Черновые критерии оценивания 11 класса.

Задача 11.1.

(M) Если есть хотя бы два из недочётов M1, M2, M3, то снимается 1 балл:

(M1) Мелкие арифметические или алгебраические ошибки.

(M2) Упущен случай, когда есть число a для которого на доске нет b такого, что $a^2 + b^2 + 1 = 2ab$.

(M3) Нет подробного описания принципа разделения на группы.

(2) Неверное описание разбиения на группы — не более 5 баллов

(3) Разбиение на группы в предположении того, что комплексные числа упорядочены, но порядок не описан — 4 балла

Задача 11.2.

(M) За использование без доказательства равенства $A'H \cdot A'A = A'B \cdot A'C$ баллы не снижаются.

(M1) Без доказательства используется, что проекция точки пересечения медиан $\triangle A_1BC$ на плоскость ABC — это точка пересечения медиан $\triangle ABC$ — снимается 1 балл.

(Z) Доказано, что у $\triangle ABC$ и $\triangle A_1BC$ совпадают основания высот из вершин A и A_1 — 0 баллов.

(A) Доказано, что $HH_1 \perp A_1BC$ — 3 балла.

(A1) Сформулировано утверждение о том, что $HH_1 \perp A_1BC$ — 1 балл.

(A2) Доказано только, что $HH_1 \perp A_1A'$ — 1 балл.

(B) Доказано, что $\triangle A_1BC$, $\triangle AB_1C$, $\triangle ABC_1$ имеют общую точку T, и $MT \perp ABC$ — 2 балла.

(B1) Доказано, что $\triangle A_1BC$, $\triangle AB_1C$, $\triangle ABC_1$ имеют общую точку пересечения медиан — 1 балл.

(C) Задача сведена к тому, что $HH_1 \perp A_1BC$ (с чёткой формулировкой) — 4 балла.

Продвижение (A) не суммируется с (A1) и (A2). Продвижение (B) не суммируется с (B1). Продвижение (C) не суммируется ни с чем.

Задача 11.3.

(0) Не оценивается.

(0.1) Утверждение, что важность пары многочленов (P, Q) равносильна важности иных пар, полученных из нее линейными преобразованиями, например, $(P, P+Q)$ или $(Q, -P)$

(0.2) Переобозначения для многочленов от двух переменных, например: $P(x,y) = P_1(x) + P_2(y) + xy \cdot P_3(x,y)$

(0.3) $P(x,y) \equiv P(a,b) \pmod{m}$, если $x \equiv a \pmod{m}$, $y \equiv b \pmod{m}$.

(0.4) Доказательство того, что в P или Q должны быть мономы, не содержащие одной из переменных.

(1) Биективность. Если в работе явно сформулировано и доказано одно из следующих утверждений, ставится 1 балл.

(1.1) Отображение $(x,y) \mapsto (P(x,y), Q(x,y))$ является биекцией на множестве $\mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{100}$.

(1.2) Для любого вычета по модулю 100 уравнение $P(x,y) = c$ имеет ровно 100 решений.

Развитие идеи биекции в терминах графа и дальнейшие попытки его анализировать **не** оцениваются дополнительными баллами сверх (1.1).

(2) Модули. При получении балла за часть (1) можно получить ещё 1 балл за явно сформулированное и доказанное утверждение о том, что отображение из (1.1) является биекцией ещё по какому-то модулю, который является делителем 100.

Задача 11.4.

(1) Пример хуже оптимального (например, на $(2N+1)^2(N+1)$) — 0 баллов

(2) Верный оптимальный пример + подсчёт числа чёрных кубиков в нем + обоснование, что пример удовлетворяет условию — 2 балла. (Обратите внимание, оценивается полный комплект в 2 балла, что не означает, что часть комплекта стоит 1 балл.)

(3) Оценка слабее точной (например, что чёрных кубиков не больше $(2N+2)^3/2$) — 0 баллов.

(4) Доказанная оценка $(N+1)^2(4N+1)$ — 4 балла.

(5) Сама по себе идея доказательства оценки по индукции — 0 баллов.

(6) Сама по себе идея обобщить задачу (например, на параллелепипеды $(2N+1) \times (2M+1) \times (2K+1)$) — 0 баллов.

(7) Полный разбор случая $N = 1$ (пример на 20 и оценка, что нельзя отметить 21 чёрный кубик) приносит 1 балл, который НЕ СУММИРУЕТСЯ с баллами, полученными по остальным критериям.

Задача 11.5.

(1) Только оценка сверху — 2 балла.

(2) Только пример — 3 балла.

(3) Есть оценка и работающий алгоритм для построения примера, но отсутствует корректное обоснование работы алгоритма: не более 4 баллов.

(4) Грязь в решении, легко исправимые логические ошибки — снимается 1 балл.

Задача 11.6.

(A) Переформулировка задачи в виде игры, где первый может изменять не больше одного числа, а второй может изменить два подряд идущих — 2 балла

(B) Если дополнительно к этому выбранные 10 чисел разбиты на пары и сформулирована идея ходить в ту же пару чисел, что и первый — 4 балла (баллы не суммируются)

(C) Легко исправляющиеся ошибки в выборе множества чисел, за которыми следим (например, выбраны числа с номерами, кратными 10, а не 9) — снимается 1 балл.

Задача 11.7.

Вершины четырёхугольника из касательных обозначены $A'B'C'D'$. Бонусные баллы по критериям (A), (B), (C), (D) суммируются.

(O1) Доказано, что инцентры образуют прямоугольник, стороны которого параллельны биссектрисам углов между сторонами исходного четырёхугольника, или что точки A, B, I_A, I_B равноудалены от середины дуги — 0 баллов. За использование всех перечисленных фактов без доказательства баллы не снижаются.

