

**Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
Отборочный тур отраслевой физико-математической олимпиады  
школьников «Росатом», математика, 10 класс**

**Вариант 1.**

1. Вася обратил внимание на величину угла, который образуют минутная и часовая стрелки его наручных часов в тот момент, когда они показывали время 15 часов 12 мин. Найти этот угол. Сколько раз до полуночи минутная и часовая стрелки составят тот же угол?

2. Решить неравенство

$$4(\sin x \sin 2x + \sin 2x \sin 3x + \sin 3x \sin x) + 3 \leq \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x.$$

3. Найти наименьшее число вида  $a = n^3 + 7n^2 + 11n + 5$  с натуральным  $n$ , кратное 2025.

4. Для числа  $a = 5^3 \cdot 7^4 + 5^2 \cdot 7^3$  посчитали сумму всех его положительных делителей. Найти последние две цифры в ее десятичной записи.

5. Проекции боковых ребер треугольной пирамиды  $ABCD$  с вершиной  $D$  на плоскость ее основания равны 1, 2 и 3. Сумма углов наклона боковых ребер к основанию равна  $90^\circ$ . Найти высоту пирамиды.

**Ответы и решения**

**Задача 1.** Определим угловые скорости часовой и минутной стрелки в градусах за минуту. Часовая стрелка за 60 минут проходит двенадцатую часть круга, то есть  $\frac{1}{12} \cdot 360^\circ$ ; за одну минуту она проходит  $\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{12} \cdot 360^\circ = 0,5^\circ$ . Минутная стрелка за 1 минуту проходит шестидесятую часть круга, то есть  $\frac{1}{60} \cdot 360^\circ = 6^\circ$ . Таким образом угловые скорости часовой и минутной стрелки составляют  $\frac{1}{2}$  (град/мин) и 6 (град/мин) соответственно.

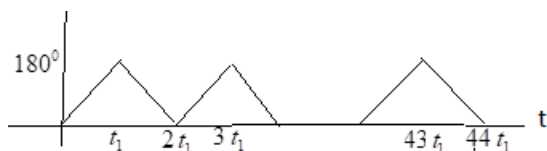
К моменту времени 15 часов 12 минут часовая стрелка двигалась от вертикального положения (в 12 часов) в течении 3 часа 12 минут (то есть, 192 мин) и составляла с ним угол  $192^\circ \cdot \frac{1}{2} = 96^\circ$ . За то же время минутная стрелка повернулась на  $192^\circ \cdot 6 = 1152^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 72^\circ$  градуса и составляла с вертикальным положением угол  $72^\circ$ . Таким образом, угол между стрелками в 15 часов 12 минут составляет  $96^\circ - 72^\circ = 24^\circ$ .

Обозначим  $t$  момент времени в минутах, отсчитываемый от полуночи и до полуночи следующего дня, тогда  $t \in [0; 1140]$ . Обозначим  $\alpha(t)$  градусную меру угла между стрелками в момент времени  $t$ . Построим график зависимости  $\alpha(t)$  от  $t$ . Заметим, что  $\alpha(t)$  не меньше  $0^\circ$  и не превышает  $180^\circ$ , при этом между моментами времени, когда  $\alpha(t) = 0^\circ$  и когда  $\alpha(t) = 180^\circ$ , функция  $\alpha(t)$  монотонна и изменяется линейно.

В самом деле, при  $t = 0$  в полночь  $\alpha(t) = 0^\circ$ , затем  $\alpha(t)$  увеличивается со скоростью  $6 - \frac{1}{2} = 5,5$ , равной разности угловых скоростей минутной и часовой стрелки, пока не достигнет значения  $\alpha(t) = 180^\circ$  в некоторый момент времени  $t_1 = \frac{180}{5,5} = \frac{360}{11}$ . Затем функция  $\alpha(t)$  убывает также со скоростью  $6 - \frac{1}{2} = 5,5$ , равной разности угловых скоростей минутной и часовой стрелки, пока не достигнет значения  $\alpha(t) = 0^\circ$  в момент времени  $2t_1$ . После этого

$\alpha(t)$  опять увеличивается с той же скоростью, пока не достигнет значения  $180^\circ$ , и затем опять убывает до  $0^\circ$ , и так далее.

