Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Отборочный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 11 класс, Москва

Вариант 1.

1. В автопробеге Москва – Владивосток участвуют две команды «Лада» и «Москвич», составленные из 15 экипажей каждая. По условиям пробега, каждый экипаж преодолевает только один участок трассы, начало и конец которого определены руководителем его команды заблаговременно, а после его завершения – мгновенно начинается движение следующего экипажа. Так происходит от первого этапа до последнего. Первые экипажи команд стартуют в Москве одновременно. На каждом отведенном экипажу участке скорость передвижения постоянная, но может зависеть от участка. Во время движения предусмотрены возможности для обгонов. Какое максимальное количество обгонов возможно при таких условиях гонки?

2. Найти наименьшее значение функции $y = \sin x + \cos x$ на множестве решений уравнения $(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3 = \sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x$ и для каких решений оно достигается?

3. Вычислить значение выражения $\left(1+\frac{4}{f(4)}\right)\left(1+\frac{4}{f(5)}\right)\left(1+\frac{4}{f(6)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{4}{f(2024)}\right)$, где $f(x) = x^2 - x - 6$.

4. Какое наибольшее число нулевых коэффициентов может иметь многочлен степени 2025, если известно, что он имеет 2025 различных действительных корней?

5. Для любого a найти число решений уравнения $x^5 - 15x^3 - a = 0$.

6. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является ромб $ABCD$ с острым углом 60^0. Вершина S проектируется на основание в точку пересечения диагоналей ромба, а высота пирамиды равна половине меньшей диагонали ромба. Точка M на стороне CD основания выбрана так, что площадь треугольника SBM принимает наименьшее возможное значение. Найти отношение $DM : DC$.

Ответы и решения

Задача 1. Пусть f(t) - путь, пройденный командой “Лада” за время t, а g(t) - путь, пройденный командой “Москвич” за время t. Так как всего 15 экипажей, то графики функций f(t) и g(t) - это ломанные, имеющие не более 15 звеньев, а значит не более 14 точек излома. Обгоны отвечают изменениям знака у функции f(t)-g(t), которая сама является ломанной, имеющей не более 28 изломов. Поэтому обгонов не может быть больше 28.
Покажем, что возможно такое разбиение трассы. Вот одно из таких разбиений. Нарисуем дугу окружности в 90^0 с началом в точке Москва и концом в точке Владивосток, разобьем ее 29 точками (не считая граничные) на 30 равных дуг. Перенумеруем их числами 1, 2, 3, …,30. Точки с четными номерами будут концами промежуточных этапов для «Лады», с нечетными – для «Москвича». Тогда на 13 этапах с началом в точках 2,4, …, 28 будет по два обгона (всего 26) и по одному между точками с номерами 1 и 2, а также между точками с номерами 28 и 29 (два обгона). Всего 28 обгонов (на рис для четырех экипажей).

Ответ: 28.

Задача 2. Введем следующие обозначения: $a=\sin x, b=\sin 2x, c=\sin 3x$. Преобразуем уравнение:

$$(a+b+c)^3-a^3-(b^3+c^3)=(b+c)\left[(a+b+c)^2+a(a+b+c)+a^2-b^2+bc-c^2\right]=$$
$$=(b+c)\left[(a+c)(a+2b+c)+a(a+c)+b(a+c)+(a+c)(a-c)\right]=$$
$$=(b+c)(a+c)(a+2b+c+a+b+a-c)=3(b+c)(a+c)(a+b)$$

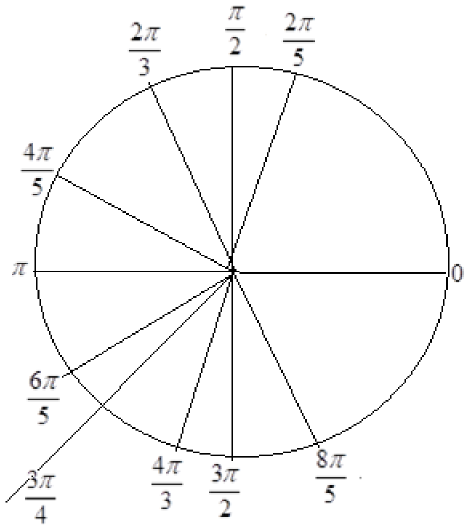
Получим решения уравнений:

$\sin 2x=\sin(-x)\to x_1=\dfrac{2\pi k}{3}, x_2=(2m+1)\pi$

$\sin 3x=\sin(-x)\to x_3=\dfrac{\pi k}{2}$

$\sin 3x=\sin(-2x)\to x_4=\dfrac{2\pi k}{5}$

Объединим серии на тригонометрическом круге:



Наименьшее значение функция $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ принимает на серии, соответствующей точке на тригонометрическом круге, наименее удаленной от $\dfrac{5\pi}{4}$. Такой точкой является $\dfrac{6\pi}{5}$ и соответствующая ей серия $x=\dfrac{6\pi}{5}+2\pi k, k\in Z$.

Ответ: $y_{min} = -\sqrt{2}\sin\frac{9\pi}{20}$ при $x=\frac{6\pi}{5}+2\pi k, k\in Z.$

Задача 3. Приведем к наименьшему общему знаменателю и разложим на множители получившуюся дробь в сомножителе, соответствующему $x=n, n=4,5,\ldots,2024$:

$$1+\frac{4}{f(n)}=1+\frac{4}{n^2-n-6}=\frac{n^2-n-2}{n^2-n-6}=\frac{(n+1)(n-2)}{(n-3)(n+2)}$$

Отсюда получим, что в произведении $\dfrac{5\cdot 2}{1\cdot 6}\cdot\dfrac{6\cdot 3}{2\cdot 7}\cdot\dfrac{7\cdot 4}{3\cdot 8}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2025\cdot 2022}{2021\cdot 2026}$ все дроби сократятся, кроме первой и последней. Получаем ответ: $\dfrac{5}{1}\cdot\dfrac{2022}{2026}=\dfrac{5055}{1013}$.

