

**Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Отборочный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика, 9 класс**

Вариант 1.

1. Бригада рабочих копала траншею под теплотрассу. Копали по очереди: первый рабочий выкопал половину траншеи, второй – треть от оставшейся части траншеи, третий – четвертую часть остатка и т.д. Когда все члены бригады закончили работать, $\frac{1}{5}$ часть траншеи осталась не выкопанной. Сколько рабочих в бригаде?
2. В школе №1917 обучаются 504 ученика: двоечники, троечники и хорошисты. Когда все они 1 сентября были построены на линейку, оказалось, что двоечники не стоят рядом, любые два троечника разделены не менее чем двумя не троечниками, а между любыми двумя хорошистами находится не менее трех не хорошистов. Сколько в школе хорошистов?
3. Члены последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ образованы зачеркиванием последних двух цифр в десятичной записи чисел вида $a_n = (2n + 101)^2$. Найти максимальное число N , для которого b_1, b_2, \dots, b_N являются членами арифметической прогрессии.
4. Найти все x , являющиеся решениями неравенства

$$3x^3 + 2(4a - 5)x^2 - 3(4a - 7)x + 3a^2 + a - 20 > 0$$

хотя бы для одного значения $a \in [-1; 2]$.

5. Треугольник ABC имеет площадь 6 и $AC : AB = 2 : 3$. Точка H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису угла при вершине A . Найти площадь треугольника BHC .

Ответы и решения

Задача 1. Пусть длина траншеи x метров. Тогда $\frac{1}{2}x$ метров выкопал первый рабочий; осталось $1x - \frac{1}{2}x = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 2}x = \frac{1}{2}x$ метров. Второй рабочий выкопал $\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3}x$ метров, осталось $\frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3}x = \frac{1}{2} \left(1x - \frac{1}{3}x\right) = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3}x = \frac{1}{3}x$ метров. Третий рабочий выкопал $\frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 4}x$ метров, осталось $\frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 4}x = \frac{1}{3} \left(1x - \frac{1}{4}x\right) = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4}x = \frac{1}{4}x$ метров. Получим, что k -ый рабочий оставил не выкопанной $\frac{1}{k+1}x$ метров траншеи. По условию задачи осталось выкопать $\frac{1}{5}x$ метров траншеи. $\frac{1}{k+1}x = \frac{1}{5}x$, $k + 1 = 5$, $k = 4$.
Значит, всего в бригаде было 4 рабочих.

Ответ: 4 рабочих.

Задача 2. По условию задачи между двумя двоечниками, должны стоять троечники (t) или хорошисты (h). Пусть двоечники (d) расположены так: $d * d * d \dots$, где $*$ – пока свободное место. Тогда троечники могут быть расставлены:



d t d * d t d * d, а хорошисты займут оставшиеся свободными места: d t d h d t d h d и т.д.

Заметим, что в любой подряд стоящей четверке учеников ровно один хорошист. Выберем любую такую четверку. В школе обучаются 504 ученика, $504 : 4 = 126$. Разбиваем всех учеников на 126 четверок и столько же хорошистов учится в школе.

Ответ: 126.

Задача 3. Запишем несколько элементов последовательности в виде квадрата суммы

$$a_n = (100 + (2n + 1))^2, a_n = 10000 + 100 \cdot (4n + 2) + (2n + 1)^2,$$

$$b_n = 100^2 + 100 \cdot (4n + 2) \text{ (при } n < N, n = 1, 2, 3 \dots \text{);}$$

$$\text{при } n = 1, a_1 = 10000 + 100 \cdot 6 + 3^2, b_1 = 100^2 + 600 = 10600;$$

$$\text{при } n = 2, a_2 = 10000 + 100 \cdot 10 + 5^2, b_2 = 100^2 + 1000 = 11000;$$

$$\text{при } n = 3, a_3 = 10000 + 100 \cdot 14 + 7^2, b_3 = 100^2 + 1400 = 11400;$$

$$\text{при } n = 4, a_4 = 10000 + 100 \cdot 18 + 9^2, b_4 = 100^2 + 1800 = 11800;$$

$$\text{при } n = 5, a_5 = 10000 + 100 \cdot 22 + 11^2, b_5 = 100^2 + 2200 + 100 = 12300.$$

По определению арифметической прогрессии: каждый последующий элемент отличается от предыдущего на одно и то же число. В данной прогрессии $\{b_n\}$ это число 400. На пятом элементе такой порядок нарушается. Требуется чтобы, $(2n + 1)^2 < 100$ или $2n + 1 < 10$, $2n < 9$, $n < 4,5$. Поскольку $n = 1, 2, 3 \dots$, то $N = 4$.

