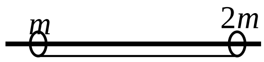
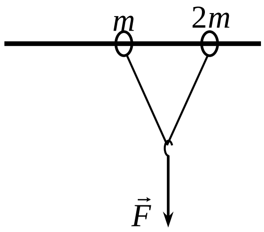
Решения
Отборочный тур олимпиады «Росатом», 2024-2025 учебный год,
Олимпиада памяти И.В.Савельева, физика, 11 класс

1. К поплавку массой $m = 20$ г, плавающему в воде, привязана леска с грузом. При этом поплавок погружён в воду на две трети своего объёма. Найти в этом положении силу натяжения лески, если свободно плавающий в воде поплавок погружён в неё на одну четвертую часть своего объёма. $g = 10$ м/с^2.

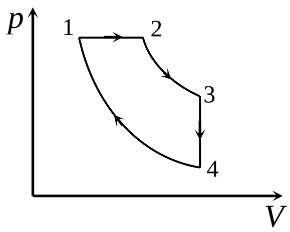
2. На гладкую горизонтальную спицу надели две массивных бусинки массами m и $2m$ связанные легкой нерастяжимой нитью длиной $2L$. Вначале нить натянута и является горизонтальной (см. левый рисунок). Затем нить зацепили легким крюком и стали тянуть его с силой F, направленной вертикально вниз (см. правый рисунок). Какую скорость будут иметь бусинки в момент их столкновения?



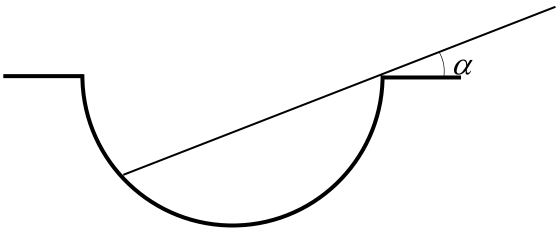


3. На склоне горы, составляющем угол α с горизонтом, на множество мелких осколков взорвалась граната. Осколки полетели во все стороны с одинаковой по величине начальной скоростью v_0. На каком расстоянии от места взрыва упадет последний упавший на склон осколок?

4. С одноатомным идеальным газом проводят циклический процесс, состоящий из изобарического (1-2), адиабатического (2-3), изохорического (3-4) и адиабатического (4-1) процессов (см. рисунок). Известно, что: (1) КПД цикла Карно, проводимого между изотермами, отвечающими максимальной и минимальной температурами в этом цикле, равен $\eta_1 = 0,75$, (2) КПД цикла Карно с адиабатным расширением 2-3 равен $\eta_2 = 0,25$, (3) КПД цикла Карно с адиабатным сжатием 4-1 равен $\eta_3 = 0,5$. Найти КПД цикла 1-2-3-4-1.



5. В полусферическую гладкую лунку радиуса R положили стержень длиной $2L$ (см. рисунок). Каким будет угол между стержнем и горизонтальной плоскостью в равновесии стержня (угол α на рисунке). Трение между всеми поверхностями отсутствует. Плоскость, «замыкающая» полусферическую лунку, горизонтальна.



Решения

1. Пусть масса поплавка m, объем V. Тогда условие плавания поплавка с леской и грузом дает

$$mg + T = \rho g \frac{2}{3} V$$

где T - сила натяжения лески, ρ - плотность воды. Для свободно плавающего поплавка условие плавания дает

$$mg = \rho g \frac{1}{4} V$$

Деля эти равенства друг на друга, получим

$$\frac{mg + T}{mg} = \frac{8}{3}$$

Решая это уравнение, найдем

$$T = \frac{5}{3} mg = 0,33 \text{ Н}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильное использование формулы для выталкивающей силы Архимеда - 1 балл
2. Правильное условие плавание поплавка с леской – 1 балл
3. Правильное условие плавания свободно плавающего поплавка – 1 балл
4. Правильное уравнение для силы натяжения лески – 1 балл
5. Правильный ответ (и формула, и число) – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

2. Внешними силами для системы двух бусинок являются силы тяжести, силы реакции спицы и внешняя сила F, приложенная к крюку. А поскольку все эти силы вертикальны, сохраняется проекция импульса системы на горизонтальное направление: если скорость тела массой m в некоторый момент времени равна v, то у тела массой $2m$ скорость в этот же момент времени равна $v/2$.

