

**Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Отборочный тур отраслевой физико-математической олимпиады
школьников «Росатом», математика, 7 класс**

Вариант 1.

1. Папа отправил Пете деньги (целое число рублей) на телефон зная, что комиссия за перевод составляет целое число процентов от суммы перевода и не превышает 20%. Петя получил 1183 рубля. Сколько денег отправил папа со своего телефона и какая при этом была комиссия?
2. Сумма семи различных натуральных чисел равна 29. Найти их произведение.
3. На семейном обеде присутствовали 5 человек: папа, мама и трое детей, включая Петю. Он быстро посчитал суммы возрастов каждой пары, сидящих за столом людей. Вот что у него получилось: 15, 20, 21, 49, 50, 52, 53, 55, 58 и 87. Найти возраст папы, если известно, что он старше мамы.
4. На экране игрового автомата появляется натуральное число n . За один ход его можно заменить на число, равное произведению ab , где a, b – любые натуральные числа, для которых $a+b=n$. Предложите стратегию ходов, при которой на экране окажется число 2023, если первоначально $n = 19$.
5. На окружности расположены 11 точек, разбивающих ее на дуги, измеряемые целым числом градусов. Оказалось, что объединение любых двух соседних дуг является дугой, содержащей не более 66 градусов, а наименьшая из дуг содержит α градусов. Какое наибольшее возможное значение α ?

Ответы и решения

Задача 1. Пусть папа отправил n рублей, а комиссия составляет $p\%$. Тогда сумма, полученная Петей, равна $n \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 1183$, или $n \cdot (100 - p) = 118300$. Сомножители в левой части последнего равенства – натуральные числа, поэтому они являются делителями числа 118300. По условию, p – целое, $0 \leq p \leq 20$, поэтому $80 \leq 100 - p \leq 100$. Формально подходит вариант $p = 0$, тогда $n = 1183$ (комиссии нет; папа отправил Пете 1183 рубля, Петя получил всю сумму целиком). Но в условии задачи сказано, что папа знал про комиссию, и отправил Пете некоторую целочисленную сумму денег, в результате Петя получил также целое число рублей (1183). Поэтому будем считать, что $p \in \{1, 2, \dots, 20\}$, а $80 \leq 100 - p \leq 99$. Значит, число $(100 - p)$ является делителем числа 118300. Используя каноническое разложение числа 118300 на простые сомножители ($118300 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13^2$), находим, что единственным таким делителем от 80 до 99 ($80 \leq 100 - p \leq 99$) является число $91 = 7 \cdot 13$. Тогда $p = 100 - 91 = 9$; $n \cdot 7 \cdot 13 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13^2 \Rightarrow n = 100 \cdot 13 = 1300$.

Ответ: 1300 рублей, 9%.

Задача 2. Минимальная сумма семи различных натуральных чисел равна $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$. По условию, их сумма равна 29, т.е. ровно одно из этих чисел нужно увеличить на 1. Если единицу увеличить на 1, то получим 2, но оно уже встречается в этой сумме (слагаемые должны быть различными). Если увеличить два на 1, то получим 3, но

оно также встречается в этой сумме. Рассуждая далее аналогично, определим, что увеличить на 1 можно только последнее слагаемое ($7 + 1 = 8$), и единственный возможный по условию задачи набор чисел есть $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 : 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 = 29$. Тогда их произведение равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 = 57600$.

Ответ: 57600.

Задача 3. Пусть $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ – возраста членов семьи, упорядоченные по возрастанию (знаков равенства нет, поскольку все приведенные Петей числа разные). Так как родители старше детей, то $x_4 + x_5 = 87$ (сумма возрастов мамы и папы равна 87). Пусть Петя – старший из детей, тогда его возраст равен x_3 . Если сложить все Петины числа, то получится 460. В этой сумме каждое слагаемое присутствует 4 раза, поэтому сумма возрастов всех членов семьи равна $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{460}{4} = 115$. Тогда сумма возрастов детей равна $x_1 + x_2 + x_3 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) - (x_4 + x_5) = 115 - 87 = 28$, причем сумма возрастов двух младших детей (наименьшая из данных сумм) равна $x_1 + x_2 = 15$. Отсюда Петин возраст $x_3 = (x_1 + x_2 + x_3) - (x_1 + x_2) = 28 - 15 = 13$. Так как Петя – старший ребенок, а папа старше мамы, то сумма возрастов Пети и папы равна второму по величине данному числу: $x_3 + x_5 = 58$, отсюда возраст папы равен $x_5 = 58 - x_3 = 58 - 13 = 45$.