Ответ: $N = 4$.

Задача 4. Согласно условию задачи

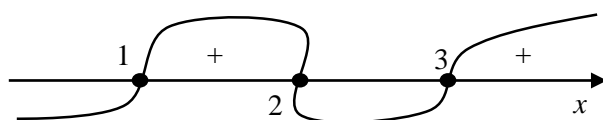
$f(a, x) = 3a^2 + (8x^2 - 12x + 1)a + 3x^3 - 10x^2 + 21x - 20$, это квадратичная функция, график функции – парабола, ветви которой направлены вверх (коэффициент при a^2 больше нуля).

Если x – искомое число, то хотя бы одно из чисел $f(-1, x) > 0$ или $f(2, x) > 0$. Подставим граничные значения данного отрезка $a \in [-1; 2]$, получим:

$$\frac{f(a=-1, x)}{3} = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0, \text{ откуда}$$

$$(x - 3)^2 x + 2(x - 3) > 0, (x - 2)(x - 1)(x - 3) > 0 \text{ и}$$

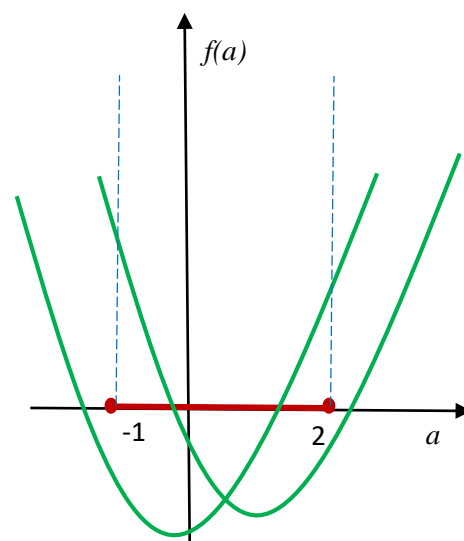
$$x \in (1; 2) \cup (3; +\infty).$$

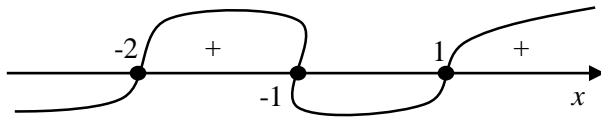


$$\frac{f(a=2, x)}{3} = x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0, \text{ откуда}$$

$$x^2(x + 2) - (x + 2) > 0, (x + 2)(x + 1)(x - 1) > 0$$

$$\text{и } x \in (-2; -1) \cup (1; +\infty).$$





Рассмотрим теперь случаи расположения графиков квадратичных функций, ветви которых направлены вверх, но нет значений $a \in [-1; 2]$, при которых

$$f(a, x) = 3a^2 + (8x^2 - 12x + 1)a + 3x^3 - 10x^2 + 21x - 20 > 0.$$

Это возможно при
$$\begin{cases} \frac{f(a=-1, x)}{3} \leq 0, \\ \frac{f(a=2, x)}{3} \leq 0. \end{cases}$$

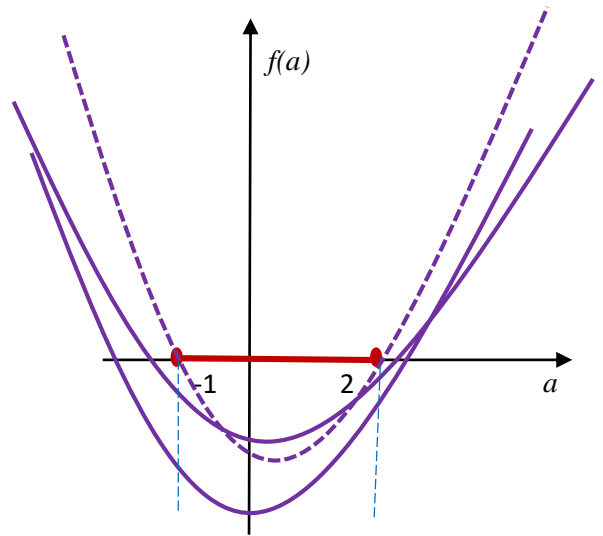
Значит,
$$\begin{cases} (x-2)(x-1)(x-3) \leq 0, \\ (x+2)(x+1)(x-1) \leq 0. \end{cases}$$

Например, при $x = 1$ (нарисована пунктиром)

$$\frac{f(a, x=1)}{3} = a^2 - a - 2 > 0, (x-2)(x+1) > 0,$$

$a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. Таким образом, $x = 1$ не является частью ответа.