А поскольку потенциальная энергия системы не уменьшается (тела движутся горизонтально), то эти скорости связаны с работой внешней силы. До момента встречи тел точка приложения силы F пройдет расстояние L. Поэтому работа внешней силы равна FL, а закон сохранения энергии дает

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{2m(v/2)^2}{2} = FL$$

откуда находим, что скорость тела m в момент столкновения со вторым телом равна

$$v_1 = 2\sqrt{\frac{FL}{3m}},$$

а скорость тела массой $2m$ равна

$$v_2 = \sqrt{\frac{FL}{3m}}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильная идея использовать законы сохранения импульса и энергии - 1 балл
2. Правильное соотношение между скоростями из закона сохранения импульса – 1 балл
3. Правильная работа внешней силы – 1 балл

4. Правильное уравнение закона сохранения энергии – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл.
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

3. Движение осколков от склона и к нему определяется проекциями векторов начальной скорости и ускорения на направление, перпендикулярное плоскости. А поскольку ускорение у всех осколков одинаковое, то это движение зависит от проекции вектора начальной скорости. В частности, очевидно, что дольше всех будет лететь тот осколок, проекция вектора начальной скорости которого максимальна. Это тот осколок, вектор начальной скорости которого перпендикулярен склону.

Так как проекция ускорения свободного падения на направление, перпендикулярное склону, есть $a_\perp = g\cos\alpha$, то время движения этого осколка есть

$$t = \frac{2v_0}{a_\perp} = \frac{2v_0}{g\cos\alpha}.$$

Движение этого осколка вдоль склона - равноускоренное с ускорением $a_\parallel = g\sin\alpha$ без начальной скорости. Поэтому вдоль склона этот осколок сместится на величину

$$\Delta x = \frac{g\sin\alpha t^2}{2} = \frac{2v_0^2\sin\alpha}{g\cos^2\alpha}$$

Критерии оценки задачи (максимальная оценка за задачу – 5 баллов)
1. Правильно использованы законы равноускоренного движения – 1 балл
2. Правильный (и обоснованный) вывод, что последним на склон упадет осколок, начальная скорость которого перпендикулярна склону – 1 балл
3. Правильно найдено время движения этого осколка – 1 балл
4. Правильное уравнение движения этого осколка вдоль склона – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за задачу является суммой оценок по вышеперечисленным критериям

4. Пусть температуры газа в состояниях 1, 2, 3 и 4 соответственно равны: T_1, T_2, T_3 и T_4. Тогда очевидно, что T_2 - максимальная температура газа в цикле, T_4 - минимальная. Поэтому КПД цикла Карно, проводимого между максимальной и минимальной температурами в цикле, равен

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_4}{T_2}$$

КПД цикла Карно с адиабатическим расширением 2-3 равен

$$\eta_2 = 1 - \frac{T_3}{T_2}$$

КПД цикла Карно с адиабатическим сжатием 4-1 равен

$$\eta_3 = 1 - \frac{T_4}{T_1}$$

Теперь найдем КПД цикла 1-2-3-4-1. Газ получал от нагревателя тепло на участке 1-2, отдавал холодильнику – на участке 3-4. Поскольку процесс 1-2 изобарический, газ получил в этом процессе количество теплоты

$$Q_н = \frac{5}{2}\nu R\left(T_2 - T_1\right).$$

Процесс 3-4 – изохорический, поэтому газ отдал холодильнику в этом процессе количество теплоты

$$Q_x = \frac{3}{2}\nu R\left(T_3 - T_4\right)$$

Поэтому КПД цикла 1-2-3-4-1 равен

$$\eta = 1 - \frac{Q_x}{Q_н} = 1 - \frac{3(T_3 - T_4)}{5(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{3\left(\frac{T_3}{T_2} - \frac{T_4}{T_2}\right)}{5\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)}$$