Таким образом, на отрезке  $[0; t_1]$  функция  $\alpha(t)$  линейная:  $\alpha(t) = \frac{11}{2}t$ . На отрезке  $[t_1; 2t_1]$  функция  $\alpha(t)$  также линейная:  $\alpha(t) = -\frac{11}{2}(t - 2t_1)$ . На последующие промежутки  $[kt_1; (k+1)t_1], k = 2, 3, \dots, 43$  функция продолжается периодически с периодом  $T = 2t_1$ . Моменту времени  $t = 44t_1$  соответствует полночь.



Моменту времени  $t_0 = 15 \text{ час } 12 \text{ мин} = 912 \text{ мин}$  соответствует точка на отрезке  $[27t_1; 28t_1]$ .

На всех оставшихся до полуночи интервалах  $[kt_1; (k+1)t_1], k = 28, 29, \dots, 43$  значение  $\alpha(t_0) = 24$  достигается по одному разу на каждом из отрезков, т.е. 16 раз.

**Ответ:** 1)  $24^\circ$ , 2) 16 раз.

**Задача 2.** Введем обозначения  $a = \sin x, b = \sin 2x, c = \sin 3x$  и применим формулы косинуса двойного угла

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 1 - 2 \sin^2 x = 1 - 2a^2 \\ \cos 4x &= 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2b^2 \\ \cos 6x &= 1 - 2 \sin^2 3x = 1 - 2c^2 \end{aligned}$$

Запишем неравенство из условия задачи в новых обозначениях и равносильно преобразуем его

$$\begin{aligned} 4(ab + bc + ca) + 3 \leq 3 - 2(a^2 + b^2 + c^2) &\Leftrightarrow 4(ab + bc + ca) + 2(a^2 + b^2 + c^2) \leq 0 \Leftrightarrow \\ &(a + b + c)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Квадрат действительной величины не меньше нуля, тогда последнее неравенство выполняется, если и только если  $a + b + c = 0$ . Преобразуем левую часть этого равенства.

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = \sin 2x (2 \cos x + 1).$$

Таким образом, неравенство из условия равносильно равенству  $\sin 2x (2 \cos x + 1) = 0$ , а множество его решений – это объединение серий решений простейших тригонометрических уравнений  $\sin 2x = 0$  и  $\cos x = -\frac{1}{2}$ .

Если  $\sin 2x = 0$ , то  $2x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$  и  $x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

Если  $\cos x = -\frac{1}{2}$ , то  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + \pi t, t \in \mathbb{Z}$ .

**Ответ:**  $x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$  или  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + \pi t, t \in \mathbb{Z}$ .

**Задача 3.** Заметим, что  $2025 = 5^2 \cdot 3^4$ , и разложим  $a$  на множители.

$$a = n^3 + 1 + 7(n^2 - 1) + 11(n+1) = (n+1)(n^2 + 6n + 5) = (n+1)^2(n+5)$$

Так как  $a$  делится на 2025, то  $(n+1)^2(n+5)$  делится на 5. Из этого следует, что ровно одно число среди  $n+1$  и  $n+5$  кратно 5. В самом деле, если бы оба числа делились на 5, то и их разность  $(n+5) - (n+1) = 4$  тоже делилась бы на 5.

Аналогично доказывается, что ровно одно число среди  $n+1$  и  $n+5$  кратно 3.

Рассмотрим всевозможные случаи делимости этих величин.

Случай 1. Число  $n+1$  делится на 5 и на 3.

Тогда  $n + 5$  не делится ни на 5, ни на 3, и для деления  $a$  на 2025 необходимо, чтобы число  $n + 1$  делилось на  $5 \cdot 3^2 = 45$ .

Тогда  $n + 1 = 45s$  для некоторого  $s \in \mathbb{N}$ .  $n = 45s - 1 \geq 45 - 1 = 44$ .

Тогда  $a \geq (44 + 1)^2(44 + 5) = 2025 \cdot 49$ .

Минимальное значение  $a_{min} = 2025 \cdot 49$  достигается при  $n_{min} = 44$ .

Случай 2. Число  $n + 5$  делится на 5 и на 3.

Тогда  $n + 1$  не делится ни на 5, ни на 3, и  $n + 5$  должно делиться на 2025.

Тогда  $n + 5 = 2025s$  для некоторого  $s \in \mathbb{N}$ .

