Подмосковная олимпиада школьников, 6 класс

1. Рита хочет заполнить таблицу 4×4 символами так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце каждый из них встретился по одному разу. Сколькими способами она может это сделать, если 4 символа должны быть расположены так, как на картинке?

✓			
×		●	
		▲	

Ответ: 2 способа. **Решение:** Заметим, что на пересечении первой строки и третьего столбца стоит крестик, на пересечении четвертой строки и третьего столбца — галочка, на пересечении третьей строки и первого столбца — кружочек, а на пересечении четвертой строки и первого столбца — треугольник. Получаем расстановку на рисунке справа. Далее расположение символов однозначно определяется, например, местом крестика во втором столбце: это либо третья строка, либо четвертая. Получаем 2 возможные расстановки, изображенные ниже.

✓		×	
×		●	
●		▲	
▲		✓	

✓	●	×	▲
×	▲	●	✓
●	✓	▲	×
▲	×	✓	●

✓	▲	×	●
×	✓	●	▲
●	×	▲	✓
▲	●	✓	×

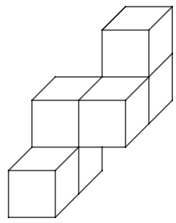
2. У Бабы Кати на грядке растут помидоры. Каждый день она или срывает с куста 5 помидоров и кладет в погреб, или съедает 3 из погреба. Оказалось, что в каждый из 96 подряд идущих дней у нее в погребе было разное количество помидоров не превосходящее 96. Как такое могло получиться?

Решение: Можно использовать следующий алгоритм: $+5-3+5-3-3+5-3+5 = 8$. В ходе этих действий количество помидоров в погребе меняется так: 5, 2, 7, 4, 1, 6, 3, 8 — все значения от 1 до 8. Повторяя этот алгоритм, мы будем получать все значения: сначала от 9 до 16, затем — от 17 до 24 и т.д. Наконец, после 12 повторов мы получим 96 различных значений.

3. Родители купили на праздник много конфет, после чего услышали такой диалог детей:
Полина: «О, как здорово, можно съесть все конфеты за два дня, каждый день съедая одинаковое количество!»
Яша: «А я посчитал, что можно съесть все конфеты за два дня, съев во второй день в 2 раза меньше конфет, чем в первый».
Рита: «Давайте не будем угощать Лизу, на нас семерых мы конфеты поровну не поделим».
Сережа: «Зато конфеты точно разделятся поровну на нас шестерых и на пятерых, кстати, тоже!»
Дима: «Я вот недавно проходил в школе квадраты чисел и могу заверить, что ни на 4, ни на 9 данное количество конфет не поделится».
Вероника: «Я пересчитала еще раз, Яша или Полина точно правы!»
Родители с грустью заметили, что только один ребенок из всех сказал правду. Сколько конфет купили родители, если известно, что каждому ребенку должно было достаться хотя бы по 2 конфеты, но не больше 10?

Ответ: 35 и 49 конфет. **Решение:** Заметим, что если бы Вероника сказала правду, то вместе с ней ее сказал бы кто-то еще (Полина или Яша). Получается, Вероника соврала, откуда Полина и Яша – тоже. Тогда количество конфет не делится ни на 2, ни на 3, а значит, ни на 4, ни на 9. Дима говорит правду, Рита и Сережа соответственно лгут, и мы знаем, что количество конфет не делится на 2, 3, и 6, делится на 7, может делиться или не делиться на 5 и лежит в промежутке от 6 до 60. Под все эти условия подходят числа: 35 и 49.

4. У Миши было 6 одинаковых кубиков, у каждого из которых какие-то две противоположные грани покрашены в зеленый цвет, а остальные — в красный. Миша склеил кубики так, как показано на картинке, причем он склеивал между собой только те грани, которые покрашены в один цвет. Какое наибольшее количество красных граней может быть видно на поверхности этой фигуры?

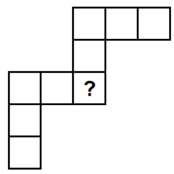


Ответ: 20. **Решение: Оценка:** Заметим, что у каждого кубика не видно не более одной зеленой грани, т.к. нет такого кубика, что у него склеены две противоположные грани. Тогда из 10 граней, которые мы не видим, хотя бы 4 красных. Всего на поверхности кубиков $6 \cdot 4 = 24$ красные грани, значит, видим мы максимум 20 из них. **Пример:** Достаточно склеить зелеными гранями первый кубик со вторым, третий — с четвертым и пятый — с шестым.