Ответ: $x \in (-2; -1) \cup (1; +\infty)$.



Задача 5. Треугольник ABC имеет площадь 6 и $AC : AB = 2 : 3$. Точка H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису угла при вершине A . Требуется найти площадь треугольника BHC .

$\triangle ACD$ – равнобедренный. Луч AE – биссектриса угла при вершине A ; CD – перпендикуляр к AE .

Пусть $AD = AC = 2x$, тогда $BD = 1x$.

$$S_{\triangle BAC} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 2x \cdot \sin A.$$

$$S_{\triangle BAC} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 2x \cdot \sin A = 6, \quad x^2 \cdot \sin A = 2.$$

AH в $\triangle ACD$ биссектриса и высота, поэтому AH – медиана и H – середина отрезка CD .

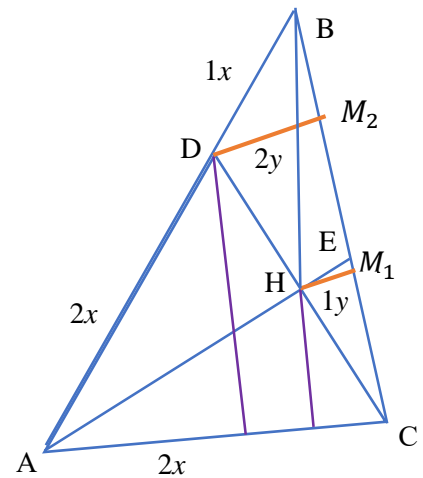
$$S_{\triangle DAC} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2x \cdot \sin A.$$

$$S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} (6x^2 \cdot \sin A - 4x^2 \cdot \sin A). \quad S_{\triangle BDC} = x^2 \cdot \sin A.$$

Пусть высота $\triangle BDC$ $DM_2 = 2y$, тогда высота $\triangle BHC$ $DM_1 = 1y$ (прямоугольные треугольники $\triangle M_2DC$ и $\triangle HCM_1$ подобны по 2 углам: общему C и прямому углу). Значит, площадь $\triangle BDC$ в два раза больше площади $\triangle BHC$, поскольку основание у этих треугольников одинаковое.

$$S_{\triangle BHC} = \frac{1}{2} S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin A = 1.$$

Ответ: $S_{\triangle BHC} = 1$.



Вариант 2

1. Бригада рабочих копала траншею под теплотрассу. Копали по очереди: первый рабочий выкопал половину траншеи, второй – треть от оставшейся части траншеи, третий – четвертую часть остатка и т.д. Когда все члены бригады закончили работать, $1/6$ часть траншеи осталась не выкопанной. Сколько рабочих в бригаде?

Ответ: 5 рабочих.

2. В школе №1918 обучаются 444 ученика: двоечники, троечники и хорошисты. Когда все они 1 сентября были построены на линейку, оказалось, что двоечники не стоят рядом, любые два троечника разделены не менее чем двумя не троечниками, а между любыми двумя хорошистами находится не менее трех не хорошистов. Сколько в школе хорошистов?

Ответ: 111.

3. Члены последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ образованы зачеркиванием последних двух цифр в десятичной записи чисел вида $a_n = (3n - 102)^2$. Найти максимальное число N , для которого b_1, b_2, \dots, b_N являются членами арифметической прогрессии.

Ответ: $N = 3$.

4. Найти все x , являющиеся решениями неравенства

$$(a-1)x^3 + (3-5a)x^2 + 2(a-2)x - 2a^2 + 2a + 4 < 0$$

хотя бы для одного значения $a \in [-1; 1]$.

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

5. Треугольник ABC имеет площадь 16 и $AC : AB = 3 : 4$. Точка H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису угла при вершине A . Найти площадь треугольника BHC .

Ответ: $S_{\Delta HBC} = 2$.

