46-й ТУРНИР ГОРОДОВ, ОСЕННИЙ ТУР

Решения сложного варианта

8 – 9 классы

1 (4 балла). *Барон Мюнхгаузен взял несколько карточек и написал на каждой по натуральному числу (числа могут повторяться). Барон утверждает, что использовал только две различные цифры, зато когда он для каждой пары карточек нашёл сумму чисел на них, то среди первых цифр этих сумм встретились все цифры от 1 до 9. Могут ли слова барона быть правдой?*

(Максим Дидин)

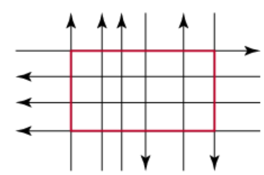
Ответ: могут. Годятся цифры 2 и 6. Напишем, например, числа 6, 22, 26, 26, 62, 66. Приведём для каждой цифры от 1 до 9 сумму с этой первой цифрой:

128=62+66; **2**8=22+6; **3**2=26+6; **4**8=22+26; **5**2=26+26; **6**8=62+6; **7**2=66+6; **8**8=62+26; **9**2=66+26.

Замечание. Можно доказать, что примеров с другими цифрами нет.

2 (6 баллов). *Петя и Вася по очереди проводят дороги на плоскости, начинает Петя. Дорога — это горизонтальная или вертикальная прямая, по которой можно двигаться только в одну сторону (выбранную при создании дороги). Всегда ли Вася может действовать так, чтобы после любого его хода можно было проехать по правилам от любого перекрёстка дорог до любого другого, как бы ни действовал Петя?*

(Александр Перепечко)



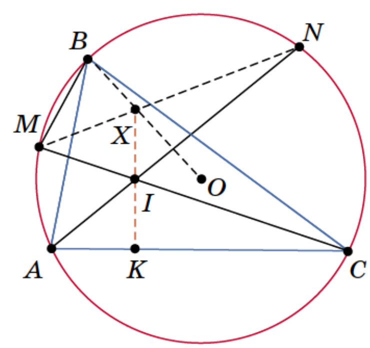
Ответ: всегда. Пусть, пока все дороги параллельны, Вася сохраняет это, следя за тем, чтобы крайние дороги были разных направлений. Когда Петя проведёт пересекающую их дорогу, Вася с одной из сторон от неё проводит дорогу противоположного направления так, чтобы возник *большой цикл* (цикл из четырёх крайних дорог, красный на рисунке).

Далее Вася следит только за крайними дорогами — если они по-прежнему образуют цикл, он проводит любую не крайнюю дорогу (и большой цикл сохраняется), а если Петя испортил большой цикл, проведя крайнюю дорогу, Вася восстанавливает его, проводя рядом с Петиной новую крайнюю дорогу нужного направления.

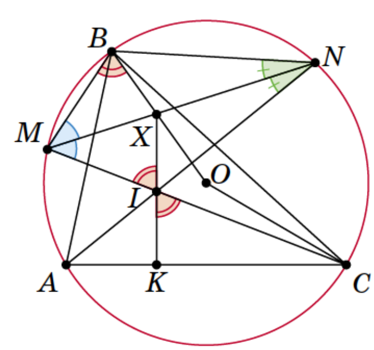
Докажем, что так Вася добьётся своей цели. Рассмотрим произвольные перекрёстки A и B. Выедем из A на большой цикл, по нему доедем до дороги, которая ведёт к перекрёстку B, и проедем в B.

3 (7 баллов). *В остроугольном треугольнике ABC отмечены точки I и O — центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Прямые AI и CI вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках N и M. Отрезки MN и BO пересекаются в точке X. Докажите, что прямые XI и AC перпендикулярны.*

(Фёдор Ивлев)



Заметим, что M и N – середины дуг AB и BC соответственно. Поэтому треугольники MBN и MIN равны по общей стороне и двум прилежащим углам. Значит, треугольники MBX и MIX равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда



$$\angle KIC = \angle MIX = \angle MBX = \angle MBA + \angle ABO =$$
$$= \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle 2C) = 90^\circ - \angle KCI,$$

то есть угол IKC прямой, что и требовалось.

Замечание. Равенство треугольников MBN и MIN следует также из леммы о трезубце.