Ответ: $\frac{5055}{1013}$.

Задача 4. Рассмотрим общий вид задачи и её решение.

Какое наибольшее число нулевых коэффициентов может иметь многочлен $P_n(x)$ степени n, если известно, что он имеет n различных действительных корней?

Ответ: k для n=2k и k+1 для n=2k+1.

Решение. Известно, что между любыми двумя соседними нулями многочлена $P_n(x)$ находится ноль многочлена его производной $P_n'(x)$. Такой корень единственный, поскольку число промежутков между нулями равно n-1 и такова же степень многочлена $P_n'(x)$, т.е. производная также не может иметь кратных корней. Этим же свойством обладает многочлен $P_n^{(k)}(x)-$ производная порядка k многочлена $P_n(x), k=1,2,...,(n-1)$. Число различных нулей многочлена $P_n^{(k)}(x)$ равно его степени, т.е. n-k, а кратные корни отсутствуют. Это может быть только в том случае, если из каждой пары соседних коэффициентов многочлена $P_n(x)$ хотя бы один ненулевой. Действительно, если для некоторого m<n коэффициенты a_m и a_{m+1} многочлена

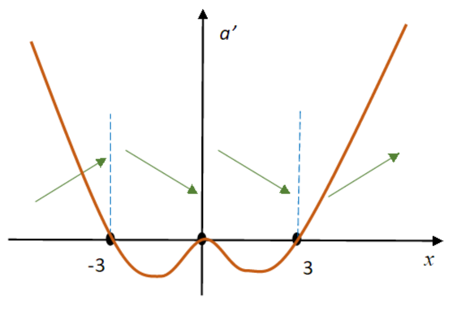
$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_{m+2}x^{m+2}+a_{m-1}x^{m-1}+...+a_1x+a_0$$

равны нулю, то производная $P_n^{(m)}(x)$ порядка m имеет x=0 кратным корнем. Если n=2k, то из 2k+1 его коэффициентов можно составить k соседних пар, отдельно выделив $a_n\neq 0$. Тогда число нулевых коэффициентов многочлена $P_n(x)$ не превосходит k. Эта оценка достигается, например, для многочлена $P_{2k}(x)=(x^2-1)(x^2-2^2)\cdot...\cdot(x^2-k^2)$, у которого все коэффициенты при нечетных степенях переменной (их k штук) равны нулю. Если n=2k+1, то из 2k+2 коэффициентов многочлена $P_n(x)$ можно составить k+1 пару соседних и число его нулевых коэффициентов не превосходит k+1. Эта оценка достижима, например, для многочлена $P_{2k+1}(x)=x(x^2-1)(x^2-2^2)\cdot...\cdot(x^2-k^2)$, у которого все коэффициенты с четными номерами (их k+1 штука) равны нулю.

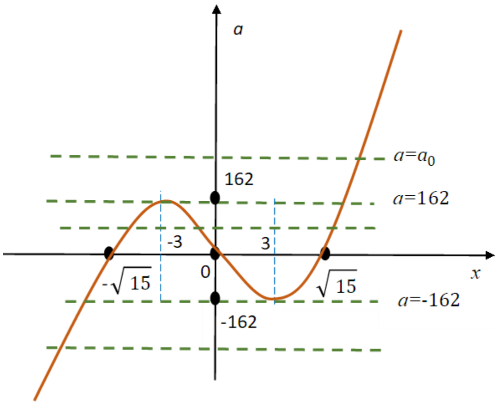
Ответ: 1013.

Задача 5. Исследуем функцию $a=x^5-15x^3$. Найдем нули производной: $a'=5x^4-45x^2=0\to 5x^2(x-3)(x+3)=0\to x_{1,2}=0, x_3=-3, x_4=3$

$a(-3)=162, a(3)=-162$.



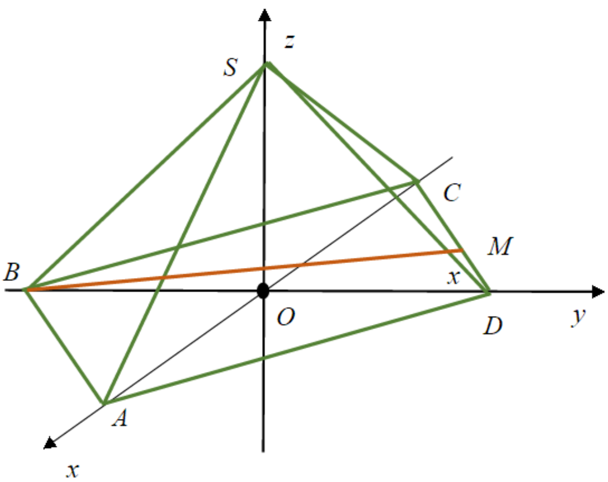
Количество решений уравнения при фиксированном $a = a_0$ определяется числом точек пересечения графика $a = x^5 - 15x^3$ с горизонтальной прямой $a = a_0$. При $|a| > 162$ точка пересечения одна и одно решение, при $|a| = 162$ таких точек две и решения два. Наконец, при $|a| < 162$ – решений три.



Ответ: при $|a| > 162$ решение одно, при $a = \pm 162$ два решения, при $|a| < 162$ три решения.