Используя теперь данные в условии задачи КПД, найдем

$$\frac{T_4}{T_2} = 1 - \eta_1, \ \frac{T_4}{T_1} = 1 - \eta_3, \ \frac{T_1}{T_2} = \frac{1-\eta_1}{1-\eta_3}$$

В результате получим для КПД цикла 1-2-3-4-1

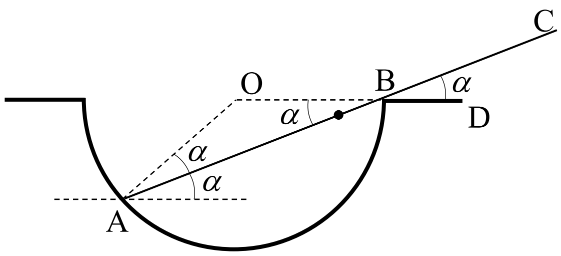
$$\eta = 1 - \frac{3\left((1-\eta_2) - (1-\eta_1)\right)}{5\left(1 - \frac{1-\eta_1}{1-\eta_3}\right)} = 1 - \frac{3(\eta_1 - \eta_2)(1-\eta_3)}{5(\eta_1 - \eta_3)} = 0,4$$

Критерии проверки (максимальная оценка за задачу – 5 баллов)
1. Использовано правильное соотношение для КПД цикла Карно – 1 балл
2. Правильные формулы для КПД циклов Карно с разными температурами нагревателя и холодильника – 1 балл
3. Правильно определены нагреватель и холодильник в цикле 1-2-3-4-1 – 1 балл
4. Правильные соотношения для КПД цикла 1-2-3-4-1 через температуры газа в разных состояниях – 1 балл
5. Правильный ответ для КПД цикла 1-2-3-4-1 (формула и число) – 1 балл
Оценка за задачу складывается из оценок по данным критериям

5. Здесь можно пойти традиционным методом – силы, моменты, условие равновесия… Но технически оказывается более простым нахождение минимума потенциальной энергии.

Положению равновесия любого тела отвечает минимум его потенциальной энергии. Давайте найдем потенциальную энергию как функцию угла α, а потом найдем минимум этого выражения. Но сначала некоторые геометрические действия.

Раз угол между стержнем и верхней плоскостью лунки равен α, то угол между нижней тоской стержня и горизонталью тоже равен α. Но углу α равен и угол между стержнем и направлением на центр лунки из нижней точки стержня (угол OAB). Действительно, углы OBA и CBD равны как вертикальные, а углы OAB и OBA равны как углы при основании равнобедренного треугольника AOB. Поэтому нижняя точка стержня поднята над нижней точкой лунки на величину



$$R - R\sin 2\alpha$$

а центр тяжести стержня (показан точкой на рисунке) на величину $L\sin\alpha$ над этой точкой. Поэтому потенциальная энергия стержня относительно нижней точки лунки как функция угла наклона стержня α равна

$$\Pi(\alpha) = mgh = mg\left(R(1 - \sin 2\alpha) + L\sin\alpha\right)$$

Дифференцируя эту функцию по α и приравнивая производную к нулю, получим

$$-2R\cos 2\alpha + L\cos\alpha = 0$$

После простейших преобразований это равенство приводится к следующему квадратному равнению относительно $\cos\alpha$:

$$\cos^2\alpha - \frac{L}{4R}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0$$

Решая это квадратное уравнение, получим

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{8R}\left(L + \sqrt{L^2 + 32R^2}\right)\right)$$

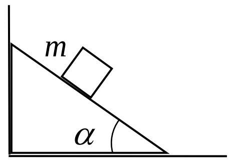
(второй корень является отрицательным, у нас же угол α заведомо острый с положительным косинусом).