4 (4 балла). *У 10 детей есть несколько мешков с конфетами. Дети начинают делить конфеты между собой. Каждый по очереди забирает из каждого мешка свою долю и уходит. Доля вычисляется так: делим текущее число конфет в каждом мешке на число оставшихся детей (включая себя), если нацело не поделилось — округляем до целого в меньшую сторону. Может ли всем достаться разное количество конфет,*

а) (5 баллов) *если мешков всего 8;*

б) (3 балла) *если мешков всего 9?*

(Алексей Глебов)

а) Ответ: нет. Если из одного мешка убрать 10 конфет, то каждый получит из этого мешка на одну конфету меньше, что не скажется на различии результатов. Поэтому можно считать, что в каждом мешке меньше 10 конфет.

Рассмотрим какой-либо мешок. Если в нём изначально было r конфет, то первые $10-r$ детей ничего не возьмут из этого мешка. После этого число детей станет равным r, и далее каждый ребёнок заберёт из мешка ровно по одной конфете. Значит, каждый ребёнок получит из каждого мешка не более одной конфеты, а всего — от 0 до 8 конфет. Но среди 10 чисел от 0 до 8 найдутся два одинаковых.

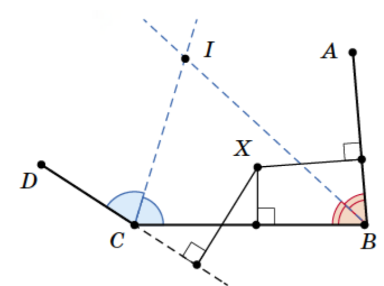
б) Ответ: да. Пусть число конфет в мешках равно соответственно 9, 8, $\ldots$, 1. Так как детей 10, первый ребёнок уйдёт, ничего не взяв ни из одного мешка. Останется 9 детей. Второй ребёнок заберёт только одну конфету из первого мешка. Останется 8 детей, а в мешках — 8, 8, 7, $\ldots$, 1 конфет. Третий ребёнок заберёт лишь по одной конфете из первых двух мешков. Останется 7 детей, а в мешках — 7, 7, 7, 6, $\ldots$, 1 конфет. И так далее: i-й ребёнок заберёт по одной конфете из первых $i-1$ мешков, где $i = 2, 3, \ldots, 10$. В частности, когда очередь дойдёт до 10-го ребёнка, в каждом мешке останется по одной конфете, и он заберёт их все. Итого, дети получат 0, 1, 2, $\ldots$, 9 конфет.

5 (8 баллов). *На каждой стороне выпуклого многоугольника построили треугольник, третья вершина которого — пересечение биссектрис двух углов многоугольника, примыкающих к этой стороне. Докажите, что вместе эти треугольники покрывают весь многоугольник.*

(Егор Бакаев)

Рассмотрим произвольную точку X внутри многоугольника и докажем, что она покрывается хотя бы одним треугольником.

Первый способ. Опустим из точки X перпендикуляры на все стороны (или их продолжения). Выберем сторону BC, для которой такой перпендикуляр самый короткий. Докажем, что треугольник BCI, построенный на этой стороне, содержит точку X.



Биссектриса состоит из точек угла, которые равноудалены от сторон угла, и делит угол на две части: в каждой из них до одной из сторон ближе, чем до другой. (Это верно для углов, меньших развёрнутого, а у выпуклого многоугольника все углы такие). Поэтому точка X лежит по ту же сторону от биссектрисы BI, что и сторона BC, и по ту же сторону от биссектрисы CI, что и сторона BC, а значит, лежит внутри треугольника BCI.

Второй способ. Предположим противное. Если точка X не покрыта ни одним треугольником, то можно немного сдвинуть её внутри многоугольника так, чтобы она по-прежнему не была покрыта, но вдобавок не лежала бы ни на одной из биссектрис (так как биссектрисы делят многоугольник на конечное число частей). Соединим тогда X со всеми вершинами нашего многоугольника. Каждый угол многоугольника разделится на две неравные части, одна из которых больше половины соответствующего угла, а другая — меньше. Рассмотрим все эти части углов, половина из них «меньшие» и половина «большие». Обойдём углы многоугольника по кругу. Если после меньшей части какого-то угла A идёт меньшая же часть следующего угла B, точка X попадёт внутрь треугольника со стороной AB — противоречие. Значит, за меньшей частью каждого угла следует большая часть следующего, а тогда меньшие и большие части строго чередуются (так как больших и меньших частей поровну). Но тогда расстояние от точки X до сторон многоугольника постоянно увеличивается при обходе по кругу. Сделав полный круг, получим противоречие (расстояние будет больше самого себя).