Задача 6. Рассмотрим общий вид задачи и её решение.
Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является ромб $ABCD$ с острым углом α. Вершина S проектируется на основание в точку пересечения диагоналей ромба, а высота пирамиды равна половине меньшей диагонали ромба. Точка M на стороне CD основания выбрана так, что площадь треугольника SBM принимает наименьшее возможное значение. Найти отношение $DM : DC$.
Решение. Обозначим $DC = a$, $DM = x$. Введем ортогональную систему координат с ортами $\vec{i}$ – в направлении вектора $\overrightarrow{OA}$, $\vec{j}$ - в направлении вектора $\overrightarrow{OD}$, $\vec{k}$ - в направлении вектора $\overrightarrow{OS}$. Тогда вершины пирамиды имеют в этой системе координаты:

$$A(a\cos\frac{\alpha}{2};0;0),\ B(0;-a\sin\frac{\alpha}{2};0),\ C(-a\cos\frac{\alpha}{2};0;0),\ D(0;a\sin\frac{\alpha}{2};0),\ S(0;0.a\sin\frac{\alpha}{2}).$$



Координаты векторов:

$$\overrightarrow{DM} = \left\{-x\cos\frac{\alpha}{2};-x\sin\frac{\alpha}{2};0\right\},\ \overrightarrow{BD} = \left\{0;2a\sin\frac{\alpha}{2};0\right\},$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DM} = \left\{-x\cos\frac{\alpha}{2};(2a-x)\sin\frac{\alpha}{2};0\right\},\ \overrightarrow{BS} = \left\{0;a\sin\frac{\alpha}{2};a\sin\frac{\alpha}{2}\right\}.$$

Вычислим векторное произведение векторов $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BS}$:

$$\overrightarrow{BM}\times\overrightarrow{BS}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -x\cos\frac{\alpha}{2} & (2a-x)\sin\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & a\sin\frac{\alpha}{2} & a\sin\frac{\alpha}{2}\end{vmatrix}=\left\{a(2a-x)\sin^2\frac{\alpha}{2};xa\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2};-xa\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right\}.$$

Тогда

$$S_{BMS}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BM}\times\overrightarrow{BS}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a(2a-x)\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(xa\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(-xa\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}a\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\left((2a-x)\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(x\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(x\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}.$$

Наименьшее значение площади треугольника SBM соответствует значению $x\in[0;a]$, при котором квадратный трехчлен $y=(2a-x)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2x^2c\text{os}^2\frac{\alpha}{2}$ принимает наименьшее значение:

$$y'=-2(2a-x)\sin^2\frac{\alpha}{2}+4x\cos^2\frac{\alpha}{2}=0\to x^*=\frac{2a\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}\to\frac{x^*}{a}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2-\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Заметим, что для $\alpha\le 90^0\to\sin^2\frac{\alpha}{2}\le\frac{1}{2}$ и отношение $\frac{x^*}{a}<1$.

Таким образом $DM:DC=\frac{x^*}{a}=2\sin^2\frac{\alpha}{2}:(2-\sin^2\frac{\alpha}{2})=2(1-\cos\alpha):(3+\cos\alpha)$.

Ответ: $DM:DC=2\sin^2\frac{\alpha}{2}:(2-\sin^2\frac{\alpha}{2})=2(1-\cos\alpha):(3+\cos\alpha)=2:7$.

Вариант 2

1. В автопробеге Москва – Владивосток участвуют две команды «Лада» и «Москвич», составленные из 14 экипажей каждая. По условиям пробега, каждый экипаж преодолевает только один участок трассы, начало и конец которого определены руководителем его команды заблаговременно, а после его завершения – мгновенно начинается движение следующего экипажа. Так происходит от первого этапа до последнего. Первые экипажи команд стартуют в Москве одновременно. На каждом отведенном экипажу участке скорость передвижения постоянная, но может зависеть от участка. Во время движения предусмотрены возможности для обгонов. Какое максимальное количество обгонов возможно при таких условиях гонки?

Ответ: 26.

2. Найти наибольшее значение функции $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ на множестве решений уравнения $(\sin x+\cos x+\cos 2x)^3=\sin^3 x+\cos^3 x+\cos^3 2x$ и для каких решений оно достигается?

Ответ: $y_{max}=\sqrt{3}$ при $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$.

3. Вычислить значение выражения $\left(1-\frac{5}{f(5)}\right)\left(1-\frac{5}{f(6)}\right)\left(1-\frac{5}{f(7)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{5}{f(2024)}\right)$, где $f(x)=x^2-2x-3$.

Ответ: $\frac{1013}{6063}$.

4. Какое наибольшее число нулевых коэффициентов может иметь многочлен степени 2024, если известно, что он имеет 2024 различных действительных корней?

Ответ: 1012.

5. Для любого а найти число решений уравнения $x^6-6x^4-a=0$.

Ответ: при $a<-32$ решений нет, при $a\in\{-32\}\cup\{a>0\}$ два решения, при $a=0-$ три решения, при $a\in(-32;0)-$ четыре решения.

6. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является ромб $ABCD$ с острым углом 45^0. Вершина S проектируется на основание в точку пересечения диагоналей ромба, а высота пирамиды равна половине меньшей диагонали ромба. Точка M на стороне CD основания выбрана так, что площадь треугольника SBM принимает наименьшее возможное значение. Найти отношение $DM:DC$.

Ответ: $DM:DC=2\sin^2\frac{\alpha}{2}:(2-\sin^2\frac{\alpha}{2})=2(1-\cos\alpha):(3+\cos\alpha)=(14-8\sqrt{2}):17$.

Вариант 3

1. В автопробеге Москва – Владивосток участвуют две команды «Лада» и «Москвич», составленные из 13 экипажей каждая. По условиям пробега, каждый экипаж преодолевает только один участок трассы, начало и конец которого определены руководителем его команды заблаговременно, а после его завершения – мгновенно начинается движение следующего экипажа. Так происходит от первого этапа до последнего. Первые экипажи команд стартуют в Москве одновременно. На каждом отведенном экипажу участке скорость передвижения постоянная, но может зависеть от участка. Во время движения предусмотрены возможности для обгонов. Какое максимальное количество обгонов возможно при таких условиях гонки?