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

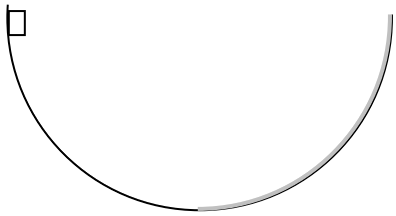
1. Правильная идея решения – использование условия минимума потенциальной энергии или уравнений статики - 1 балл
2. Правильное геометрически нахождение всех углов (как в приведенном выше решении, или при решении через силы, между силами) – 1 балл
3. Правильно найдена потенциальная энергия стержня (или правильные уравнения статики) – 1 балл
4. Правильное уравнение для нахождение тригонометрической функции угла α – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл.
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Оценка работы
Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 25 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 25.

Решения и критерии оценивания
Очный отборочный тур олимпиады «Росатом» в регионах РФ, 2024-2025 учебный год, физика, 11 класс

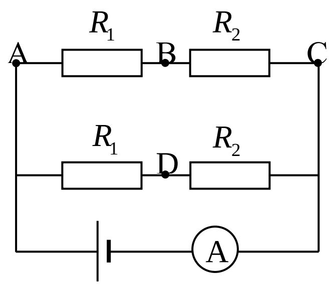


1. Около вертикальной стенки на гладком горизонтальном полу находится клин с углом наклона α. На наклонную грань клина кладут тело массой m (рисунок). Найти силу, с которой клин действует на вертикальную стенку. При каком угле α эта сила максимальна?

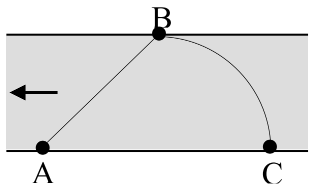


2. Точечное тело соскальзывает по внутренней поверхности полусферы с высоты, равной ее радиусу (см. рисунок). Одна половина полсферы (та, по которой тело начало движение) - гладкая, на второй между телом и поверхностью действует сила трения (коэффициент трения μ). Найти ускорение тела в тот момент, когда оно только перешло на шероховатую поверхность.

3. С одноатомным идеальным газом проводят следующий циклический процесс. (1) Изобарическое расширение. (2) Изохорическое охлаждение. (3) Адиабатическое сжатие, в результате которого газ возвращается в начальное состояние. Известно, что работа газа в изобарическом процессе была в n раз больше изменения внутренней энергии газа в адиабатическом процессе. Найти КПД цикла.

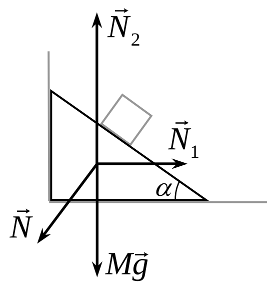


4. Электрическая цепь, схема которой дана на рисунке, состоит из двух одинаковых резисторов R_1, двух одинаковых резисторов R_2, идеального источника напряжения и идеального амперметра. Известно, что если соединить проводом, не имеющим сопротивления, точки A и D, амперметр покажет силу тока $I_1 = 0,25$ A. Если соединить проводом, не имеющим сопротивления, точки B и D, амперметр покажет силу тока $I_2 = 0,2$ A. Найти отношение сопротивлений резисторов. Какую силу тока покажет амперметр, если соединить проводом, не имеющим сопротивления, точки C и D?