6 (10 баллов). *Назовём ходы коня, при которых он смещается на две клетки по горизонтали и на одну по вертикали,* горизонтальными, *а остальные —* вертикальными. *Требуется поставить коня на одну из клеток доски 46×46, после чего чередовать им горизонтальные и вертикальные ходы. Докажите, что если запрещено посещать клетки более одного раза, то будет сделано не более 2024 ходов.*

(Александр Грибалко)

Первое решение. Можно считать, что первый ход был горизонтальным (иначе повернём доску). Разделим доску на 23 вертикальные полосы ширины 2 клетки и раскрасим каждую в белый или чёрный цвет, чередуя цвета полос. Крайние полосы будут одного цвета, пусть чёрного. Тогда белых клеток будет всего $11 \cdot 2 \cdot 46 = 1012$. Заметим, что горизонтальный ход всегда меняет цвет клетки. Пусть всего ходов было хотя бы 2025. Тогда конь посетил 2026 клеток (включая начальную), которые разбиваются на 1013 пар соседних клеток, причём в каждой паре клетки соединены горизонтальным ходом, то есть разного цвета. Тогда белых клеток пройдено минимум 1013, что невозможно.

Второе решение. Пусть первый ход горизонтальный (иначе повернём доску). Покрасим каждую вертикаль в один из 4-х цветов в порядке 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, ..., 1, 2. За три первых хода конь посетит 4 различных цвета. Затем он сместится вертикальным ходом и снова посетит 4 различных цвета и т. д. Сделав 2023 хода, он посетит $44 \cdot 46 = 2024$ клетки, поровну всех цветов. Все непосещённые клетки — цвета 1 и 2. Следующий вертикальный ход ещё возможен, а 2025-й — горизонтальный — уже нет.

Третье решение. Сделаем шахматную раскраску доски, тогда каждым ходом конь меняет цвет. Можно считать, что из чёрных клеток делаются вертикальные ходы, а из белых — горизонтальные. Рассмотрим 4 множества: чёрные клетки 1-й, 5-й, ..., 45-й горизонталей; чёрные клетки 2-й, 6-й, ..., 46-й горизонталей; белые клетки 1-й, 5-й, ..., 45-й вертикалей; белые клетки 2-й, 6-й, ..., 46-й вертикалей. Каждое содержит $23 \cdot 12$ клеток, из которых конь может пойти в $23 \cdot 11$ клеток. Значит, найдутся $23 \cdot 4$ клетки, из которых хода не было. Тогда всего ходов было не более $46 \cdot 46 - 23 \cdot 4 = 2024$.

7 (10 балла). *Даны две строго возрастающие последовательности положительных чисел, в которых каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Известно, что каждая последовательность содержит хотя бы одно число, которого нет в другой последовательности. Какое наибольшее количество общих чисел может быть у этих последовательностей?*

(Борис Френкин)

Замечание к условию. Предполагается, что обе последовательности бесконечны, иначе совпадений, очевидно, может быть сколько угодно (можно взять первые n членов последовательности Фибоначчи 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... как первую последовательность, и члены со второго по $(n+1)$-й — как вторую).

Ответ: 2. Правило построения последовательностей назовём просто *правилом.* Пусть два совпадения в последовательностях нашлись, рассмотрим второе. Если предыдущие члены тоже равны, то по правилу одна из последовательностей содержится в другой (так как они бесконечны), что запрещено. Пусть они не равны. Будем считать, что последовательности начинаются с них, и докажем, что теперь совпадение ровно одно. Итак, первая последовательность — $a_1, a_2, \ldots$, вторая — $b_1, b_2, \ldots$, причём

$$a_1 < b_1 < a_2 = b_2 < a_3.$$

Складывая первое и третье сравнения, получаем, что $a_1 + a_2 < b_1 + b_2$, то есть, по правилу, $a_3 < b_3$. Складывая второе и четвёртое сравнения, получаем, что $b_1 + b_2 < a_2 + a_3$, то есть, по правилу, $b_3 < a_4$.