Ответ: 24.

2. Найти наименьшее значение функции $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ на множестве решений уравнения $(\cos x+\cos 2x+\cos 3x)^3=\cos^3 x+\cos^3 2x+\cos^3 3x$ и для каких решений оно достигается?

Ответ: $y_{min}=-2$ при $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$.

3. Вычислить значение выражения $\left(1+\frac{5}{f(5)}\right)\left(1+\frac{5}{f(6)}\right)\left(1+\frac{5}{f(7)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{5}{f(2024)}\right)$, где $f(x)=x^2-2x-8$

Ответ: $\frac{6063}{1013}$.

4. Какое наибольшее число нулевых коэффициентов может иметь многочлен степени 2023, если известно, что он имеет 2023 различных действительных корней?

Ответ: 1012.

5. Для любого а найти число решений уравнения $x^5-5x^4-a=0$.

Ответ: при $a \in (-\infty; -256) \cup (0; +\infty)$ одно решение, при $a = -256, a = 0$ – два решения, при $a \in (-256; 0)$ – три решения.

6. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является ромб $ABCD$ с острым углом 30^0. Вершина S проектируется на основание в точку пересечения диагоналей ромба, а высота пирамиды равна половине меньшей диагонали ромба. Точка M на стороне CD основания выбрана так, что площадь треугольника SBM принимает наименьшее возможное значение. Найти отношение $DM : DC$.

Ответ: $DM : DC = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} : (2 - \sin^2\frac{\alpha}{2}) = 2(1-\cos\alpha) : (3+\cos\alpha) = 2(15 - 8\sqrt{3}) : 33$.

Вариант 4

1. В автопробеге Москва – Владивосток участвуют две команды «Лада» и «Москвич», составленные из 12 экипажей каждая. По условиям пробега, каждый экипаж преодолевает только один участок трассы, начало и конец которого определены руководителем его команды заблаговременно, а после его завершения – мгновенно начинается движение следующего экипажа. Так происходит от первого этапа до последнего. Первые экипажи команд стартуют в Москве одновременно. На каждом отведенном экипажу участке скорость передвижения постоянная, но может зависеть от участка. Во время движения предусмотрены возможности для обгонов. Какое максимальное количество обгонов возможно при таких условиях гонки?

Ответ: 22.

2. Найти наибольшее значение функции $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ на множестве решений уравнения $(\sin x + \sin 2x + \cos 3x)^3 = \sin^3 x + \sin^3 2x + \cos^3 3x$ и для каких решений оно достигается?

Ответ: $y_{max} = 2\ \sin\frac{13\,\pi}{24}$ при $x = \frac{7\pi}{8} + 2\pi k, k \in Z$.

3. Вычислить значение выражения $\left(1 - \frac{4}{f(4)}\right)\left(1 - \frac{4}{f(5)}\right)\left(1 - \frac{4}{f(6)}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{4}{f(2024)}\right)$, где $f(x) = x^2 - x - 2$.

Ответ: $\frac{1013}{5055}$.

4. Какое наибольшее число нулевых коэффициентов может иметь многочлен степени 2022, если известно, что он имеет 2022 различных действительных корней?

Ответ: 1011.

5. Для любого а найти число решений уравнения $x^6 - 3x^2 - a = 0$.

Ответ: при $a \in (-\infty; -2)$ решений нет, при $a \in \{-2\} \cup (0; +\infty)$ – два решения, при $a = 0$ – три решения, при $a \in (-2; 0)$ - четыре решения.

6. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является ромб $ABCD$ с острым углом 75^0. Вершина S проектируется на основание в точку пересечения диагоналей ромба, а высота пирамиды равна половине меньшей диагонали ромба. Точка M на стороне CD основания выбрана так, что площадь треугольника SBM принимает наименьшее возможное значение. Найти отношение $DM : DC$.

Ответ:

$$DM : DC = 2(1-\cos\alpha) : (3+\cos\alpha) = \left|\cos 75^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right| = 2(4 - \sqrt{6} + \sqrt{2}) : (12 + \sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

Росатом 11 класс (Отборочный тур), Москва 17.11.2024

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б - Сделаны предположения по решению задачи/ рассмотрен частный случай;

1 б - Верно составлена математическая модель;

2 б - Допущена арифметическая ошибка при подсчете максимального количества обгонов;

3 б - Задача решена верно.

Задача 2:

0 б - Несущественные продвижения в решении задачи/ найден max (min) функции, не являющийся решением уравнения;

1 б - Есть существенные продвижения в решении уравнения (есть разложение на множители, уравнение сведено к простой системе и пр.);

2 б - Верно решено уравнение, но не верно найден экстремум;

3 б - Задача решена верно.

(3 вариант, 2 задача: Найдено минимальное значение функции, и выполнена проверка, что данный минимум удовлетворяет тригонометрическому уравнению - 3 б.)

Задача 3:

0 б - Несущественные продвижения в решении задачи;

1 б - Получено разложение на множители в каждой скобке;

2 б - Верное решение, но допущена арифметическая ошибка;

3 б - Задача решена верно.

Задача 4:

0 б - Сделаны предположения по решению задачи / рассмотрены частные случаи;

1 б - Приведен пример многочлена с максимальным колличеством нулевых коэффициентов, но этот факт не доказан;

2 б - Задача решена с арифметической ошибкой (при подсчёте числа нулевых коэффициентов)/ в доказательстве есть мелкие недочеты;

3 б - Задача решена верно.

