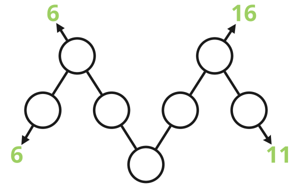
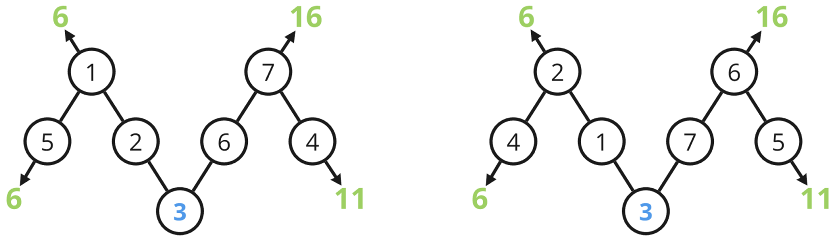
Подмосковная олимпиада школьников, 5 класс

1. Расставьте в кружочки числа от 1 до 7, используя каждое по одному разу, так, чтобы сумма чисел по линиям равнялась указанным на схеме значениям. Приведите все возможные способы.



Ответ: 2 способа. **Решение:** Рассмотрим линию из трех кружочков с суммой 6. Единственный набор чисел, подходящий для этой линии, это 1, 2 и 3. Теперь посмотрим на линию с суммой 16. Эту сумму нужно получить из трёх значений. Одно из них — какое-то из чисел 1, 2, 3. Максимальная сумма двух оставшихся — $6+7=13$. Чтобы получить сумму 16, для первого значения подойдёт только цифра 3. Таким образом, в самом нижнем кружочке будет находиться цифра 3.



Теперь рассмотрим два варианта, как располагаются цифры 1 и 2.

- Если цифра 1 находится в верхнем кружочке, то в левой линии с суммой 6 не хватает цифры 5. Тогда оставшаяся цифра 4 находится в правом нижнем кружочке в линии с суммой 11. То есть, в этой линии должна стоять цифра 7. Для цифры 6 остаётся единственное место *(см. рисунок слева)*.
- Если цифра 2 находится в верхнем кружочке, то в левой линии с суммой 6 не хватает цифры 4. Тогда оставшаяся цифра 5 находится в правом нижнем кружочке в линии с суммой 11. То есть, в этой линии не хватает цифры 6. Для цифры 7 остаётся единственное место *(см. рисунок справа)*.

Мы получили два подходящих способа расстановки чисел.

2. На Пятом Совете Братства пиратские бароны собрались, чтобы разделить добычу: захваченные корабли Ост-Индийской торговой компании. Если раздать корабли поровну пяти баронам, то останется 4 лишних корабля. Если же поровну разделить корабли между шестью баронами, то останется 5 лишних кораблей. Известно также, что пираты захватили наименьшее возможное количество кораблей, которое подходит под условия. Так сколько захваченных кораблей заберёт себе Джек, если обхитрит всех баронов и не оставит им ни одного судна?

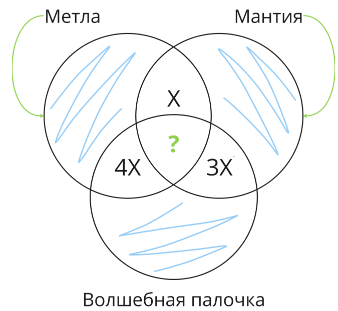
Ответ: 29 кораблей. **Решение:** Если захваченных кораблей было бы на один больше, то:

- при первом способе деления пяти баронам досталось бы поровну кораблей, а лишних кораблей бы не осталось. *(К остатку 4 добавился ещё 1 корабль, и теперь эти пять кораблей распределяются по одному для каждого барона)*;
- при втором способе деления шести баронам досталось бы поровну кораблей, а лишних кораблей бы не осталось. *(К остатку 5 добавился ещё 1 корабль, и теперь эти шесть кораблей распределяются по одному для каждого барона)*;

Тогда нам нужно найти наименьшее значение, которое делится и на 5, и на 6: $5 \cdot 6 = 30$. Это значение на 1 больше, чем количество захваченных кораблей. Значит, Джеку остаётся лишь придумать план, как незаметно для всех баронов украсть $30 - 1 = 29$ кораблей.

3. Перед новым учебным годом в Хогвартсе 50 юных волшебников посетили Косую Аллею, где приобрели мантии, волшебные палочки и мётлы. Только один предмет купили 16 волшебников. Волшебников, которые купили мантию и метлу, оказалось в три раза меньше, чем волшебников, которые купили мантию и волшебную палочку, и в четыре раза меньше, чем волшебников, которые купили метлу и волшебную палочку. Определите, сколько волшебников купили все три предмета.