Ответ: 45.

Задача 4. Обозначим $n_0 = 19$, на i – м шаге получаем n_i .

1 – й шаг: $a + b = n_0$; $9 + 10 = 19 \Rightarrow n_1 = 9 \cdot 10 = 90$.

2 – й шаг: $a + b = n_1$; $45 + 45 = 90 \Rightarrow n_2 = 45^2 = 2025$.

3 – й шаг: $a + b = n_2$; $1 + 2024 = 2025 \Rightarrow n_3 = 1 \cdot 2024 = 2024$.

4 – й шаг: $a + b = n_3$; $1 + 2023 = 2024 \Rightarrow n_4 = 1 \cdot 2023$.

Стратегия не единственная, например:

1 – й шаг: $a + b = n_0$; $6 + 13 = 19 \Rightarrow n_1 = 6 \cdot 13 = 78$.

2 – й шаг: $a + b = n_1$; $4 + 74 = 78 \Rightarrow n_2 = 4 \cdot 74 = 296$.

3 – й шаг: $a + b = n_2$; $7 + 289 = 296 \Rightarrow n_3 = 7 \cdot 289 = 2023$.

Задача 5. 11 точек разбивают окружность на 11 дуг. Так как две соседние дуги содержат не более 66° , то наибольшее значение наименьшей из дуг не превосходит 33° (если дуги равны, то $\alpha \leq 33$, так как $2\alpha \leq 66$; если не равны, то меньшая дуга меньше 33° , а большая – больше 33°). Так как нужно найти наибольшее возможное значение α , то попробуем $\alpha = 33$; тогда все дуги равны 33° , и сумма длин 11 дуг равна $11 \cdot 33^\circ = 363^\circ$, что на 3° превосходит градусную меру всей окружности. Поэтому $\alpha < 33$. Так как по условию задачи дуги измеряются целым числом градусов, то попробуем взять $\alpha = 32$. По предыдущим подсчетам, при $\alpha = 33$ получается перебор в 3 градуса, поэтому, если длины трех дуг из 11 имеющихся мы уменьшим на 1 градус, то получим нужное разбиение: 8 дуг по 33 градуса и 3 дуги по 32 градуса дают общую сумму $8 \cdot 33 + 3 \cdot 32 = 264 + 96 = 360$. Итак, наибольшее возможное значение длины наименьшей из дуг равно 32° .

Ответ: 32.

Вариант 2

1. Папа отправил Пете деньги (целое число рублей) на телефон зная, что комиссия за перевод составляет целое число процентов от суммы перевода и не превышает 25%. Петя получил 968 рублей. Сколько денег отправил папа со своего телефона и какая при этом была комиссия, если известно, что он перевел не более 1200 рублей?

Ответ: 1100, 12%.

2. Сумма восьми различных натуральных чисел равна 37. Найти их произведение.

Ответ: 45360.

3. На семейном обеде присутствовали 5 человек: папа, мама и трое детей, включая Петю. Он быстро посчитал суммы возрастов каждой пары, сидящих за столом людей. Вот что у него получилось: 8, 15, 17, 33, 35, 37, 39, 42, 46 и 64. Найти возраст младшего ребенка в семье.

Ответ: 3.

4. На экране игрового автомата появляется натуральное число n . За один ход его можно заменить на число, равное произведению ab , где a, b – любые натуральные числа, для которых $a+b=n$. Предложите стратегию ходов, при которой на экране окажется число 439, если первоначально $n = 13$.

Ответ: $13=6+7$, $6*7=42$; $42=21+21$, $21*21=441$; $441=1+440$, $1*440=440$; $440=1+439$, $1*439=439$. Стратегия не единственная.

5. На окружности расположены 13 точек, разбивающих ее на дуги, измеряемые целым числом градусов. Оказалось, что объединение любых двух соседних дуг является дугой, содержащей не более 56 градусов, а наименьшая из дуг содержит α градусов. Какое наибольшее возможное значение α ?

Ответ: 27.