5. Три города A, B и C расположены на берегу реки, расстояние между берегами которой равно h. На берегах реки находятся три города A, B и C. Города A и C расположены на одном берегу, и отрезок AC равен удвоенному расстоянию между берегами. Город B расположен на другом берегу реки так, что его «проекция» на другой берег находится ровно посередине между городами A и C (см. рисунок). Между городами по замкнутому пути плывет лодка, скорость которой в стоячей воде в два раза больше скорости течения. Сначала лодка плывет по маршруту A-C-B-A, причем участки траектории лодки AC и BC – прямые, участок CB – четверть окружности радиуса h (см. рисунок). Потом лодка плывет по тому же маршруту, но проходит его в обратном направлении A-B-C-A (см. рисунок). На какой из них - A-B-C-A или A-C-B-A - лодка затратит меньшее время и во сколько раз? Направление течения реки показано стрелкой.

Решения и критерии оценивания решений задач



1. Силы, действующие на клин, показаны на первом рисунке. Это – сила тяжести $M\vec{g}$ (M - масса клина), сила реакции со стороны тела $\vec{N}$, сила реакции со стороны стенки $\vec{N}_1$, сила реакции со стороны пола $\vec{N}_2$ (см. рисунок), причем все силы реакции направлены перпендикулярно поверхностям, поскольку все они гладкие. Нам нужно найти силу, действующую со стороны клина на стенку, которая по величине равна N_1.

Поскольку сумма сил, действующих на клин, равна нулю (клин покоится), то в проекциях на горизонтальное направление это дает

$$N_1 = N\sin\alpha$$

Чтобы найти силу N рассмотрим второй закон Ньютона для тела. На него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции со стороны клина $\vec{N}'$, равная по величине и противоположно направленная силе $\vec{N}$. Второй закон Ньютона для тела имеет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}'$$

Проецируя этот закон на направление, перпендикулярное наклонной грани клина, получим

$$N = mg\cos\alpha$$

Отсюда находим силу, действующую со стороны клина на стенку

$$N_1 = mg\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}mg\sin 2\alpha$$

Отсюда следует, что эта сила максимальна при $\alpha = 45°$.

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильно понято, что надо рассматривать условие равновесия клина - 1 балл
2. Правильно расставлены силы, действующие на клин – 1 балл
3. Правильная связь силы, действующей со стороны клина на стенку, и силы реакции, действующей со стороны клина на тело – 1 балл
4. Правильный ответ для силы, действующей со стороны клина на стенку – 1 балл
5. Правильный вывод относительно угла, при котором эта сила максимальна – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

2. Поскольку в нижней точке полусферы тело перейдет на шероховатую кривую поверхность, у него будет меняться и величина и направление скорости. Поэтому у тела будет и нормальное a_n (центростремительное, направленное к центру полусферы), и тангенциальное a_τ (направленное противоположно его скорости) ускорение:

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \qquad a_\tau = \frac{F_{тр}}{m}$$

где v - скорость тела в нижней точке, R - радиус полусферы, $F_{тр}$ - сила трения, действующая на тело в нижней точке, m - масса тела.

Скорость тела найдем по теореме об изменении кинетической энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgR \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2gR}$$

В результате нормальное ускорение тела оказывается таким $a_n = 2g$.

Сила трения определяется законом Кулона-Амонтона $F_{тр} = \mu N$, где μ - коэффициент трения между телом и поверхностью шероховатой части полусферы, N - сила реакции, которую можно найти из проекции второго закона Ньютона в нижней точке на ось, направленную к центру полусферы

$$ma_n = N - mg \qquad \Rightarrow \qquad N = 3mg \qquad \Rightarrow \qquad F_{тр} = 3\mu g .$$

Отсюда находим ускорение тела

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{4g^2 + 9\mu^2 g^2} = g\sqrt{4 + 9\mu^2}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильно найдена скорость тела в нижней точке – 1 балл
2. Правильно найдена нормальная компонента ускорения – 1 балл
3. Правильно найдена сила реакции в нижней точке – 1 балл
4. Правильно найдена тангенциальная компонента ускорения – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

3. Найдем работу A_c, совершенную газом за цикл, и количество теплоты $Q_н$, полученное газом от нагревателя в течение цикла, а затем согласно определению

$$\eta = \frac{A_c}{Q_н}$$

найдем коэффициент полезного действия цикла.