Действуя далее аналогично, получаем, что $a_n < b_n$ для каждого $n > 2$ и $b_n < a_{n+1}$ для всех натуральных n. Значит, далее совпадений не будет, поскольку последовательности идут так:

$$a_1 < b_1 < a_2 = b_2 < a_3 < b_3 < a_4 < b_4 < a_5 < \ldots$$

Пример. 1, 2, 3, 5, ... и 1, 3, 4, ...

Комментарии. 1. Рассматривать второе (а не первое) совпадающее число требуется лишь для того, чтобы в обеих последовательностях оно было не первым членом. Поэтому если первый член каждой последовательности не содержится в другой, то у последовательностей не более одного общего числа.

2. Если последовательности не обязательно строго возрастают, совпадений может быть три: например, для последовательностей 1, 2, 3, 5, 8, ... и 2, 1, 3, 4, 7, ...

Сложный вариант, 10 – 11 классы

1 (4 балла). *Петя записал на доске натуральное число. Каждую минуту Вася умножает последнее записанное на доску число на 2 или на 3 и записывает результат на доске. Может ли Петя выбрать начальное число так, чтобы в любой момент среди всех записанных на доске чисел количество начинающихся на 1 или 2 было больше, чем количество начинающихся на 7, 8 или 9, как бы ни действовал Вася?*

(Максим Дидин)

Ответ: может. Назовём числа, начинающиеся на 1 или 2, *мелкими*, а начинающиеся на 7, 8 или 9, — *крупными*. Заметим, что сразу после каждого крупного числа на доске появится мелкое. В самом деле, если в крупном числе A всего k разрядов, то $7 \cdot 10^{k-1} \leqslant A < 10^k$, откуда $1,4 \cdot 10^k \leqslant 2A < 3A < 3 \cdot 10^k$, то есть, после A появится число, в котором k разрядов, а первая цифра — 1 или 2. Поэтому, если второе мелкое число появится на доске раньше первого крупного, то крупных чисел всегда будет меньше.

Петя может начать, например, с мелкого числа 112. Чтобы помешать Пете, Вася вынужден умножить его на 3 (получится 336), потом на 2 (672). Умножение 672 как на 2, так и на 3 даст мелкое число. Есть много других примеров: скажем, он может начать с числа 17.

2 (6 баллов). *Клетчатую доску* 20×20 *разбили на двухклеточные доминошки. Докажите, что некоторая прямая содержит центры хотя бы десяти из этих доминошек.*

(Александр Юран)

Рассмотрим 20 клеток, «нанизанных» на главную диагональ. Они принадлежат 20 разным доминошкам. Центры этих доминошек лежат на двух прямых, параллельных главной диагонали, поэтому на одной из этих прямых таких центров не меньше 10.

Комментарий. На самом деле, на каждой из этих двух прямых лежит ровно по 10 центров. Это следует из того, что ровно 10 доминошек, «нанизанных» на диагональ, смотрят в одну из половин доски, а оставшиеся 10 — в другую. (Проверьте, раскрасив доску в шахматном порядке и подсчитав количество клеток каждого цвета в каждой из половин.)

3 (7 баллов). *Известно, что каждый прямоугольный параллелепипед обладает свойством: квадрат его объёма равен произведению площадей трёх его граней, имеющих общую вершину. А существует ли параллелепипед, который обладает этим же свойством, но не является прямоугольным?*

(Александр Буфетов)

Ответ: нет. **Первый способ.** Расположим исходный непрямоугольный параллелепипед так, чтобы две противоположные непрямоугольные грани были горизонтальны. Пусть для него квадрат объёма равен произведению площадей трёх граней. Передвинем верхнюю грань так, чтобы она осталась на той же высоте над нижней гранью, но чтобы теперь боковые рёбра были перпендикулярны нижней грани. Объём параллелепипеда не поменяется, а площади боковых граней разве что уменьшатся (высоты параллелограммов станут минимальными возможными), поэтому для нового параллелепипеда квадрат объёма будет больше или равен произведению площадей граней. С другой стороны, теперь (если не учитывать один и тот же множитель — квадрат произведения трёх рёбер, выходящих из одной вершины) квадрат объёма равен по сути квадрату синуса угла в верхней грани, а произведение площадей граней равно по сути синусу угла верхней грани, то есть квадрат объёма меньше произведения площадей граней — противоречие.

