46-й Международный математический Турнир городов
2024/25 учебный год, осенний тур, базовый вариант

Решения задач

Младшие классы

1. [4] *Дан описанный пятиугольник ABCDE. Центр его вписанной окружности лежит на диагонали AC. Докажите, что* $AB + BC > CD + DE + EA$.

Егор Бакаев

Решение. При симметрии относительно диаметра AC касательные AB и CB перейдут в касательные AE и CD соответственно, поэтому лучи AE и CD пересекутся в точке B', симметричной точке B. Так как $AB + BC = AB' + B'C$, требуемое неравенство примет вид $AB' + B'C > CD + DE + EA \Leftrightarrow AE + EB' + B'D + DC > CD + DE + EA \Leftrightarrow EB' + B'D > DE$, что верно по неравенству треугольника.

2. [4] *В ряд лежат 100 камней: чёрный, белый, чёрный, белый, ..., чёрный, белый. Одной операцией либо выбирают два чёрных камня, между которыми лежат только белые камни, и перекрашивают все эти белые камни в чёрный цвет, либо выбирают два белых камня, между которыми лежат только чёрные камни, и перекрашивают все эти чёрные камни в белый цвет. Можно ли за несколько таких операций получить ряд, в котором идут сначала 50 чёрных камней, а потом 50 белых?*

Егор Бакаев

Ответ. Нельзя. Назовём *кластером* максимальную группу подряд лежащих камней одного цвета.

Решение 1. В начале все кластеры нечётны: имеют длину 1. Заметим, что если в какой-то момент все кластеры нечётны, то после применения операции все будут нечётны: три нечётных кластера «склеиваются» в один. Поэтому никогда не появятся два чётных кластера.

Решение 2. Заметим, что 50-й камень – белый, а 51-й – чёрный. Оба их надо перекрасить. Один из этих двух камней перекрасится первым, после чего они станут одноцветными и далее уже всегда будут одноцветными (так как каждой операцией перекрашивается какой-то кластер целиком). Значит, сделать их чёрным и белым, как требуется, мы не сможем.

3. [4] *Натуральное число M представили в виде произведения простых сомножителей. Затем каждый из них увеличили на 1, и произведение стало равно N. Оказалось, что N кратно M. Докажите, что если теперь разложить N на простые множители и каждый из них увеличить на 1, то полученное произведение будет делиться на N.*

Александр Грибалко

Решение 1. Если N делится на M, то разложение M на простые множители является частью разложения N на простые множители. После того, как мы увеличим на 1 каждый сомножитель из разложения N, все входящие в него простые множители числа M увеличатся на 1 и дадут в произведении число N.

Решение 2. Пусть $M = p_1 \ldots p_k$, где $p_1 \le \ldots \le p_k$. Тогда $N = (p_1 + 1)\ldots(p_k + 1)$. Одна из скобок, скажем, $p_i + 1$, должна делиться на p_k, и так как $p_i \le p_k$, это возможно лишь в случае $p_i + 1 = p_k$, откуда $p_i = 2$, $p_k = 3$. Итак, $M = 2^l 3^m$, $N = 3^l 4^m = 2^{2m} 3^l$, причём $m \le l \le 2m$. Значит, новое число равно $3^{2m} 4^l$ и делится на $N = 3^l 4^m$. (Интересно, что новое (третье) число – квадрат первого.)

4. [5] *Мама и сын играют. Сначала сын режет головку сыра 300 г на 4 куска. Затем мама распределяет 280 г масла на 2 тарелки. Наконец, сын раскладывает куски сыра на те же тарелки. Он выиграет, если на каждой тарелке сыра будет не меньше, чем масла (иначе выиграет мама). Кто из них может победить, как бы ни действовал другой?*

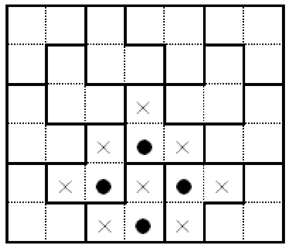
Александр Шаповалов

Ответ: сын. **Решение**. Уменьшим всё в 20 раз: у сына станет 15 г сыра, у матери 14 г масла. Сын делит сыр на куски в 1, 2, 4 и 8 г. Пусть на одной тарелке не больше k г, но больше $k - 1$ г масла, где k – целое число. Тогда на второй тарелке масла меньше $15 - k$ г. Сын кладёт на первую тарелку k г (как известно, из чисел 1, 2, 4, 8 можно составить любую целую сумму от 1 до 15), а на вторую $15 - k$ г.

5. [5] *Набор состоит из одинаковых трёхклеточных уголков, у которых центральные клетки испачканы краской. Прямоугольную доску покрыли в один слой уголками, не выходящими за пределы доски, а затем убрали уголки. Испачканные клетки оставили на доске следы. Всегда ли по этим следам можно узнать, как именно лежали уголки?*

Александр Грибалко

Ответ: не всегда. **Решение**. На рисунке представлено разбиение прямоугольника 6×7 на уголки. Отразим фигуру из четырёх отмеченных уголков относительно её вертикальной оси симметрии. Фигура перейдёт в себя, следы – в следы, а разбиение поменяется.