Задача 5:

0 б - Сделаны некоторые предположения по решению задачи;

1 б - Исследована функция f(x) и схематично нарисован график этой функции;

2 б - Число решений уравнения найдено с ошибкой не более чем на одном интервале для параметра a;

3 б - Задача решена верно.

Задача 6:

0 б - Сделан верный рисунок, найдены некоторые элементы сечения;

1 б - С точностью до подобия площадь сечения выражена через один параметр (например, есть выражение для нахождения площади через острый угол и сторону ромба);

2 б - Предложен верный способ для нахождения положения точки M и отношения DM:DC, но допущена арифметическая ошибка в вычислениях;

3 б - Задача решена верно.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Отборочный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 11 класс, регионы

Вариант 1.

1. На круговой дорожке в точках A_1, A_2, A_3 (нумерация по часовой стрелке) расположены приборы для измерения скорости бегунов так, что отношения длин дуг $A_1A_2 : A_2A_3 : A_3A_1 = 1:2:3$. Скорость бега v_k, $k = 1, 2, 3$ (м/мин) отображается на «умные часы» участников забега от ближайшего к ним прибора, в зоне действия которого они постоянные, но могут меняться при смене зон. Во время забега Пети оказалось, что отношение скоростей $v_1 : v_2 : v_3 = 2:3:4$. За сколько минут Петя преодолел полный круг, если он бежал по часовой стрелке и дистанцию от A_1 до A_2 преодолел за 10 мин?

2. Среди решений уравнения

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + 4\sin x \sin 2x \sin 3x = 0,5 + 2(\sin x \sin 2x + \sin 2x \sin 3x + \sin 3x \sin x)$$

выбрать такое, для которого величина $y = (x-\pi)^2 + (x-2\pi)^2$ принимает минимальное возможное значение.

3. На бильярдном столе из одинаковых шаров выложен правильный тетраэдр. Расположение шаров плотное: ни один дополнительный шар не может быть помещен внутрь тетраэдра и любая пара соседних шаров в тетраэдре касаются друг друга. В основание тетраэдра уложено 36 шаров. Из скольких шаров выложен весь тетраэдр?

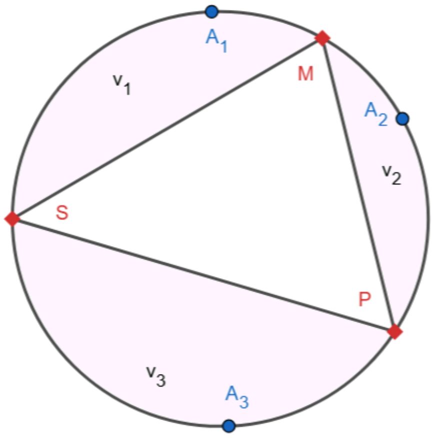
4. Найти многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, для которого $P(2) = 26$, а $P(26) = 19010$.

5. Для каждого a решить уравнение $\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{2a^2 - x^2} = a$.

6. Точка H – ортоцентр треугольника ABC (точка пересечения высот). DH – высота пирамиды $ABCD$. Длины ее боковых ребер DA, DB, DC равны $1, 2, 3$ соответственно. Ребра DB и DC перпендикулярны. Найти объем пирамиды.

Ответы и решения

Задача 1. Пусть $x,\ 2x,\ 3x$ – длины дуг $A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_1$, а точки M, P, S – середины дуг $A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_1$ соответственно.



По условию

$v_1 = 2v$ – скорость бега на дуге SA_1M с длиной $s_1 = \dfrac{x+3x}{2}$ (зона действия прибора 1);

$v_2 = 3v$ – скорость бега на дуге MA_2P с длиной $s_2 = \dfrac{x+2x}{2}$; (зона действия прибора 2);

$v_3 = 4v$ – скорость бега на дуге PA_3S с длиной $s_3 = \dfrac{2x+3x}{2}$ (зона действия прибора 3);

Найдем время пробега каждой зоны:

$t_1 = \dfrac{s_1}{v_1} = \dfrac{x}{v}$ – время пробега по дуге SA_1M ; $t_2 = \dfrac{s_2}{v_2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x}{v}$ – время пробега по дуге MA_2P ;

$t_3 = \dfrac{s_3}{v_3} = \dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{x}{v}$ – время пробега дуги по дуге PA_2S ;

Известно что движение по дуге A_1A_2 заняло 10 минут, при этом половину этого участка Петя был в зоне прибора 1), а другую половину – в зоне прибора 2), таким образом

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2v}+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{3v}=10 \rightarrow \frac{5x}{12v}=10 \rightarrow \frac{x}{v}=24\ (\text{мин}).$$

Всего на преодоление полного круга ушло

$$t_1+t_2+t_3=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right)\cdot 24 = 24+12+15=51(\text{мин})$$

Ответ: $t_1+t_2+t_3=51$ минута

Задача 2. Преобразуем функцию $y=(x-\pi)^2+(x-2\pi)^2$:

$$y=2x^2-6\pi x+5\pi^2.$$

Это квадратный трехчлен, минимально значение он принимает в вершине $x=\dfrac{3\pi}{2}$.

Следовательно надо искать решение уравнения

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+4\sin x\sin 2x\sin 3x = 0,5+2(\sin x\sin 2x+\sin 2x\sin 3x+\sin 3x\sin x)$$

наименее отклоняющееся от $x=\dfrac{3\pi}{2}$.