Второй способ. Пусть такой параллелепипед существует. Если увеличить одно из его рёбер в k раз, то как произведение площадей трёх граней, так и квадрат объёма увеличатся в k^2 раз. Поэтому можно считать, что все рёбра равны 1, то есть все грани — ромбы. Если одна из граней — не квадрат, то её площадь $S < 1$. Площади двух остальных граней равны их высотам H_2 и H_3, а объём равен Sh, где h — высота, опущенная на первую грань. Тогда $SH_2H_3 = (Sh)^2$, то есть $H_2H_3 < h^2$. Но $h \leq H_2$ (по теореме о трёх перпендикулярах H_2 — гипотенуза, а h — катет прямоугольного треугольника, возможно, вырожденного). Аналогично $h \leq H_3$. Противоречие.

Вариация. Пусть a, b, c — стороны параллелепипеда, h — его высота, опущенная на грань со сторонами a и b. Тогда $V^2 = S_{ab}S_{bc}S_{ca} \geq S_{ab} \cdot b \cdot h \cdot a \cdot h \geq S_{ab}S_{ab}h^2 = V^2$. Из равенства следует, что $a \perp b$. Аналогично, $b \perp c$ и $c \perp a$.

4 (8 баллов). *Существует ли такая бесконечная последовательность действительных чисел a_1, a_2, a_3, ..., что $a_1 = 1$ и для всех натуральных k выполняется равенство*

$$a_k = a_{2k} + a_{3k} + a_{4k} + \ldots?$$

(Илья Лобацкий)

Ответ: существует.

Решение 1. Подходит последовательность, где $a_k = 1/k$, если k степень двойки, и $a_k = 0$ иначе.

Решение 2 (для знатоков). Положим $a_k = \frac{1}{k^s}$. Найдётся такое s, что

$$\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots = 1,$$

так как дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots$$

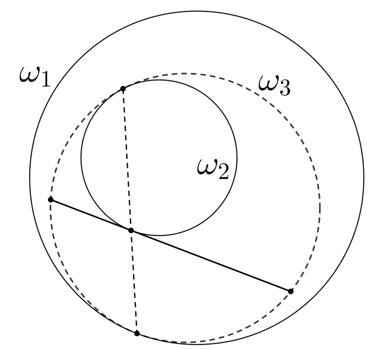
непрерывна при $s > 1$, причём $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < 2$ и $\zeta(s) \to +\infty$ при $s \to 1$. Тогда

$$a_{2k} + a_{3k} + a_{4k} + \ldots = \frac{1}{(2k)^s} + \frac{1}{(3k)^s} + \frac{1}{(4k)^s} + \ldots = \frac{1}{k^s}\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots\right) = \frac{1}{k^s} \cdot 1 = a_k.$$

Примечание. Подойдёт любая последовательность a_1, a_2, ... с первым членом 1 и общей суммой 2, которая *мультипликативна* — для любых натуральных m и n выполнено $a_{m \cdot n} = a_m \cdot a_n$.

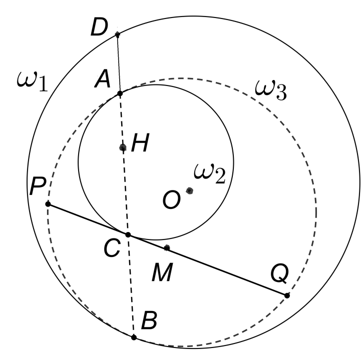
5 (10 баллов). *Дана окружность ω_1, а внутри неё — окружность ω_2. Выбирают произвольную окружность ω_3, которая касается двух предыдущих, причём оба касания внутренние. Точки касания соединяют отрезком, а через точку пересечения этого отрезка с окружностью ω_2 проводят касательную к ω_2 и получают хорду окружности ω_3. Докажите, что концы всех таких хорд (полученных при всевозможных выборах окружности ω_3) лежат на фиксированной окружности.*

(Павел Кожевников)



Пусть A и B — точки касания окружности ω_3 с окружностями ω_2 и ω_1 соответственно, C — точка пересечения отрезка AB с окружностью ω_2, и PQ — хорда окружности ω_3, касающаяся ω_2 в точке C.