Вариант 3

1. Папа отправил Пете деньги (целое число рублей) на телефон зная, что комиссия за перевод составляет целое число процентов от суммы перевода и не превышает 15%. Петя получил 833 рубля. Сколько денег отправил папа со своего телефона и какая при этом была комиссия, если известно, что он перевел не более 900 рублей?

Ответ: 850, 2%.

2. Сумма девяти различных натуральных чисел равна 46. Найти их произведение.

Ответ: 403200.

3. На семейном обеде присутствовали 5 человек: папа, мама и трое детей, включая Петю. Он быстро посчитал суммы возрастов каждой пары, сидящих за столом людей. Вот что у него получилось: 14, 17, 21, 39, 41, 43, 45, 46, 48 и 70. Найти возраст Пети, если известно, что он старший из детей.

Ответ: 12.

4. На экране игрового автомата появляется натуральное число n . За один ход его можно заменить на число, равное произведению ab , где a, b – любые натуральные числа, для которых $a+b=n$. Предложите стратегию ходов, при которой на экране окажется число 1294, если первоначально $n=17$.

Ответ: $17=9+8, 9*8=72; 72=36+36, 36*36=1296; 1296=1+1295, 1*1295=1295; 1295=1+1294, 1*1294=1294$. Стратегия не единственная.

5. На окружности расположены 17 точек, разбивающих ее на дуги, измеряемые целым числом градусов. Оказалось, что объединение любых двух соседних дуг является дугой, содержащей не более 43 градусов, а наименьшая из дуг содержит α градусов. Какое наибольшее возможное значение α ?

Ответ: 21.

Вариант 4

1. Папа отправил Пете деньги (целое число рублей) на телефон зная, что комиссия за перевод составляет целое число процентов от суммы перевода и не превышает 14%. Петя получил 2527 рублей. Сколько денег отправил папа со своего телефона и какая при этом была комиссия?

Ответ: 2660, 5%.

2. Сумма десяти различных натуральных чисел равна 56. Найти их произведение.

Ответ: 3991680.

3. На семейном обеде присутствовали 5 человек: папа, мама и трое детей, включая Петю. Он быстро посчитал суммы возрастов каждой пары, сидящих за столом людей. Вот что у него получилось: 14, 15, 17, 38, 40, 41, 43, 45, 46 и 69. Найти возраст мамы, если известно, что она моложе папы.

Ответ: 32.

4. На экране игрового автомата появляется натуральное число n . За один ход его можно заменить на число, равное произведению ab , где a, b – любые натуральные числа, для которых $a+b=n$. Предложите стратегию ходов, при которой на экране окажется число 782, если первоначально $n=15$.

Ответ: $15=7+8, 7*8=56; 56=28+28, 28*28=784; 784=1+783, 1*783=783; 783=1+782, 1*782=782$. Стратегия не единственная.

5. На окружности расположены 19 точек, разбивающих ее на дуги, измеряемые целым числом градусов. Оказалось, что объединение любых двух соседних дуг является дугой, содержащей не более 39 градусов, а наименьшая из дуг содержит α градусов. Какое наибольшее возможное значение α ?

Ответ: 18.

Росатом 7 класс (Отборочный тур), Москва 17.11.2024

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б – Неверно составлено уравнение по условию.

1 б – Верно составлена математическая модель (уравнение).

2 б -- Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения, или дан только один ответ из двух.

3 б – Задача решена верно.

Задача 2:

0 б – Нет правильного набора слагаемых, продвижение в решении несущественно.

1 б – Верно найдены числа, сумма которых на единицу меньше заданной, дальнейших продвижений нет.

2 б – Верное завершённое решение с арифметической ошибкой.

3 б - Задача решена верно.

Задача 3:

0 б – Сделаны некоторые предположения по решению задачи.

1 б – Верно составлены уравнения для возрастов членов семьи.

2 б -- Верное завершённое решение с арифметической ошибкой.

3 б - Задача решена верно.

Задача 4:

0 б -Сделаны безуспешные попытки поиска стратегии ходов.

1 б -Найдена некоторая зависимость изменения чисел за один ход, например, уменьшение числа на единицу.

2 б - Задача решена с одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения, или есть мелкие недочёты.

3 б - Задача решена верно.

Задача 5:

0 б -Нарисован чертёж.

1 б – Установлено, в каких пределах может лежать значение альфа; дальнейших продвижений в решении нет.

2 б - Задача решена с мелкими недочётами или одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б - Задача решена верно.