подозрительных карт нечетно, то поделим их на две группы, отличающиеся на 1) из оставшихся подозрительных. При ответе «да» подозрительными останутся карты из этой «половины», при ответе «нет» — карты из другой «половины». Таким образом, последовательность количеств подозрительных карт будет выглядеть следующим образом: $50 \to 25 \to 13(12) \to 7(6) \to 4(3) \to 2(1) \to 1$. Заметим, что количество стрелочек равно количеству заданных вопросов, а их ровно 6. То есть 6 вопросов Жене действительно хватит.

⧫ Приведен верный алгоритм без доказательства его работы — 5 баллов.

⧫ Любой неверный алгоритм — 0 баллов.

5. В четырехугольнике $ABCD$ стороны BC, CD и диагональ AC равны. Найдите угол $\angle ADB$, если известно, что угол $\angle ABC = 70^\circ$.

Ответ. 20°. **Решение.** По условию $AC = CB$, значит, треугольник ABC равнобедренный, причем угол $\angle ABC = 70^\circ$. Получаем, что $\angle ABC = \angle BAC = 70^\circ$ и $\angle ACB = 40^\circ$. Обозначим угол $\angle CAD$ за α. По условию $AC = CD$, значит, треугольник ACD равнобедренный, то есть $\angle CAD = \angle CDA = \alpha$, а угол $\angle ACD = 180^\circ - 2\alpha$ по теореме о сумме углов треугольника. Получаем, что $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 40^\circ + (180^\circ - 2\alpha) = 220^\circ - 2\alpha$. Заметим, что по условию $BC = CD$, значит, треугольник BCD равнобедренный с углом $\angle BCD = 220^\circ - 2\alpha$ при вершине. Получаем, что $\angle DBC = \angle BDC = \frac{180^\circ-(220^\circ-2\alpha)}{2} = \alpha - 20^\circ$. Осталось заметить, что $\angle ADB = \angle ADC - \angle BDC = \alpha - (\alpha - 20^\circ) = 20^\circ$.

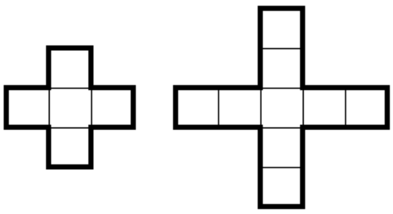
6. Оля выписала на доску 153 числа. Посмотрев на выписанные числа, Никита сказал: «Каждое из выписанных чисел имеет имеет общий делитель, больший 1, с одним, тремя, семью или тринадцатью из оставшихся». Докажите, что он ошибся.

Решение. Предположим, что Никита оказался прав. Построим граф, в котором вершинами будут выписанные Олей числа, а ребро между двумя вершинами будет проведено, если два соответствующих числа имеют общий делитель, больший 1. Посмотрим на получившийся граф. В нем нечетное количество вершин (153), и из каждой вершины выходит нечетное число ребер (1, 3, 7 или 13). Значит, суммарно из всех вершин выходит нечетное количество ребер, так как сумма нечетного количества нечетных чисел нечетна. С другой стороны, каждое ребро в эту сумму вносит 2, так как соединяет ровно две вершины. Значит, получившаяся сумма должна быть четной — противоречие. Получается, что Никита действительно ошибся.
Доказанное в решении задачи утверждение называется Леммой о рукопожатиях.

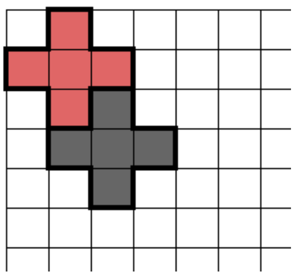
♦ Задача переведена в термины графов, дальнейшего содержательного продвижения нет — 2 балла.

♦ Использование леммы о рукопожатиях без доказательства — баллы не снимать.

7. Аня и Ваня играют в игру на доске 101×101. За один ход Аня ставит на доску девятиклеточный крест, а Ваня — пятиклеточный крест (см. рисунок) так, чтобы никакие две фигуры не накладывались, и никакая фигура не выходила за пределы доски. Первой ходит Аня. Тот, у кого нет хода, проигрывает. У кого из ребят есть выигрышная стратегия?



Ответ. У Вани. **Решение.** Первым своим ходом Ваня ставит свой крест в угол таблицы, как показано на рисунке черным цветом. Такой найдется, так как до этого Аня сделала только один ход и «испортила» не более одного угла таблицы. Теперь в этом углу можно поставить только крест Вани, как показано на рисунке красным цветом, назовем это место «запасным».



Итак, заметим, что Аня не может «испортить» «запасное» место, так как даже одной клеткой своего креста не может туда попасть. Далее Ваня ставит свои ходы как угодно, кроме «запасного» места. Если на очередном ходе Ваня не может поставить никакой крест, кроме «запасного», значит, у Ани ходов не осталось, так как крест Вани является частью креста Ани, и если он не может сходить, то Аня тем более. Тогда на этом ходу Ваня ставит крест в «запасное» место, после чего ходов у Ани не остается, и Ваня побеждает.

⧫ Верная стратегия без доказательства её корректности — 4 балла.

8. На доске написаны числа 7^2, 8^2, 9^2, $\dots$, 2023^2, 2024^2. Можно ли к одному из них прибавить 7, к одному из остальных прибавить 8, $\dots$, к последнему прибавить 2024 так, чтобы все числа оказались простыми?

Ответ. Нет. **Решение.** Заменим каждое из чисел, изначально выписанных на доске, на его остаток при делении на 3. Заметим, что если число делится на 3, то его квадрат тоже делится, то есть дает остаток 0, а если число не делится на 3, то его квадрат дает остаток 1 при делении на 3. Отсюда следует, что наша последовательность остатков будет выглядеть следующим образом: 1, 1, 0, 1, 1, 0, $\dots$, 1, 1, 0, 1, 1. Заметим, что в этой последовательности первые 2016 чисел бьются на тройки 1, 1, 0, а последние два числа — это 1. Значит, в нашей последовательности ровно $2016/3 \cdot 2 + 2 = 1346$ единиц, то есть в изначальном наборе 1346 чисел дают остаток 1 при делении на 3. Рассмотрим набор чисел, которые мы прибавляем (7, 8, 9, $\ldots$, 2024), и запишем их последовательность остатков при делении на 3. Она будет следующей: 1, 2, 0, 1, 2, 0, $\ldots$, 1, 2, 0, 1, 2. Заметим, что в этой последовательности первые 2016 чисел бьются на тройки 1, 2, 0, а последние два числа — это 1 и 2. Значит, в этой последовательности ровно $2016/3 \cdot 2 + 1 = 1345$ чисел, не равных 2. Тогда по принципу Дирихле к одному из чисел на доске, дающих остаток 1 при делении на 3, добавится число, дающее остаток 2 при делении на 3 (так как первых 1346, а не вторых 1345), в результате чего сумма этих чисел будет делиться на 3, и, как следствие, не будет простым числом.

⧫ Посчитано количество «1» в первой последовательности, дальнейшего содержательного продвижения нет — 3 балла.

⧫ Посчитано количество не «2» во второй последовательности, дальнейшего содержательного продвижения нет — 3 балла.