(O2) Счёт углов зависит от конфигурации точек, деление пополам направленных углов и т. п. — баллы не снижаются.

(A) Доказано, что общие касательные из условия параллельны сторонам исходного четырёхугольника — 1 балл.

Параллельность должна быть и явно сформулирована, и доказана. Если параллельность следует из проведённого счёта углов, но не объявлена явно, то 1 балл не начисляется. Если параллельность сформулирована, но не доказана (например, объявлена известным фактом), этот 1 балл также не начисляется. В решениях, использующих параллельность без доказательства, за отсутствие этого доказательства снимается 1 балл.

(B) Сформулирована гипотеза о соосности окружностей $(ABCD)$, $(A'B'C'D')$, $(I_AI_BI_CI_D)$ — 1 балл.

(C) Введена точка X пересечения прямых AB и I_AI_B или все четыре такие точки. Доказано, что они лежат на радикальной оси окружностей $(ABCD)$ и $I_AI_BI_CI_D$ — 1 балл.

(D) Доказана вписанность $ABA'B'$ либо вписанность $I_AI_BA'B'$ — 2 балла.

(E) Доказано, что отражения вершин четырёхугольника $A'B'C'D'$ относительно центра прямоугольника $I_AI_BI_CI_D$ попадают на биссектрисы углов четырёхугольника $ABCD$ — 1 балл. (Суммируется с критерием (A), но не с остальными).

(F) Сформулирована верная гипотеза о «равноправности» четырёхугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$: четыре вписанные окружности для треугольников четырёхугольника $ABCD$ — это на самом деле четыре вневписанные окружности для треугольников четырёхугольника $A'B'C'D'$ — 1 балл. (Суммируется с критерием (A) и (C), но не с остальными).

Задача 11.8.

Часть (G). Пример.

(G1) Ответ и пример с обоснованием — 1 балл.

(G2) Только ответ — 0 баллов.

(G3) Эскиз графика без пояснения, где встречаются какие длины хорд — 0 баллов.

(G4) Верный пример с неверным рассуждением о количестве хорд (например, утверждается, что хорд 4050) — 0 баллов.

(G5) Функция задается эскизом графика, из которого не следуют все необходимые свойства этого графика — 0 баллов.

(GM) Арифметические ошибки в подсчете числа хорд (например, $2025 \cdot 2 = 5050$) — баллы не снимаются.

Часть (Z). Следующие продвижения по оценке стоят 0 баллов.

(Z1) Существование хорды длины 1 или длины d, где d — делитель 2025.

(Z2) Наблюдение о том, что число хорд длины k равно числу нулей функции $f(x+k) - f(x)$.

(Z3) Соображение, что достаточно решать задачу в случае $f(0) = f(2025) = 0$.

(Z4) Идея индукционного доказательства, проверка базы индукции.

(Z5) Формулировка, доказательство леммы об альпинистах.

(Z6) Доказательство того, что на отрезке между соседними корнями длины t хотя бы $[t]$ хорд.

Критерии к следующим частям написаны в предположении $f(0) = f(2025) = 0$.

Часть (A). Оценка с помощью совместного изучения хорд длин k и $2025 - k$.

(A1) Доказано, что $g(k) = f(x+k) - f(x)$ фиксированного знака для достаточно больших по модулю x — 1 балл.

(A2) Гипотеза о том, что хорд длины k и $2025-k$ хотя бы 4 и объяснение, почему это выполняется в случае, когда обе функции g_k и g_{2025-k} принимают значения обоих знаков — 1 балл.

(A3) Рассуждение работает только в случае, когда все $g(k)$ различны при целых k, за исключением $g(0) = g(2025)$ — не более 3 баллов за часть (A).

Часть (B). Оценка с помощью намотки графика функции на цилиндр.

(B1) График функции нарезан полосами между прямыми $x = k, x = k+1$, все кусочки наложены друг на друга параллельным переносом, и задача переформулирована в терминах количества пересечений полученных кусочков графика — 1 балл. (Это эквивалентно намотке графика функции на цилиндр.)

(B2) Доказано, что число внутренних хорд, то есть тех хорд, проекции которых на ось Ox содержатся в отрезке $[0, 2025]$, не менее 2024 (не считая самой хорды длины 2025) — 1 балл.

(B3) Гипотеза о том, что число внешних (то есть не внутренних) хорд не менее 2024 — 0 баллов.

(B4) Не разобран случай поведения на бесконечности, при котором $f(x+1) - f(x) > 0$ для достаточно больших по модулю x — не более 2 баллов за часть (B).

Часть (C). Оценка с помощью склейки по хорде длины 1.

(C1) Доказано, что есть хорда длины 1, скажем $[a, a+1]$, и рассмотрена функция $h(x) = f(x), x \leqslant a$, $h(x) = f(x+1), x > a$ — 1 балл.

(C2) Разобран случай, когда $f(t)$ — глобальный максимум (минимум) функции f при некотором $t \in \mathbb{R}$ — 1 балл.

(C3) Доказано, что для внутренней хорды длины 1 есть «зацепленная» с ней (зацеплены означает, что их проекции на ось Ox пересекаются, но ни одна не содержится в другой) — 1 балл.

(C4) В индукции по n (где в задаче $n = 2025$) переход сведен к доказательству (C3) — 1 балл.

Баллы внутри каждой из частей (A), (B), (C) суммируются. За оценку ставится максимум из баллов за части (A), (B), (C). Баллы за оценку суммируются с баллами за пример (G).