$n = 2025s - 5 \geq 2025 - 5 = 2020$ . Тогда  $a \geq (2020 + 1)^2(2025 + 5) = 2025 \cdot 2021^2$ .

$$a > a_{min}$$

Случай 3. Число  $n + 1$  делится на 5, а число  $n + 5$  делится на 3.

Тогда  $n + 5$  делится на  $3^4$  и для некоторых натуральных  $s, t$  выполнено

$$\begin{cases} n + 1 = 5s \\ n + 5 = 81t \end{cases}$$

Вычтя из второго равенства первое, получаем линейное уравнение в целых числах  $81t - 5s = 4$ . Решим его

$$81t - 4 = 5s : 5 \rightarrow t - 4 : 5 \rightarrow t = 5u + 4, \quad u \in \mathbb{Z}$$

$$5s = 81t - 4 = 81(5u + 4) - 4 = 81 \cdot 5u + 80 \cdot 4 \rightarrow s = 81u + 64, \quad u \in \mathbb{Z}$$

Тогда  $n = 5s - 1 = 5(81u + 64) - 1 = 405u + 319, u \in \mathbb{Z}$ .

Так как  $n$  натуральное, то  $u \geq 0, n \geq 319$ .

Тогда  $a \geq (319 + 1)^2(319 + 5) = 320^2 \cdot 324 = 2025 \cdot 64^2 \cdot 4$ .

$$a > a_{min}$$

Случай 4. Число  $n + 1$  делится на 3, а число  $n + 5$  делится на 5.

Тогда  $n + 1$  делится на  $3^2$ ,  $n + 5$  делится на  $5^2$  и для некоторых натуральных  $s, t$  выполнено

$$\begin{cases} n + 1 = 9s \\ n + 5 = 25t \end{cases}$$

Вычтя из второго равенства первое, получаем линейное уравнение в целых числах  $25t - 9s = 4$ . Решим его

$$25t - 4 = 9s : 9 \rightarrow -2t - 4 : 9 \rightarrow 2t + 4 : 9 \rightarrow 2t = 9u - 4, \quad u \in \mathbb{Z}$$

$$9u - 1 : 2 \rightarrow u : 2 \rightarrow u = 2v, \quad v \in \mathbb{Z}$$

$$2t = 18v - 4 \rightarrow t = 9v - 2, \quad v \in \mathbb{Z}$$

$$9s = 25t - 4 = 25(9v - 2) - 4 = 25 \cdot 9v - 54 \rightarrow s = 25v - 6, \quad v \in \mathbb{Z}$$

Тогда  $n = 9s - 1 = 9(25v - 6) - 1 = 225v - 55, v \in \mathbb{Z}$ .

Так как  $n$  натуральное, то  $v \geq 0, n \geq 225 - 55 = 170$ .

Тогда  $a \geq (170 + 1)^2(170 + 5) = 171^2 \cdot 175 = 2025 \cdot 19^2 \cdot 7$ .

$$a > a_{min}$$

Все четыре возможных случая делимости чисел  $n + 1$  и  $n + 5$  рассмотрены и в каждом из них минимальное возможное  $a$  не меньше, чем  $a_{min} = 2025 \cdot 49$ . При этом  $a_{min}$  достигается при  $n = 44$ .

**Ответ:**  $a_{min} = 2025 \cdot 49 = 99225$ .

**Задача 4.** Согласно основной теореме алгебры любое натуральное число  $a$  можно представить в виде  $a = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_m^{r_m}$ , где  $p_j$  – различные простые числа,  $r_j$  и  $m$  – целые неотрицательные числа (при  $m = 0$  число  $a = 1$ ). Произвольный натуральный делитель числа  $a$  тогда имеет вид  $p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \dots \cdot p_m^{t_m}$ , для некоторых  $0 \leq t_j \leq r_j$ .

Вычислим сумму  $S_a$  всех натуральных делителей числа  $a$ :

$$S_a = \sum_{t_1=0}^{r_1} \sum_{t_2=0}^{r_2} \dots \sum_{t_m=0}^{r_m} p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \dots \cdot p_m^{t_m} = \left( \sum_{t_1=0}^{r_1} p_1^{t_1} \right) \cdot \left( \sum_{t_2=0}^{r_2} p_2^{t_2} \right) \cdot \dots \cdot \left( \sum_{t_m=0}^{r_m} p_m^{t_m} \right) =$$

$$= (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{r_1}) \cdot (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{r_1}) \cdot \dots \cdot (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{r_1}).$$