В рассмотренном цикле газ получает тепло от нагревателя в изобарическом процессе, а отдает холодильнику в изохорическом. Пусть в изобарическом процессе газ совершил работу A. Тогда количество теплоты, полученное газом в этом процессе (которое и представляет собой количество теплоты, полученное в течение цикла от нагревателя), составляет 5/2 от этой работы

$$Q_н = \frac{5}{2}A$$

Работу газа за цикл можно найти как разность работы газа в изобарическом процессе и работы, совершенной внешними силами над газом в процессе адиабатическом. А поскольку последняя равна изменению внутренней энергии газа в этом процессе, то

$$A_c = A - \Delta U_Q = A - \frac{A}{n} = \frac{(n-1)A}{n}$$

В результате из определения КПД получаем

$$\eta = \frac{5(n-1)}{2n}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Правильное понимание того, что такое термодинамический КПД циклического процесса - 1 балл
2. Правильное понимание, что в течение цикла газ получает тепло от нагревателя в изобарическом процессе – 1 балл
3. Правильная связь количества теплоты и работы в изобарическом процессе – 1 балл
4. Правильная связь работы за цикл с параметрами изобарического процесса – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

4. Когда точки B и D соединяют проводником, ток через этот проводник не идет благодаря симметрии цепи. Находя сопротивление данной цепи в этом случае

$$R_{BD} = \frac{1}{2}\left(R_1 + R_2\right)$$

найдем и силу тока, текущего через амперметр

$$I_2 = \frac{2\varepsilon}{R_1 + R_2} \qquad (*)$$

Если проводником соединить точки A и D, сопротивление цепи будет равно

$$R_{AD} = \frac{\left(R_1 + R_2\right)R_2}{R_1 + 2R_2}.$$

Отсюда находим силу тока, текущего в этом случае через амперметр

$$I_1 = \frac{\varepsilon\left(R_1 + 2R_2\right)}{\left(R_1 + R_2\right)R_2} \qquad (**)$$

Деля токи (*) и (**) друг на друга, найдем отношение сопротивлений резисторов

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{2\left(I_1 - I_2\right)}{I_2} = \frac{1}{2} \qquad (***)$$

При замыкании проводником точек C и D сопротивление цепи будет равно

$$R_{CD} = \frac{\left(R_1 + R_2\right)R_1}{2R_1 + R_2},$$

поэтому амперметр покажет следующий ток

$$I_3 = \frac{\varepsilon\left(2R_1 + R_2\right)}{\left(R_1 + R_2\right)R_1} \qquad (4*)$$

Деля токи (*) и (4*) друг на друга, получим

$$\frac{I_3}{I_2} = 1 + \frac{R_2}{2R_1}$$

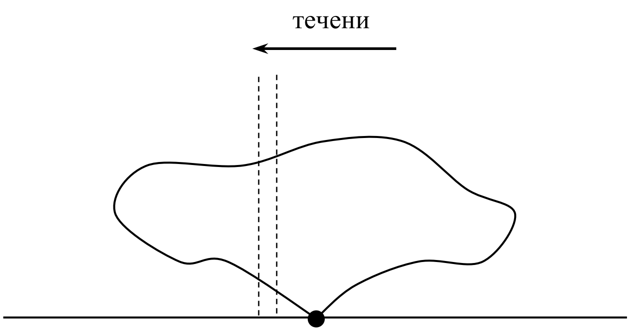
Подставляя в эту формулу отношение сопротивлений резисторов (***), найдем окончательно

$$I_3 = \frac{\left(4I_1 - 3I_2\right)I_2}{4\left(I_1 - I_2\right)} = 0,4 \text{ А}$$