Вариант 3

1. Бригада рабочих копала траншею под теплотрассу. Копали по очереди: первый рабочий выкопал половину траншеи, второй – треть от оставшейся части траншеи, третий – четвертую часть остатка и т.д. Когда все члены бригады закончили работать, $1/7$ часть траншеи осталась не выкопанной. Сколько рабочих в бригаде?

Ответ: 6 рабочих.

2. В школе №1919 обучаются 384 ученика: двоечники, троечники и хорошисты. Когда все они 1 сентября были построены на линейку, оказалось, что двоечники не стоят рядом, любые два троечника разделены не менее чем двумя не троечниками, а между любыми двумя хорошистами находится не менее трех не хорошистов. Сколько в школе хорошистов?

Ответ: 96.

3. Члены последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ образованы зачеркиванием последних двух цифр в десятичной записи чисел вида $a_n = (n-104)^2$. Найти максимальное число N , для которого b_1, b_2, \dots, b_N являются членами арифметической прогрессии.

Ответ: $N = 13$.

4. Найти все x , являющиеся решениями неравенства

$$x^3 - (2a+1)x^2 - ax + a(a+2) > 0$$

хотя бы для одного значения $a \in [-2; 1]$.

Ответ: $x \in (-2; -1) \cup (-1; +\infty)$.

5. Треугольник ABC имеет площадь 15 и $AC:AB=3:5$. Точка H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису угла при вершине A . Найти площадь треугольника BHC .

Ответ: $S_{\Delta HBC} = 3$.

Вариант 4

1. Бригада рабочих копала траншею под теплотрассу. Копали по очереди: первый рабочий выкопал половину траншеи, второй – треть от оставшейся части траншеи, третий – четвертую часть остатка и т.д. Когда все члены бригады закончили работать, $1/8$ часть траншеи осталась не выкопанной. Сколько рабочих в бригаде?

Ответ: 7 рабочих.

2. В школе №1920 обучаются 608 ученика: двоечники, троечники и хорошисты. Когда все они 1 сентября были построены на линейку, оказалось, что двоечники не стоят рядом, любые два троечника разделены не менее чем двумя не троечниками, а между любыми двумя хорошистами находится не менее трех не хорошистов. Сколько в школе хорошистов?

Ответ: 152.

3. Члены последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ образованы зачеркиванием последних двух цифр в десятичной записи чисел вида $a_n = (2n-107)^2$. Найти максимальное число N , для которого b_1, b_2, \dots, b_N являются членами арифметической прогрессии.

Ответ: $N = 8$.

4. Найти все x , являющиеся решениями неравенства

$$2x^3 - (a+2)x^2 - 2(a+3)x + 2a^2 + 3a - 2 > 0$$

хотя бы для одного значения $a \in [-2; 2]$.

5. Треугольник ABC имеет площадь 12 и $AC:AB=1:3$. Точка H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису угла при вершине A . Найти площадь треугольника BHC .

Ответ: $S_{\Delta HBC} = 4$.

Росатом 9 класс (Отборочный тур), Москва 17.11.2024

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б – Неверно составлено уравнение по условию.

1 б – Верно составлена математическая модель (уравнение) или найдено сколько выкопал 3-ий (для 1 варианта) и 4-ый рабочий (для остальных вариантов).

2 б -- Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б – Задача решена верно.

Задача 2:

0 б – Перебор различных вариантов расстановки учащихся, продвижение в решении несущественно.

1 б – Верно указан период (порядок) расстановки учащихся.

2 б – Есть доказательство, что «в каждой четвёрке учащихся только 1 хорошист».

3 б - Задача решена верно.

Задача 3:

0 б – Сделаны некоторые предположения по решению задачи.

1 б – Выписана формула для нахождения b_n или явно выписаны 4-5 элементов последовательностей a_n и b_n .

2 б – Верно записано условие на величину $(b_n)^2$.

3 б - Задача решена верно.

Задача 4:

0 б - Сделаны некоторые предположения по решению задачи.

1 б -Задача сведена к исследованию квадратичной функции $f(a)$ по переменной a на отрезке $[m, n]$. Записаны свойства этой функции (ветви направлены вверх, например).

2 б – Записана одна из оценок $f(m)$ или $f(n)$. Записано решение такого неравенства в виде нескольких интервалов.

3 б - Задача решена верно.

Задача 5:

0 б -Нарисован чертёж.

1 б – Найдена площадь прямоугольного треугольника.

2 б – Найдены площади двух треугольников с вершиной в точке А.

3 б - Задача решена верно.