СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 20 октября 2024 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 — 1. Барон Мюнхгаузен взял несколько карточек и написал на каждой по натуральному числу (числа могут повторяться). Барон утверждает, что использовал только две различные цифры, зато когда он для каждой пары карточек нашёл сумму чисел на них, то среди первых цифр этих сумм встретились все цифры от 1 до 9. Могут ли слова барона быть правдой?

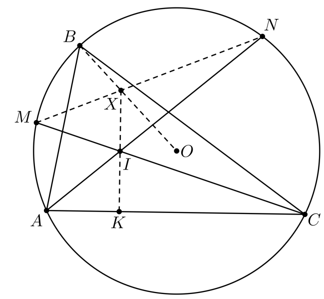
Максим Дидин

6 — 2. Петя и Вася по очереди проводят дороги на плоскости, начинает Петя. Дорога — это горизонтальная или вертикальная прямая, по которой можно двигаться только в одну сторону (выбранную при создании дороги). Всегда ли Вася может действовать так, чтобы после любого его хода можно было проехать по правилам от любого перекрёстка дорог до любого другого, как бы ни действовал Петя?

Александр Перепечко

7 — 3. В остроугольном треугольнике ABC отмечены точки I и O — центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Прямые AI и CI вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках N и M. Отрезки MN и BO пересекаются в точке X. Докажите, что прямые XI и AC перпендикулярны.

Фёдор Ивлев



4. У 10 детей есть несколько мешков с конфетами. Дети начинают делить конфеты между собой. Каждый по очереди забирает из каждого мешка свою долю и уходит. Доля вычисляется так: делим текущее число конфет в каждом мешке на число оставшихся детей (включая себя), если нацело не поделилось — округляем до целого в меньшую сторону. Может ли всем достаться разное количество конфет,

5 — а) если мешков всего 8;

3 — б) если мешков всего 9?

Алексей Глебов

8 — 5. На каждой стороне выпуклого многоугольника построили треугольник, третья вершина которого — пересечение биссектрис двух углов многоугольника, примыкающих к этой стороне. Докажите, что вместе эти треугольники покрывают весь многоугольник.

Егор Бакаев

10 — 6. Назовём ходы коня, при которых он смещается на две клетки по горизонтали и на одну по вертикали, *горизонтальными*, а остальные — *вертикальными*. Требуется поставить коня на одну из клеток доски 46×46, после чего чередовать им горизонтальные и вертикальные ходы. Докажите, что если запрещено посещать клетки более одного раза, то будет сделано не более 2024 ходов.

Александр Грибалко

10 — 7. Даны две строго возрастающие последовательности положительных чисел, в которых каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Известно, что каждая последовательность содержит хотя бы одно число, которого нет в другой последовательности. Какое наибольшее количество общих чисел может быть у этих последовательностей?

Борис Френкин

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 20 октября 2024 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4 1. Петя записал на доске натуральное число. Каждую минуту Вася умножает последнее записанное на доску число на 2 или на 3 и записывает результат на доске. Может ли Петя выбрать начальное число так, чтобы в любой момент среди всех записанных на доске чисел количество начинающихся на 1 или 2 было больше, чем количество начинающихся на 7, 8 или 9, как бы ни действовал Вася?

Максим Дидин

6 2. Клетчатую доску 20×20 разбили на двухклеточные доминошки. Докажите, что некоторая прямая содержит центры хотя бы десяти из этих доминошек.

Александр Юран

7 3. Известно, что каждый прямоугольный параллелепипед обладает свойством: квадрат его объёма равен произведению площадей трёх его граней, имеющих общую вершину. А существует ли параллелепипед, который обладает этим же свойством, но не является прямоугольным?

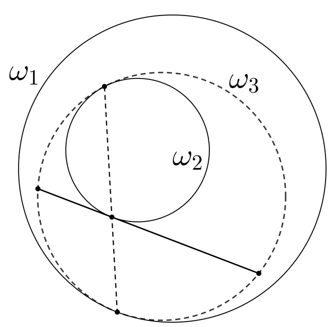
Александр Буфетов

8 4. Существует ли такая бесконечная последовательность действительных чисел a_1, a_2, a_3, $\ldots$, что $a_1 = 1$ и для всех натуральных k выполняется равенство

$$a_k = a_{2k} + a_{3k} + a_{4k} + \ldots?$$

Илья Лобацкий

10 5. Дана окружность ω_1, а внутри неё — окружность ω_2. Выбирают произвольную окружность ω_3, которая касается двух предыдущих, причём оба касания внутренние. Точки касания соединяют отрезком, а через точку пересечения этого отрезка с окружностью ω_2 проводят касательную к ω_2 и получают хорду окружности ω_3. Докажите, что концы всех таких хорд (полученных при всевозможных выборах окружности ω_3) лежат на фиксированной окружности.



Павел Кожевников

12 6. Замок Мерлина состоит из 100 комнат и 1000 коридоров. Каждый коридор соединяет какие-то две комнаты, каждые две комнаты соединены не более чем одним коридором. Мерлин выдал мудрецам план замка и объявил испытание. Мудрецы должны будут распределиться по комнатам, как хотят. Далее каждую минуту Мерлин указывает коридор, и один из мудрецов переходит по нему из комнаты на любом его конце в комнату на другом его конце. Мерлин победит, если когда-то укажет коридор, на концах которого нет мудрецов.

Число m назовём *волшебным числом замка*, если m мудрецов могут, сговорившись перед испытанием, действовать так, чтобы никогда не проиграть, причём m — минимальное такое число. Чему может равняться волшебное число замка? (Все, включая Мерлина, всегда знают расположение всех мудрецов.)

Тимофей Васильев

14 7. На стол положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму единичного круга. Всегда ли можно вбить в стол несколько точечных гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причём одинаковым количеством гвоздей? (Вбивать гвозди на границы кругов запрещено.)

Владимир Дольников, Павел Кожевников