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)
1. Получена правильная формула для тока I_1 через параметры цепи - 1 балл
2. Получена правильная формула для тока I_2 через параметры цепи – 1 балл
3. Правильно найдено отношение сопротивлений резисторов – 1 балл
4. Получена правильная формула для тока I_3 через параметры цепи – 1 балл

5. Правильный ответ (формула и число) – 1 балл
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

5. Докажем, что времена движения лодки по любой замкнутой траектории, проходимой по и против часовой стрелки, одинаковы. Даже если траектория несимметрична по отношению к течению (как в рассмотренной задаче).



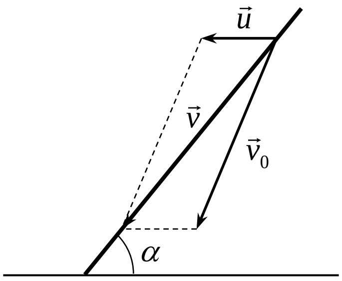
Пусть лодка движется по траектории, показанной на рисунке. Рассмотрим участок траектории между двумя близкими прямыми, перпендикулярными берегам (см. рисунок; прямые возьмем настолько близкими, что участки траектории, заключенные между ними, можно считать прямыми). Пусть один из участков траектории, заключенный между этими прямыми, расположен под углом α к течению и имеет длину Δx. Найдем разность времени прохождения этого участка при движении в одну и в другую стороны.

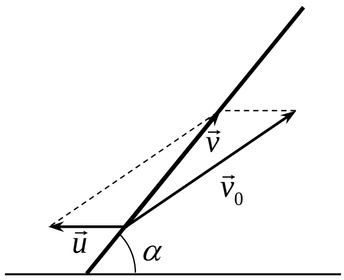
Время движения по рассматриваемому участку траектории находится из очевидных соотношений

$$\Delta t^{туда} = \frac{\Delta x}{v^{туда}}; \qquad \Delta t^{обратно} = \frac{\Delta x}{v^{обратно}} \tag{1}$$

где $v^{туда}$ и $v^{обратно}$ - скорости лодки относительно земли при ее движении туда и обратно. Скорости лодки относительно земли при ее движении туда и обратно найдем по закону сложения скоростей

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u} \tag{2}$$





где $\vec{v}_0$ - скорость лодки относительно воды, $\vec{u}$ - скорость течения. Треугольники скоростей, отвечающие закону (2) для прохождения рассматриваемого участка пути при его прохождении туда и обратно, показаны на рисунке. Из этих треугольников находим

$$v^{туда} = u\cos\alpha + \sqrt{v_0^2 - u^2\sin^2\alpha}\,, \qquad v^{обратно} = -u\cos\alpha + \sqrt{v_0^2 - u^2\sin^2\alpha} \tag{3}$$

Поэтому из (1), (3) получаем для разности времен

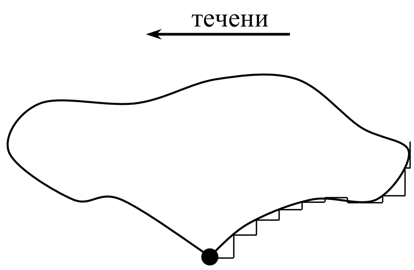
$$\Delta t^{туда} - \Delta t^{обратно} = \frac{\Delta x}{u\cos\alpha + \sqrt{v_0^2 - u^2\sin^2\alpha}} - \frac{\Delta x}{-u\cos\alpha + \sqrt{v_0^2 - u^2\sin^2\alpha}} = -\frac{2u\Delta l}{v^2 - u^2} \tag{4}$$

где $\Delta l = \Delta x\cos\alpha$ - расстояние между рассматриваемыми прямыми. Из этой формулы следует, что разность времен прохождения малого участка траектории, заключенного между двумя близкими прямыми, перпендикулярными берегам реки, не зависит от угла наклона этого участка траектории к направлению течения. А поскольку траектория замкнута, между рассматриваемыми прямыми есть еще один малый участок траектории, который лодка проходит в противоположном направлении и для которого разность времен прохождения «туда» и «обратно» определяется соотношением (4), но с другим знаком. Поэтому время прохождения по двум таким участкам по и против часовой стрелки одинаково. Отсюда и следует сделанное выше утверждение, что время движения лодки по любой замкнутой траектории одинаково при ее прохождении в одном и противоположном направлении.