Старшие классы

1. [3] *В ряд лежат 100 камней: чёрный, белый, чёрный, белый, ..., чёрный, белый. Одной операцией либо выбирают два чёрных камня, между которыми лежат только белые камни, и перекрашивают все эти белые камни в чёрный цвет, либо выбирают два белых камня, между которыми лежат только чёрные камни, и перекрашивают все эти чёрные камни в белый цвет. Можно ли за несколько таких операций получить ряд, в котором идут сначала 50 чёрных камней, а потом 50 белых?*

Егор Бакаев

Ответ. Нельзя. Назовём *кластером* максимальную группу подряд лежащих камней одного цвета.

Решение 1. В начале все кластеры нечётны: имеют длину 1. Заметим, что если в какой-то момент все кластеры нечётны, то после применения операции все будут нечётны: три нечётных кластера «склеиваются» в один. Поэтому никогда не появятся два чётных кластера.

Решение 2. Заметим, что 50-й камень – белый, а 51-й – чёрный. Оба их надо перекрасить. Один из этих двух камней перекрасится первым, после чего они станут одноцветными и далее уже всегда будут одноцветными (так как каждой операцией полностью перекрашивается какой-то кластер). Значит, сделать их чёрным и белым, как требуется, мы не сможем.

2. [4] *У двух многочленов с вещественными коэффициентами старшие коэффициенты равны* 1. *У каждого многочлена степень нечётна и равна числу его различных вещественных корней. Произведение значений первого многочлена в корнях второго равно 2024. Найдите произведение значений второго многочлена в корнях первого.*

Сергей Янжинов

Ответ: – 2024.

Решение. Пусть $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m)$, $Q(x) = (x - b_1)(x - b_2)\ldots(x - b_n)$. По условию $\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}(b_j - a_i) = 2024$. Надо найти $\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(a_i - b_j)$. Поскольку m и n нечётны, оно от первого отличается знаком.

3. [5] *В ряд записаны 5 натуральных чисел. Каждое из них, кроме первого, – наименьшее натуральное число, на которое не делится предыдущее. Могут ли все пять чисел быть различными?*

Борис Френкин

Ответ: не могут.

Решение 1. Пусть n – первое число в строке. Если n делится на какие-то степени (с натуральными показателями) различных простых чисел, то оно делится и на произведение этих степеней. Поэтому наименьшее число, на которое не делится n, – степень (возможно, первая) какого-то простого числа p. Если $p = 2$, то третье число в строке равно 3, четвёртое равно 2, а пятое снова 3. Если же p нечётно, то третье число равно 2, четвёртое 3 и пятое снова 2. В любом случае пятое число равно третьему.

Решение 2. Пусть записаны числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Рассмотрим три случая.

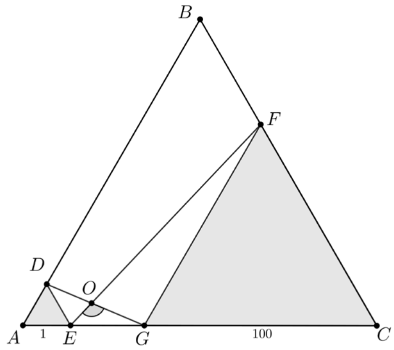
1) a_2 нечётно. Тогда $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 2$.

2) a_2 чётно но не кратно 3. Тогда $a_3 = 3$, $a_4 = 2$, $a_5 = 2$.

3) $a_2 = 2^k3^lm$, где k, $l > 0$, m не кратно ни 2, ни 3. Тогда a_1 делится на 2^k, 3^l и m, но не делится на a_2. Противоречие.

4. [5] *В равностороннем треугольнике ABC проведены отрезки ED и GF, так что образовались два равносторонних треугольника ADE и GFC со сторонами* 1 *и* 100 *(точки E и G лежат на стороне AC). Отрезки EF и DG пересекаются в точке O, причём угол EOG равен* 120°. *Чему равна сторона треугольника ABC?*

Михаил Евдокимов



Ответ: 111.

Решение. Заметим, что $\angle FEG = \angle OEG = 60° - \angle OGE = 60° - \angle DGE = \angle GDE$. Значит, треугольники FGE и GED подобны по двум углам (ведь ещё $\angle DEG = \angle FGE = 120°$), откуда $FG : GE = GE : ED$, поэтому $GE = \sqrt{FG \cdot ED} = \sqrt{100 \cdot 1} = 10$, и далее $AC = 1 + 10 + 100 = 111$.

5. [5] *Имеются чашечные весы без гирь и две кучи камней неизвестных масс, по 10 камней в каждой куче. Разрешается проводить сколько угодно взвешиваний, но на каждую чашу помещается не более 9 камней. Всегда ли можно узнать, какая из куч тяжелее, или установить равенство их масс?*

Сергей Дориченко

Ответ: не всегда.

Решение. Пусть нам даже известны массы всех камней, кроме одного: в первой куче все камни по 10 г, во второй – 9 камней по 1 г и один камень массой больше 90 г (назовём его большим). Тогда результаты взвешиваний без большого камня нам и так известны заранее, а при любом взвешивании с участием большого камня перевесит чаша, на которой он лежит.

При этом масса первой кучи равна 100 г, а масса второй – любое число, большее 99 г. Если оно при этом меньше 100 г, то тяжелее первая куча, если больше 100 г – то вторая. Поэтому сравнить кучи не удастся.