Для каждой пары из окружностей ω_1, ω_2, ω_3 рассмотрим центр гомотетии, переводящий одну окружность в другую. По теореме о трех гомотетиях, эти три точки лежат на одной прямой. Поскольку центр гомотетии, переводящей касающиеся окружности одна в другую, совпадает с их точкой касания, получаем, что отрезок AB проходит через центр H гомотетии, переводящей ω_1 в ω_2. Тогда хорда PQ параллельна проходящей через точку B касательной к ω_1, и серединный перпендикуляр к хорде PQ проходит через центр O окружности ω_1. Пусть M — середина хорды PQ. Не теряя общности, M лежит на отрезке CQ. Тогда



$$OP^2 = (OC^2 - CM^2) + MP^2 = OC^2 + (MP - CM)(MP + CM) = OC^2 + PC \cdot CQ = OC^2 + AC \cdot BC.$$

Докажем, что эта величина не зависит от выбора окружности ω_3, то есть концы всех хорд PQ равноудалены от O. Для этого продлим CA до пересечения с ω_1 в точке D. Пусть R и r — радиусы окружностей ω_1 и ω_2 соответственно. Тогда

$$AC \cdot BC = (CD - AD) \cdot BC = CD \cdot BC - AD \cdot BC.$$

Заметим, что $CD \cdot BC = R^2 - OC^2$ — степень точки C относительно окружности ω_1. Поэтому $OP^2 = R^2 - AD \cdot BC$. Осталось доказать, что величина $AD \cdot BC$ не зависит от выбора ω_3.

Так как H — центр гомотетии, переводящий ω_1 в ω_2, то

$$\frac{R}{r} = \frac{HD}{HA} = 1 + \frac{AD}{HA}, \quad \text{откуда} \quad AD = HA \cdot \left(\frac{R}{r} - 1\right); \quad \text{аналогично,} \quad BC = HC \cdot \left(\frac{R}{r} - 1\right).$$

Тогда

$$AD \cdot BC = \left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 \cdot HA \cdot HC = \left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 \cdot s,$$

где s — степень точки H относительно окружности ω_2, то есть, величина, не зависящая от выбора ω_3.

6 (12 баллов. *Замок Мерлина состоит из 100 комнат и 1000 коридоров. Каждый коридор соединяет какие-то две комнаты, каждые две комнаты соединены не более чем одним коридором. Мерлин выдал мудрецам план замка и объявил испытание. Мудрецы должны будут распределиться по комнатам, как хотят. Далее каждую минуту Мерлин указывает коридор, и один из мудрецов переходит по нему из комнаты на любом его конце в комнату на другом его конце. Мерлин победит, если когда-то укажет коридор, на концах которого нет мудрецов.*
Число m назовём волшебным числом замка, если m мудрецов могут, сговорившись перед испытанием, действовать так, чтобы никогда не проиграть, причём m — минимальное такое число. Чему может равняться волшебное число замка? (Все, включая Мерлина, всегда знают расположение всех мудрецов.)

(Тимофей Васильев)

Ответ: $m = 1000$. Сначала докажем, что 1000 мудрецов всегда смогут выдержать испытание, независимо от того, как располагаются комнаты и коридоры в замке. Для этого мудрецы договариваются о следующем: каждый коридор закрепляется за каким-то конкретным мудрецом, который всегда находится в одной из комнат на концах этого коридора и переходит по нему, когда на этот коридор указывает Мерлин. Отсюда следует, что $m \leq 1000$. Докажем, что $m \geq 1000$.

Первый способ. Покажем, что при 999 мудрецах у Мерлина есть план победы.

Для удобства предположим, что если мудрец выходит из комнаты, то он – самый младший из тех, кто в ней находился (в действительности совершенно неважно, кто из мудрецов где, важно только их количество в каждой из комнат).

Докажем, что если мудрецов в замке меньше, чем коридоров, то Мерлин может выбирать коридоры так, чтобы через несколько ходов вне зависимости от действий мудрецов образовался пустой коридор (обе комнаты на его концах пустые).