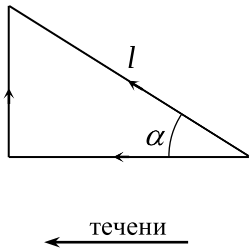
Поэтому времена движения лодки между городами A, B, C, A по маршруту A-B-C-A и по маршруту A-C-B-A одинаковы независимо от соотношения скорости лодки в стоячей воде и скорости течения.

Неправильное решение

Возможно, будут предлагаться следующее неправильное доказательство того, что времена движения по любой замкнутой траектории при ее прохождении «по часовой стрелке» и «против часовой стрелки» одинаковы.



1. Траектория будет разбиваться на малые участки, параллельные и перпендикулярные скорости течения (см. рисунок; показано такое разбиение на одной из частей траектории)
2. При таком разбиении на бесконечно малые участки время движения по «кривой» траектории равно времени движения по «ступенчатой».
3. Время движения по «ступенчатой» траектории складывается из времени движения по параллельным и перпендикулярным участкам.
4. Время прохождения перпендикулярных участков при движении «по часовой стрелке» и «против часовой стрелки» одинаково, поскольку эти участки проходятся симметрично по отношению к течению.
5. Суммарная длина параллельных участков, проходимых «по течению» и «против течения» - одинакова. А эти участки меняются друг с другом при прохождении траектории «по часовой стрелке» и «против часовой стрелки». Поэтому время прохождения параллельных участков траектории при движении «по» и «против» часовой стрелки одинаково.
6. Поэтому и одинаково время прохождения траектории «по» и «против» часовой стрелки.



Это решение неправильное. Неверным является пункт 2. Суммарное время движения по катетам не равно времени движения по гипотенузе независимо от того большие они или бесконечно малые. Действительно, на прохождение по катетам нужно время

$$t_1 = \frac{l\cos\alpha}{v+u} + \frac{l\sin\alpha}{\sqrt{v^2-u^2}}$$

где l - длина гипотенузы, v - скорость самолета относительно воздуха, u - скорость ветра. При прохождении по гипотенузе нужно время

$$t_2 = \frac{l}{-u\cos\alpha + \sqrt{v^2-u^2\sin\alpha}},$$

что не совпадает с t_1. Поэтому приведенное «решение», основанное на разбиении траектории на параллельные и перпендикулярные скорости ветра участки является неверным. За такое «решение» можно ставить только 1 балл по первому критерию.

Критерии оценивания решений задачи (максимальная оценка за решение – 5 баллов)

1. Использован закон сложения скоростей в векторной форме для нахождения скорости при движении по малому участку траектории при движении «туда» и «обратно» - 1 балл

2. Найдена скорость лодки относительно земли при движении по произвольно ориентированному по отношению к течению участку траектории – 1 балл.

3. Найдены времена прохождения рассматриваемого участка «туда» и «обратно» – 1 балл.

4. Доказано, что разность времен прохождения рассматриваемого участка «туда» и «обратно» не зависит от его ориентации по отношению к течению реки, а зависит только от скоростей и длины участка – 1 балл

5. Обосновано, что времена движения по маршрутам А-В-С-А и А-С-В-А одинаковы – 1 балл.
Оценка за решение задачи равна сумме оценок за перечисленные пункты.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценки задач. Максимальная оценка – 25 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 25.