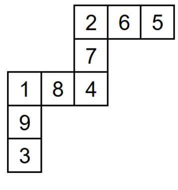
5. На столе лежат карточки с числами от 1 до 1000. Даня и Женя по очереди берут по 2 карточки со стола так, чтобы эти две карточки в сумме давали 1001. Даня считает, что взятая им пара карточек *удачная*, если число на одной карточке делится на число на другой. Сколько *удачных* пар гарантированно сможет взять Даня, если он ходит первым?

Ответ: 4 пары. **Решение:** Заметим, что все числа разбиваются на 500 пар с суммой 1001. Рассмотрим *удачную* пару. Пусть одно число в этой паре равно a, а другое — b. Тогда если b делится на a, то $b = a \cdot k$, а их сумма равна $a + b = a + a \cdot k = a(k+1) = 1001$. Тогда a — делитель 1001, меньший 1001. Разложив 1001 на простые множители ($1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$), понимаем, что для a есть 7 вариантов. Получаем 7 *удачных* пар: (1, 1000), (7, 994), (11, 990), (13, 988), (77, 924), (91, 910), (143, 858). Поскольку Даня ходит первым, он сможет гарантированно забрать себе 4 из них.

6. Денис заполнил клетки фигуры, изображенной справа, использовав все цифры от 1 до 9 по разу так, что сумма цифр в каждой строке и в каждом столбце равна 13. Какое число могло быть записано в клетке, отмеченной знаком вопроса? Укажите все варианты.



Ответ: 4. **Решение:** Обозначим числа, стоящие на пересечениях строки и столбца, за a, b и c. Они учитываются в сумме 2 раза, в то время как остальные числа — по одному. Тогда $4 \cdot 13 = 1 + 2 + \ldots + 9 + a + b + c$, откуда $a + b + c = 7$. Число 7 можно единственным образом представить в виде суммы трех различных натуральных слагаемых: $7 = 1 + 2 + 4$. Заметим, что числа 1 и 2 не могут стоять в одной строке/столбце, поскольку оставшееся число там будет равно 10. Значит, в клетке, отмеченной знаком вопроса, может стоять только 4. Осталось привести пример, он изображен на рисунке.



7. Арина выписала последовательность-палиндром из 100 букв. Букву «П» она использовала 54 раза, букву «О» — 28 раз, а букву «Ш» — 18 раз. После того как Арина зачеркнула последние 34 буквы, новая последовательность снова оказалось палиндромом. Можно ли узнать какая буква стоит на 33 месте? *Палиндром — это последовательность, которая читается слева направо и справа налево одинаково.*

Ответ: Да, можно. **Решение:** Заметим, что отрезок от 1 до 33 буквы совпадает с отрезком от 66 до 34 буквы (поскольку новая последовательность — палиндром) и с отрезком от 100 до 68 буквы (поскольку исходная последовательность — палиндром). Тогда среди всех букв, кроме 67, каждая встречается количество раз кратное 3. Единственная буква, количество повторений которой не кратно 3, — буква «О», значит, именно она стоит на 67 месте. Она же стоит на 34 месте (поскольку исходная последовательность — палиндром), а значит, и на 33 (поскольку новая последовательность — палиндром).

8. 2024 ученика встали в хоровод вокруг ёлки, лицом в центр круга. По команде Деда Мороза каждый из них повернулся на 90 градусов вправо или влево. Оказалось, что 678 пар соседей смотрят друг на друга. После этого по команде Снегурочки каждый ученик повернулся на 180 градусов. Сколько теперь в кругу пар соседей, которые смотрят друг на друга?

Ответ: 678 пар. **Решение:** Обозначим учеников, смотрящих по часовой стрелке, цифрой 1, а тех, кто смотрит против часовой, — цифрой 2. Заметим, что наш круг на самом деле устроен следующим образом: некоторое количество 1 (возможно 1), затем некоторое количество 2 (возможно 1), потом снова 1 и т.д. После поворота на 180 градусов друг на друга будут смотреть те и только те пары соседей, которые до поворота стояли друг к другу спинами. Значит, их и будем считать. При обходе круга по часовой стрелке парам, смотрящим друг на друга, соответствуют стыки 1-2, а парам, стоящим друг к другу спинами, — стыки 2-1. Эти виды стыков чередуются, а значит, их поровну, и количество пар соседей, стоящих друг к другу спинами, равно 678.