Введем обозначения $a=\sin x, b=\sin 2x, c=\sin 3x$ и преобразуем это уравнение:

$$a+b+c-2(ab+bc+ca)+4abc-0,5=a(1-2b)+c(1-2b)-2ac(1-2b)-$$
$$-0,5(1-2b)=(1-2b)(a+c-2ac-0,5)=(1-2b)(c(1-2a)-0,5(1-2a)=$$
$$=(1-2b)(1-2a)(c-0,5)=0,5(1-2a)(1-2b)(1-2c)=0$$

Случай 1. $a=\sin x=1/2.$

На серии $x_k^1=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$ квадратный трехчлен принимает минимальное значение при $k=1$ и

$$y_{\min}^1=\left(\frac{13\pi}{6}-\pi\right)^2+\left(\frac{13\pi}{6}-2\pi\right)^2=\frac{25\pi^2}{18}$$

На серии $x_k^2 = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$ квадратный трехчлен принимает минимальное значение при $k = 0$ и

$$y_{\min}^2 = \left(\frac{5\pi}{6} - \pi\right)^2 + \left(\frac{5\pi}{6} - 2\pi\right)^2 = \frac{25\pi^2}{18}$$

Случай 2. $b = \sin 2x = 1/2$.

На серии $x_k^1 = \dfrac{\pi}{12} + \pi k$ квадратный трехчлен принимает минимальное значение при $k = 1$ и

$$y_{\min}^1 = \left(\frac{13\pi}{12} - \pi\right)^2 + \left(\frac{13\pi}{12} - 2\pi\right)^2 = \frac{61\pi^2}{72}$$

На серии $x_k^2 = \dfrac{5\pi}{12} + \pi k$ квадратный трехчлен принимает минимальное значение при $k = 1$ и

$$y_{\min}^2 = \left(\frac{17\pi}{12} - \pi\right)^2 + \left(\frac{17\pi}{12} - 2\pi\right)^2 = \frac{37\pi^2}{72}$$

Случай 3. $c = \sin 3x = 1/2$.

На серии $x_k^1 = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi k}{3}$ квадратный трехчлен принимает минимальное значение при $k = 2$ и

$$y_{\min}^1 = \left(\frac{25\pi}{18} - \pi\right)^2 + \left(\frac{25\pi}{18} - 2\pi\right)^2 = \frac{85\pi^2}{162}$$

На серии $x_k^2 = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2\pi k}{3}$ квадратный трехчлен принимает минимальное значение при $k = 2$ и

$$y_{\min}^2 = \left(\frac{29\pi}{18} - \pi\right)^2 + \left(\frac{29\pi}{18} - 2\pi\right)^2 = \frac{85\pi^2}{162}$$

Наименьшее полученное значение равно $\dfrac{37}{72}$. Оно достигается на решении $x = \dfrac{17\pi}{12}$.

Ответ: $x = \dfrac{17\pi}{12}$.

Задача 3. Пусть ребра тетраэдра содержат n шаров. Количество шаров в основании тетраэдра равно

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} = 36 \to n^2 + n - 72 = 0 \to \left[\begin{array}{l} n = 8 \\ n = -9 \end{array}\right.$$

Следующий правильный треугольник шаров, лежащих на шарах основания, имеет $(n-1)$ шар на своей стороне и состоит из $\dfrac{(n-1)n}{2}$ шаров и т.д. Треугольник, содержащий k шаров на своей стороне, построен из $\dfrac{k(k+1)}{2}, k = 1, 2, ..., n$ шаров. Общее число шаров, содержащихся в пирамиде равно сумме:

$$N = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Задача сводится к нахождению сумм $\sum_{k=1}^{n} k$ и $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Первая сумма это сумма арифметической прогрессии. Она равна

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Вычислим $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Для этого рассмотрим равенства

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1,\ k = 1, 2, ..., n$$

Сложим эти равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Перепишем сумму в левой части этого равенства в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=2}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 - 1 - (n+1)^3.$$

В результате получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 - 1 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Отсюда находим

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - 1 - 3\sum_{k=1}^{n} k - n = (n+1)\left((n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1\right) = (n+1)\frac{2n^2 + n}{2}.$$

Следовательно

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Подставим полученные выражение для сумм в формулу для N :

$$N = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{n(n+1)(2n+4)}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

При $n = 8$ получаем $N = 120$.

Ответ: $N = 120$.

Задача 4. Заметим, что так как в двух различных точках многочлен $P(x)$ принимает различные значения, то его степень $n \geq 1$. Пусть

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n,\ c_k \in Z,\ c_k \geq 0.$$

Рассмотрим $P(2) = c_0 + 2c_1 + 2^2 c_2 + ... + 2^n c_n = 26.$ Отсюда следует, что $c_k < 26,\ k = 0, 1, 2, ..., n.$

Теперь рассмотрим $P(26) = c_0 + 26c_1 + 26^2 c_2 + ... + 26^n c_n = 19010$. Заметим, что $19010 = 731 \cdot 26 + 4$. С учетом того, что $c_0 < 26$ приходим к выводу, что $c_0 = 4$. Тогда $c_1 + 26c_2 + 26^2 c_3 + ... + 26^{n-1} c_n = 731 = 28 \cdot 26 + 3$.

Следовательно $c_1 = 3$. Вычитая тройку и деля на 26, получим

$c_2 + 26c_3 + 26^2 c_4 + ... + 26^{n-2} \cdot c_n = 28 = 26 \cdot 1 + 2.$,

Это означает, что $c_2 = 2,\ \ c_3 = 1,\ \ c_4 = c_5 = ... = c_n = 0.$

Искомый многочлен $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$.

Ответ: $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$.