Каждый множитель – это сумма членов геометрической прогрессии, значит

$$S_a = \frac{(p_1^{r_1+1} - 1) \cdot (p_2^{r_2+1} - 1) \cdot \dots \cdot (p_m^{r_m+1} - 1)}{(p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) \cdot \dots \cdot (p_m - 1)}$$

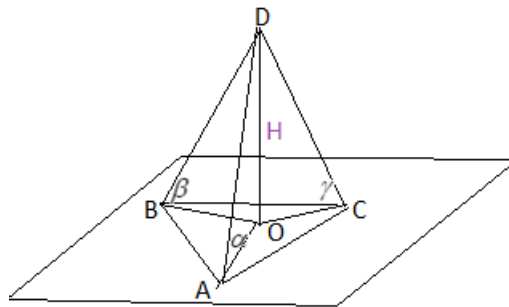
В условии задачи  $a = 5^3 \cdot 7^4 + 5^2 \cdot 7^3 = 5^2 \cdot 7^3 \cdot (5 \cdot 7 + 1) = 5^2 \cdot 7^3 \cdot 36 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3$ , тогда

$$S_a = \frac{(2^3 - 1) \cdot (3^3 - 1) \cdot (5^3 - 1) \cdot (7^4 - 1)}{(2 - 1) \cdot (3 - 1) \cdot (5 - 1) \cdot (7 - 1)} = \frac{7 \cdot 26 \cdot 124 \cdot 50 \cdot 48}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} = 7 \cdot 26 \cdot 62 \cdot 10$$

Так как  $S_a$  делится на 100, до заканчивается цифрами 00.

**Ответ:** 00.

**Задача 5.** Обозначим  $a, b, c$  соответственно Проекции боковых ребер  $DA, DB, DC$  треугольной пирамиды  $ABCD$  с вершиной  $D$  на плоскость ее основания обозначим  $a, b, c$  соответственно. Углы между плоскостью основания и ребрами  $DA, DB, DC$  обозначим  $\alpha, \beta, \gamma$  соответственно. Обозначим  $O$  основание высоты пирамиды из вершины  $D$ . Согласно условию,  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ .



Так как высота  $DO$  перпендикулярна плоскости основания  $ABC$ , то она перпендикулярна отрезкам  $AO, BO, CO$ , лежащим в этом основании. Тогда треугольники  $AOD, BOD, COD$  – прямоугольные с прямым углом при вершине  $O$ . Следовательно, можно выразить длину  $H$  высоты  $DO$  тремя способами:

$$H = a \cdot \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{a}$$

$$H = b \cdot \operatorname{tg} \beta \rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{H}{b}$$

$$H = c \cdot \operatorname{tg} \gamma = c \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha - \beta) = c \cdot \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{c}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}.$$

Применим формулу тангенса суммы углов, тогда

$$H = c \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = c \cdot \frac{1 - \frac{H}{a} \cdot \frac{H}{b}}{\frac{H}{a} + \frac{H}{b}} = c \cdot \frac{ab - H^2}{H \cdot (a + b)}.$$

$$H^2 \cdot (a + b) = cab - cH^2 \rightarrow H^2 = \frac{abc}{a + b + c} \rightarrow H = \sqrt{\frac{abc}{a + b + c}}.$$

В условии задачи  $a = 1, b = 2, c = 3$ , тогда  $H = \sqrt{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1+2+3}} = 1$ .

**Ответ:**  $H = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} = 1$ .

### Вариант 2

1. Вася обратил внимание на величину угла, который образуют минутная и часовая стрелки его наручных часов в тот момент, когда они показывали время 16 часов 16 мин. Найти этот угол. Сколько раз до полуночи минутная и часовая стрелки составят тот же угол?

**Ответ:** 1)  $32^\circ$ , 2) 14 раз.

2. Решить неравенство

$$4(\sin x \cos^2 x + \cos^2 x \sin 3x + \sin 3x \sin x) + 2 \leq \cos 2x - 2 \cos^4 x + \cos 6x.$$

**Ответ:**  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$  или  $x = (-1)^{m+1} \arcsin \frac{1}{4} + \pi m, m \in Z$ .

3. Найти наименьшее число вида  $a = n^3 + 5n^2 + 8n + 4$  с натуральным  $n$ , кратное 3969.