Ответ: 3 волшебника. **Решение:** Обозначим за x количество волшебников, купивших метлу и мантию. Тогда волшебников, купивших мантию и волшебную палочку, будет $3x$, а волшебников, купивших метлу и волшебную палочку, — $4x$. Заметим, что в сумме $16 + x + 3x + 4x$ волшебники, купившие сразу три предмета, считаются трижды, а остальные — единожды.



Узнаем, сколько могло быть волшебников, купивших сразу три предмета:
$(16 + x + 3x + 4x - 50) : 2 = (16 + 8x - 50) : 2 = (8x - 34) : 2 = 4x - 17 = ?$
Таких волшебников не меньше нуля, поэтому $4x \geq 17$, откуда $x \geq 5$.

- Если $x = 5$, то волшебников, купивших сразу три предмета, будет $4 \cdot 5 - 17 = 3$ — этот вариант подходит.
- При $x \geq 6$ ситуация невозможна, поскольку волшебников, купивших сразу три предмета, будет больше x (волшебников, что купили метлу и мантию): $4x - 17 \geq x \Longrightarrow 4x - x \geq 17 \Longrightarrow 3x \geq 17$ — выполняется как раз при $x \geq 6$.

Таким образом, ровно три волшебника купили все три предмета.

4. Известно, что АНА + НАС = 1447. Найдите сумму Н + А + С + А, если разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым — одинаковые.

Ответ: 30. **Решение:** Посмотрим в разряд сотен: А + Н = 14, если перехода из рязряда десятков не было, или А + Н + 1 = 14, если переход был. Первый случай невозможен, поскольку при сложении тех же букв в разряде десятков переход все же произойдет. Значит, А + Н + 1 = 14, откуда А + Н = 13. Тогда чтобы при сложении А + Н в разряде десятков получалась цифра 4, должен быть переход через разряд от сложения единиц. То есть, А + С = 17. Следовательно, Н + А + С + А = 13 + 17 = 30.

5. Хамелеон рождается, три дня живёт с фиолетовой окраской, утром четвёртого дня становится синим, а к вечеру пятого дня навсегда становится зелёным. В четверг днём в зоопарке было 24 фиолетовых и 17 синих хамелеонов, а в субботу днём — 19 фиолетовых и 12 синих. Сколько синих хамелеонов будет в зоопарке днём во вторник?

Ответ: 7. **Решение:** Хамелеон бывает синим на четвёртый и пятый день. Значит, во вторник будут синими те хамелеоны, которые родились в пятницу или субботу. Посчитаем их количество. Хамелеоны, которые были синими в четверг, к субботе точно стали зелёными, а 24 фиолетовых до субботы точно не успели стать зелёными, но могли посинеть. В субботу в зоопарке был $19 + 12 = 31$ хамелеон. Мы знаем, что 24 из них были в зоопарке ещё в четверг, а остальные $31 - 24 = 7$ как раз родились в пятницу или субботу.

6. В ряд выстроились несколько (больше одного) аборигенов, каждый из которых является рыцарем или лжецом. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из стоящих заявил: «Среди моих соседей ровно один рыцарь». Затем, эти же аборигены перемешались и по-новому встали в ряд. Теперь каждый из них заявил: «Все мои соседи — рыцари». Сколько могло быть рыцарей в ряду? Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 0 или 2. **Решение:** Заметим, что в новой расстановке всё зависит от первого аборигена в очереди. Если это рыцарь, то и все аборигены будут рыцарями, а если это лжец, то все будут лжецами. Поймём, при каком количестве аборигенов подходит вариант, где все рыцари. Для этого рассмотрим первую расстановку и увидим, что в ней не может быть ≥ 3 рыцаря, ведь не крайний рыцарь не сможет заявить, что среди его соседей будет ровно один рыцарь. Значит, раз аборигенов должно быть хотя бы двое, то рыцарей может быть только двое. Теперь проверим, при каком количестве аборигенов подходит вариант, где все лжецы. Рассмотрев первую расстановку, видим, что независимо от количества лжецов, каждый из них сможет заявить, что среди его соседей ровно один рыцарь. Таким образом, если в ряду есть хотя бы один рыцарь, то их ровно два, а если рыцарей нет, то возможно любое количество аборигенов-лжецов.