Индукция по числу мудрецов. База индукции очевидна: если коридоры есть, а мудрецов нет, то есть пустой коридор.

Переход индукции. Сначала покажем, что Мерлин может получить одну пустую комнату, из которой ведёт хотя бы один коридор. Возьмём самого старшего мудреца M. Если в результате команд Мерлина мудрец M покидает свою комнату, то эта комната становится пустой и будет искомой. Поэтому мы можем считать, что M всегда остаётся на своём месте вне зависимости от действий Мерлина. Наденем на M мантию-невидимку, по предположению индукции, Мерлин может получить две соседние комнаты, в которых никого нет (кроме, возможно, M). Таким образом, получена пустая комната, из которой ведёт хотя бы один коридор.

Пусть есть пустая комната v. Пусть из неё выходят коридоры $e_1, \ldots, e_k$ и ведут в комнаты $v_1, \ldots, v_k$. Назовём эти k комнат *уютными*, а эти k коридоров *опасными*. Если среди уютных комнат есть пустая, то Мерлин уже победил. Иначе выберем в этих комнатах по мудрецу (мудрец M_i находится в комнате v_i), назовём их *важными*. Не теряя общности, мы можем считать, что k самых пожилых мудрецов – это важные мудрецы.

Запретим Мерлину выбирать опасные коридоры и наденем на важных мудрецов по мантии-невидимке (то есть, мысленно удалим из замка k важных мудрецов и k коридоров вместе с вершиной v). По предположению индукции, у видимых мудрецов нет стратегии защиты от Мерлина. Это значит, что Мерлин может выбирать коридоры таким образом, что в исходном замке в какой-то момент или образуется пустой коридор, или один из важных мудрецов M_i должен будет выйти из своей комнаты v_i. В последнем случае в этот момент Мерлин получит две соседние пустые комнаты (v_i, v).

Второй способ. Занумеруем все комнаты от 1 до n в любом порядке. Пусть A_i — число мудрецов в комнате i, а k_i — число коридоров, ведущих из неё в комнаты с меньшими номерами.

Если $A_i < k_i$ для какой-то комнаты i, то Мерлин указывает эти k_i коридоров в порядке убывания номеров их концов до момента, когда случится переход мудреца в комнату i из некоторой комнаты j (где $j < i$). Получится расположение мудрецов $B = (B_1, \ldots, B_n)$, *лексикографически меньшее* расположения A, то есть $B_1 = A_1, \ldots, B_{j-1} = A_{j-1}$, но $B_j < A_j$.

Затем Мерлин ищет в расположении B неравенство $B_l < k_l$, аналогично получает меньшее расположение и так далее. Число расположений конечно. Значит, если мудрецы не проиграют в этом процессе, то когда-то получится расположение M, в котором $M_i \geq k_i$ для всех i. Тогда

$$m \geq M_1 + \ldots + M_n \geq k_1 + \ldots + k_n = 1000,$$

то есть $m \geq 1000$.

7 (14 баллов). *На стол положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму единичного круга. Всегда ли можно вбить в стол несколько точечных гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причём одинаковым количеством гвоздей? (Вбивать гвозди на границы кругов запрещено.)*

(Владимир Дольников, Павел Кожевников)

Ответ: всегда.

Для удобства выберем единицу измерения так, чтобы площадь каждой салфетки равнялась 1. Рассмотрим часть плоскости, покрытую салфетками. Границы салфеток делят её на несколько (пусть k) областей. Занумеруем эти области числами от 1 до k и введём переменные $x_1, \ldots, x_k$ — искомые количества гвоздей, которые мы в итоге вобьём в соответствующие области.

Если можно было бы вбивать нецелое число гвоздей, достаточно было бы в каждую область вбить число гвоздей, равное её площади! Тогда каждая салфетка была бы прибита одним гвоздём. Если все эти площади рациональные, можно домножить их на общий знаменатель и получить одно и то же целое число гвоздей в каждом круге. Но что делать, если какие-то части имеют иррациональные площади? Далее можно пойти двумя путями.