Задача 5. Так как левая часть уравнения неотрицательна, то при $a < 0$ решений нет. Рассмотрим $a = 0$: $\sqrt{x^2} + \sqrt{-x^2} = 0$. Это уравнение имеет единственное решение $x = 0$. Теперь рассмотрим $a > 0$. Введем обозначения $u = \sqrt{x^2 - a^2}, v = \sqrt{2a^2 - x^2}$ и перепишем уравнение в виде системы

$$\begin{cases} u + v = a, \\ u^2 + v^2 = a^2. \end{cases}$$

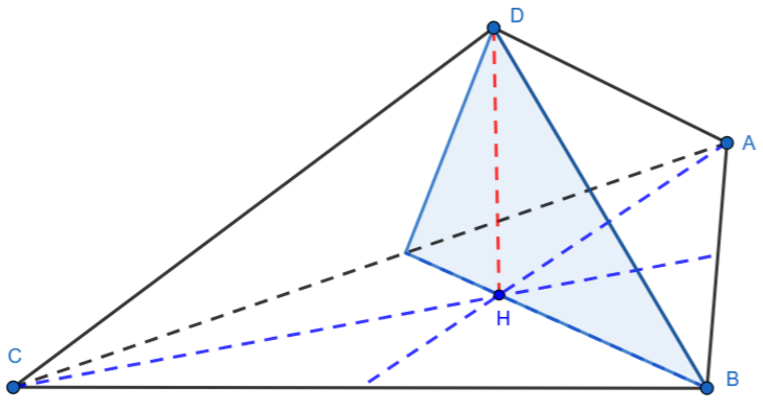
Из цепочки равенств $u^2 + v^2 = (u+v)^2 - 2uv = a^2 - 2uv = a^2$ следует, что $uv = 0$.

Случай 1. $u = 0$. $\sqrt{x^2 - a^2} = 0$. Следовательно $x = \pm a$.

Случай 2. $v = 0$. $\sqrt{2a^2 - x^2} = 0$. Следовательно $x = \pm a\sqrt{2}$.

Ответ: 1) при $a < 0$ решений нет; 2) при $a = 0$ единственное решение $x = 0$;
3) при $a > 0$ четыре решения $x = \pm a, x = \pm a\sqrt{2}$.

Задача 6. Докажем, что ребра DA, DB, DC пирамиды $ABCD$ попарно перпендикулярны. Ребро $DB \perp AC$ по теореме о трех перпендикулярах), ребро $DB \perp DC$ (по условию). Тогда ребро DB перпендикулярно плоскости грани ADC, а значит и AD. Аналогично, ребро DC перпендикулярно плоскости грани ADB, а значит и AD. Мы доказали, что ребра DA, DB, DC попарно перпендикулярны. Следовательно, объем пирамиды равен одной шестой части объема прямоугольного параллелепипеда, построенного на ребрах DA, DB, DC: $V = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$.



Ответ: $V = 1$.

Вариант 2

1. На круговой дорожке в точках A_1, A_2, A_3 (нумерация по часовой стрелке) расположены приборы для измерения скорости бегунов так, что отношения длин дуг $A_1A_2 : A_2A_3 : A_3A_1 = 2:3:4$. Скорость бега $v_k, k = 1,2,3$ (м/мин) отображается на «умные часы» участников забега от ближайшего к ним прибора, в зоне действия которого они постоянные, но могут меняться при смене зон. Во время забега Пети оказалось, что отношение скоростей $v_1 : v_2 : v_3 = 3:4:4$. За сколько минут Петя преодолел полный круг, если он бежал по часовой стрелке и дистанцию от A_1 до A_2 преодолел за 14 мин?

Ответ: $t_1 + t_2 + t_3 = 60$ минут.

2. Среди решений уравнения

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+4\cos x\cos 2x\cos 3x=0,5+2(\cos x\cos 2x+\cos 2x\cos 3x+\cos 3x\cos x)$$

выбрать такое, для которого величина $y=(x+\pi)^2+(x-3\pi)^2$ принимает минимальное возможное значение.

Ответ: $x_1=\frac{5\pi}{6}, x_2=\frac{7\pi}{6}$.

3. На бильярдном столе из одинаковых шаров выложен правильный тетраэдр. Расположение шаров плотное: ни один дополнительный шар не может быть помещен внутрь тетраэдра и любая пара соседних шаров в тетраэдре касаются друг друга. В основание тетраэдра уложено 28 шаров. Из скольких шаров выложен весь тетраэдр?

Ответ: $N=84$.

4. Найти многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, для которого $P(3)=34$, а $P(34)=39373$.

Ответ: $P(x)=x^3+2x+1$.

5. Для каждого a решить уравнение $\sqrt[3]{x^3-a^3}+\sqrt[3]{2a^3-x^3}=a$.

Ответ: 1) при $a\neq 0$ два решения $x=a,\ x=a\sqrt[3]{2}$; 2) при $a=0$ x – любое.

6. Точка H – ортоцентр треугольника ABC (точка пересечения высот). DH – высота пирамиды $ABCD$. Длины ее боковых ребер DA, DB, DC равны $2,3,4$ соответственно. Ребра DB и DC перпендикулярны. Найти объем пирамиды.

Ответ: $V=4$.

Вариант 3

1. На круговой дорожке в точках A_1, A_2, A_3 (нумерация по часовой стрелке) расположены приборы для измерения скорости бегунов так, что отношения длин дуг $A_1A_2 : A_2A_3 : A_3A_1 = 1:3:3$. Скорость бега $v_k, k=1,2,3$ (м/мин) отображается на «умные часы» участников забега от ближайшего к ним прибора, в зоне действия которого они постоянные, но могут меняться при смене зон. Во время забега Пети оказалось, что отношение скоростей $v_1:v_2:v_3=2:3:5$. За сколько минут Петя преодолел полный круг, если он бежал по часовой стрелке и дистанцию от A_1 до A_2 преодолел за 25 мин?

Ответ: $t_1+t_2+t_3=136$ минут.

2. Среди решений уравнения

$$\sin x+\cos x+\cos 2x+4\sin x\cos x\cos 2x=0,5+2(\sin x\cos x+\cos x\cos 2x+\cos 2x\sin x)$$

выбрать такое, для которого величина $y=(x+2\pi)^2+(x-3\pi)^2$ принимает минимальное возможное значение.