7. Назовём дату **красивой**, если она записывается в формате ДД.ММ.ГГГГ, где число года может быть составлено с помощью последовательной записи чисел даты и месяца или же месяца и даты. Найдите количество **красивых** дат с 01.01.1000 по 01.01.1200. *Например, первые две красивые даты будут в 1001 году: 10.01.1001 (ДД-ММ = ГГГГ) и 01.10.1001 (ММДД = ГГГГ).*

Ответ: 83. **Решение:** Не будем рассматривать года, последние две цифры которых образуют число, большее 31, поскольку нет даты или месяца, которые могут дать такое значение. Заметим, что в годах вида 100* и 110*, а также в 1011, 1012, 1110 и 1112 годах будет по две *красивые* даты:

- 100* год: 10.0*.100* и 0*.10.100*;
- 1011 год: 10.11.1011 и 11.10.1011;
- 1012 год: 10.12.1012 и 12.10.1012;
- 110* год: 11.0*.110* и 0*.11.110*;
- 1110 год: 11.10.1110 и 10.11.1110;
- 1112 год: 11.12.1112 и 12.11.1112;

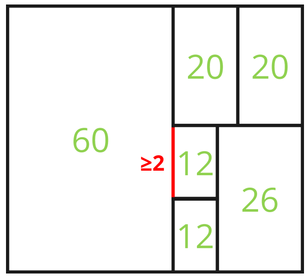
Значит, всего годов, в которых будет по две *красивые* даты, $9 + 2 + 9 + 2 = 22$ (не учитываем года, оканчивающиеся на 0). То есть, *красивых* дат уже $22 \cdot 2 = 44$.
Далее, в годах с 1013 по 1031 и с 1113 по 1130 будет по одной *красивой* дате:

- 1013 — 1031 годы: 13.10.1013, ..., 31.10.1031;
- 1113 — 1130 годы: 13.11.1113, ..., 30.11.1130;

Значит, всего годов, в которых будет по одной *красивой* дате, $(31-13+1)+(30-13+1) = 19 + 18 = 37$. То есть, *красивых* дат уже $44 + 37 = 81$.
Остались два года, запись которых состоит из двух одинаковых двузначных чисел: 1010 и 1111. В них будет по одной *красивой* дате: 10.10.1010 и 11.11.1111 соответственно.

Таким образом, *красивых* дат с 01.01.1000 по 01.01.1200 будет $81 + 2 = 83$.

8. Казимир разбил прямоугольник на несколько прямоугольников поменьше, как показано на картинке. Затем он посчитал периметры маленьких прямоугольников и подписал полученные значения внутри фигур. Помогите Казимиру найти наибольший возможный периметр внешнего (большого) прямоугольника, если длина стороны, отмеченной красным, должна быть не меньше 2 см.

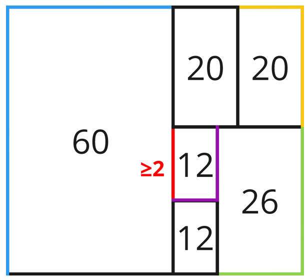


Ответ: 86. **Решение:** Отметим пары сторон (вертикальная и горизонтальная) прямоугольников с периметрами 60, 26, 20 и 12 (синие, зелёные, жёлтые и фиолетовые соответственно). Анализируя полупериметры, замечаем следующее:

Фиолетовый: увеличение вертикальной стороны приводит к уменьшению горизонтальной;

Зелёный: увеличение вертикальной стороны идет от увеличения вертикальной фиолетовой, что уменьшает горизонтальную сторону;

Жёлтый: уменьшение горизонтальной стороны идет от уменьшения горизонтальных фиолетовой и зеленой, что увеличивает вертикальные.



Видим, что при увеличении вертикальных сторон уменьшаются горизонтальные, и наоборот. Исходный прямоугольник содержит в полупериметре пару синих сторон, сумма длин которых равна 30, и две жёлтые горизонтальные стороны. Для максимизации периметра жёлтые горизонтальные стороны должны быть как можно больше, что достигается при минимальных вертикальных сторонах. Таким образом, максимальный периметр достигается при красной стороне, равной 2. Теперь посчитаем периметр:

- фиолетовая вертикальная $= 2$, а горизонтальная $= 6 - 2 = 4$;
- зелёная вертикальная $= 2 \cdot 2 = 4$, а горизонтальная $= 13 - 4 = 9$;
- две жёлтые горизонтальные $= 9 + 4 = 13$

Итого, периметр равен $2 \cdot (30 + 13) = 86$.