Первое решение. Составим систему: для каждой салфетки просуммируем переменные, соответствующие областям, на которые разбита салфетка, и приравняем к 1. Получится система линейных уравнений с рациональными коэффициентами от переменных $x_1, \ldots, x_k$. Хоть какое-то решение у этой системы существует (например, каждую переменную можно взять равной площади соответствующей части). Докажем, что у системы есть решение в положительных рациональных числах (тогда, домножив числа на общий знаменатель, получим решение исходной задачи).

Будем решать систему методом Гаусса: выразим одну переменную из первого уравнения и подставим в остальные, затем из второго уравнения выразим следующую переменную и подставим в уравнения с 3-го по последнее, и так далее. Так дойдём до конца и получим систему, равносильную исходной.

Возможно, в каких-то уравнениях после подстановки всё сократится, и они примут вид $0 = 0$ — не страшно. Последнее из уравнений, в котором не всё сократится, будет тогда иметь вид

$$x_i = r_i + r_j x_j + \ldots + r_n x_n,$$

где $r_j, \ldots, r_n$ — какие-то коэффициенты, которые, конечно же будут, рациональными!

Это значит, что переменным $x_j, \ldots, x_n$ мы можем придать любые значения — такие переменные называются «свободными». По их значениям мы однозначно найдём значение x_i. Подставив уже найденные значения в предыдущее уравнение, найдём значение очередной переменной, и так далее. Встречающиеся по дороге свободные переменные можно заменять любыми числами.

В итоге все переменные выразятся через рациональные константы и конечный набор так называемых «свободных» переменных, которым мы можем придавать любые значения, и по этим значениям однозначно получать какое-то решение системы.

Поэтому, если свободных переменных нет, то решение у системы единственное и тогда оно состоит из рациональных чисел!

Пусть свободные переменные есть. Мы можем придать каждой такой переменной x_j рациональное значение, сколь угодно близкое к площади j-й области. Ясно, что можно взять настолько близкие к площадям положительные рациональные значения, чтобы остальные, «несвободные» переменные также получились положительными (ведь каждая несвободная переменная x_i есть конечная линейная комбинация не более чем из k слагаемых с фиксированными коэффициентами, и подставляя в эту комбинацию числа, очень близкие к исходным площадям, мы получим число, близкое к соответствующей площади, которая изначально положительна). В итоге получим искомое рациональное решение.

Второе решение. Пусть $s_1, \ldots, s_k$ — площади соответствующих областей, на которые разбиты салфетки. Воспользуемся такой леммой (её доказательство можно прочитать, например, в статье С. Дориченко «О коровах, линейной алгебре и многомерных пространствах», «Квант» №5, 2012):

Пусть даны произвольные действительные числа $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Тогда, какое бы положительное число ε мы ни взяли, найдется такое натуральное число M, что каждое из чисел $s_1M, \ldots, s_kM$ будет отличаться от ближайшего к нему целого числа не больше, чем на ε.

Выберем ε равным $\frac{1}{2k}$ и найдём нужное M. Тогда каждое из чисел s_iM равно $N_i + \delta_i$, где N_i натуральное, а $|\delta_i| \leqslant \frac{1}{2k}$.

Если теперь для каждой салфетки сложить домноженные на M площади областей, на которые салфетка разбита, мы получим, с одной стороны, просто M (так как вся площадь салфетки тоже домножилась на M), а с другой стороны мы получим сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых натуральное с точностью до $\frac{1}{2k}$. Нецелые добавки суммарно составляют тогда не более $\frac{1}{2}$, и значит, взаимно уничтожаются, чтобы в итоге получилось целое число. Тогда если мы эти добавки отбросим, то для каждой салфетки сумма соответствующих натуральных чисел N_i по-прежнему будет равна M — одному и тому же числу! Поэтому выбрав для каждой части число гвоздей, равное соответствующему числу N_i, мы получим, что каждая салфетка будет прибита M гвоздями.

Комментарий. Как видно из решение, утверждение задачи верно для любого конечного числа салфеток одинаковой площади (при этом салфетки могут иметь разную форму).

Если же попробовать усилить задачу в другом направлении — потребовать, чтобы в каждую салфетку-единичный круг был вбит ровно один гвоздь, утверждение перестанет быть верным — см. задачу M1390 из Задачника «Кванта» №2 за 1993 г.