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}$.

3. На бильярдном столе из одинаковых шаров выложен правильный тетраэдр. Расположение шаров плотное: ни один дополнительный шар не может быть помещен внутрь тетраэдра и любая пара соседних шаров в тетраэдре касаются друг друга. В основание тетраэдра уложено 45 шаров. Из скольких шаров выложен весь тетраэдр?

Ответ: $N=165$.

4. Найти многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, для которого $P(2)=20$, а $P(20)=8462$.

Ответ: $P(x)=x^3+x^2+3x+2$.

5. Для каждого a решить уравнение $\sqrt[4]{x^4-a^4}+\sqrt[4]{2a^4-x^4}=a$.

Ответ: 1) при $a<0$ решений нет; 2) при $a=0$ единственное решение $x=0$;

3) при $a>0$ четыре решения $x=\pm a,\ x=\pm a\sqrt[4]{2}$.

6. Точка H – ортоцентр треугольника ABC (точка пересечения высот). DH – высота пирамиды $ABCD$. Длины ее боковых ребер DA, DB, DC равны $3, 4, 5$ соответственно. Ребра DB и DC перпендикулярны. Найти объем пирамиды.

Ответ: $V=10$.

Вариант 4

1. На круговой дорожке в точках A_1, A_2, A_3 (нумерация по часовой стрелке) расположены приборы для измерения скорости бегунов так, что отношения длин дуг $A_1A_2 : A_2A_3 : A_3A_1 = 2:3:6$. Скорость бега $v_k,\ k=1,2,3$ (м/мин) отображается на «умные часы» участников забега от ближайшего к ним прибора, в зоне действия которого они постоянные, но могут меняться при смене зон. Во время забега Пети оказалось, что отношение скоростей $v_1:v_2:v_3=4:5:6$. За сколько минут Петя преодолел полный круг, если он бежал по часовой стрелке и дистанцию от A_1 до A_2 преодолел за 9 мин?

Ответ: $t_1+t_2+t_3=45$ минут.

2. Среди решений уравнения

$$\cos x+\sin 2x+\cos 2x+4\cos x\sin 2x\cos 2x=0,5+2(\cos x\sin 2x+\sin 2x\cos 2x+\cos 2x\cos x)$$

выбрать такое, для которого величина $y=(x-\pi/2)^2+(x-2\pi)^2$ принимает минимальное возможное значение.

Ответ: $x=\dfrac{7\pi}{6}$.

3. На бильярдном столе из одинаковых шаров выложен правильный тетраэдр. Расположение шаров плотное: ни один дополнительный шар не может быть помещен внутрь тетраэдра и любая пара соседних шаров в тетраэдре касаются друг друга. В основание тетраэдра уложено 45 шаров. Из скольких шаров выложен весь тетраэдр?

Ответ: $N=56$.

4. Найти многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, для которого $P(3)=43$, а $P(43)=81443$.

Ответ: $P(x)=x^3+x^2+2x+1$.

5. Для каждого a решить уравнение $\sqrt[5]{x^5-a^5}+\sqrt[5]{2a^5-x^5}=a$.

Ответ: 1) при $a\neq 0$ два решения $x=a,\ x=a\sqrt[5]{2}$; 2) при $a=0$ x – любое.

6. Точка H – ортоцентр треугольника ABC (точка пересечения высот). DH – высота пирамиды $ABCD$. Длины ее боковых ребер DA, DB, DC равны $4, 5, 6$ соответственно. Ребра DB и DC перпендикулярны. Найти объем пирамиды.

Ответ: $V=20$.

Росатом 11 класс (Отборочный тур), Выезды 17.11.2024

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б – чертеж и некоторые предположения, незначительное продвижение;

1 б – верный чертеж и одно верно составленное уравнение;

2 б – верный чертеж и два верно составленных уравнения (построена верная математическая модель), но решение не найдено или найдено с ошибкой;

3 б – Задача решена верно.

Задача 2:

0 б – попытки решения тригонометрического уравнения подбором;

1 б – разложил на множители и верно решил все простейшие тригонометрические уравнения

2 б – обосновал ограничения по поиску точек максимума в сериях, провел сравнения, но допустил небольшую финальную ошибку (нашел два наиболее близких к точке экстремума корня, но отобрал не тот или неверно вычислил экстремальное значение в правильной точке)

3 б - Задача решена верно.

Задача 3:

0 б – Несущественные продвижения в решении задачи (попытки подбором найти число шаров на стороне тетраэдра;

1 б – Верно нашел число шаров на стороне основания тетраэдра;

2 б – верно и обоснованно составил формулу общего числа шаров, но ошибся при подсчете суммы;

3 б – Задача решена верно.

Задача 4:

0 б – необоснованный перебор;

1 б – построена математическая модель (система уравнений) и обосновано ограничение степени многочлена

2 б – путем логических рассуждений произведен поиск коэффициентов (существенно используются ограничения), но допущена небольшая ошибка или имеется неполное обоснование ответа

3 б - Задача решена верно.

Задача 5:

0 б – рассмотрены частные случаи;

1 б – обосновано отсутствие решений при отрицательных значениях параметра, уравнение решено, но потеряно более одного корня или имеются посторонние;

2 б – обосновано, решено, посторонних корней нет, но потерян один корень;

3 б – Задача решена верно.

Задача 6:

0 б – Рисунок, незначительное продвижение

1 б – неполное обоснование формы тетраэдра или постоения и вычисления, не приведшие к правильной формуле

2 б – проведено полное обоснование и получена верная формула объема, но допущена арифметическая ошибка в вычислениях;

3 б - Задача решена верно.