**Ответ:**  $a_{\min} = 3969 \cdot 62 = 246078$ .

4. Для числа  $a = 3^4 \cdot 5^5 + 3^3 \cdot 5^4$  посчитали сумму всех его положительных делителей. Найти последние две цифры в ее десятичной записи.

**Ответ:** 40.

5. Проекции боковых ребер треугольной пирамиды  $ABCD$  с вершиной  $D$  на плоскость ее основания равны 2, 3 и 5. Сумма углов наклона боковых ребер к основанию равна  $90^\circ$ . Найти высоту пирамиды.

**Ответ:**  $H = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} = \sqrt{3}$ .

### Вариант 3

1. Вася обратил внимание на величину угла, который образуют минутная и часовая стрелки его наручных часов в тот момент, когда они показывали время 11 часов 10 мин. Найти этот угол. Сколько раз до полуночи минутная и часовая стрелки составят тот же угол?

**Ответ:** 1)  $85^\circ$ , 2) 23 раза.

2. Решить неравенство

$$4(\cos x \cos 2x + \cos 2x \cos 3x + \cos 3x \cos x) + 3 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x \leq 0.$$

**Ответ:**  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$  или  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z$ .

3. Найти наименьшее число вида  $a = n^3 + 4n^2 + 5n + 2$  с натуральным  $n$ , кратное 1225.

**Ответ:**  $a_{\min} = 1225 \cdot 36 = 44100$ .

4. Для числа  $a = 2^5 \cdot 5^6 - 2^4 \cdot 5^5$  посчитали сумму всех его положительных делителей. Найти последние две цифры в ее десятичной записи.

**Ответ:** 18.

5. Проекции боковых ребер треугольной пирамиды  $ABCD$  с вершиной  $D$  на плоскость ее основания равны 4, 5 и 6. Сумма углов наклона боковых ребер к основанию равна  $90^\circ$ . Найти высоту пирамиды.

Ответ:  $H = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} = 2\sqrt{2}$ .

#### Вариант 4

1. Вася обратил внимание на величину угла, который образуют минутная и часовая стрелки его наручных часов в тот момент, когда они показывали время 9 часов 50 мин. Найти этот угол. Сколько раз до полуночи минутная и часовая стрелки составят тот же угол?

Ответ: 1)  $5^\circ$ , 2) 25 раз.

2. Решить неравенство

$$4(\cos x \sin 2x + \sin 2x \cos 3x + \cos 3x \cos x) + 3 \leq \cos 4x - \cos 2x - \cos 6x.$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$  или  $x = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z$ .

3. Найти наименьшее число вида  $a = n^3 + 7n^2 + 16n + 12$  с натуральным  $n$ , кратное 225.

Ответ:  $a_{\min} = 225 \cdot 16 = 3600$ .

4. Для числа  $a = 3^5 \cdot 7^6 - 3^4 \cdot 7^5$  посчитали сумму всех его положительных делителей. Найти последние две цифры в ее десятичной записи.

Ответ: 09.

5. Проекции боковых ребер треугольной пирамиды  $ABCD$  с вершиной  $D$  на плоскость ее основания равны 3, 4 и 5. Сумма углов наклона боковых ребер к основанию равна  $90^\circ$ . Найти высоту пирамиды.

Ответ:  $H = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} = \sqrt{5}$ .

# Росатом 10 класс (Отборочный тур), Москва 17.11.2024

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

## Задача 1:

0 б – Неверно определен угол  $\alpha$  между часовой и минутной стрелкой.

1 б – Верно определен угол  $\alpha$  между часовой и минутной стрелкой и есть вычисления этого угла.

$\leq 1$  б – Нестрогие рассуждения при определении количества раз, когда угол между часовой и минутной стрелкой составляет  $\alpha$ .

$\leq 2$  б – Верно определен угол  $\alpha$ , но нестрогие рассуждения при определении  $n$  количества раз, когда угол между часовой и минутной стрелкой составляет  $\alpha$ , при этом  $n$  определено верно.

2 б – Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения, или присутствуют мелкие недочеты.

3 б - Задача решена верно.

## Задача 2:

0 б – Продвижение в решении несущественно.

1 б – Применена формула косинуса двойного угла и неравенство равносильно преобразовано к виду  $(a + b + c)^2 \leq 0$ .

2 б – Получено равенство  $a + b + c = 0$  и его левая часть разложена на множители. Решение неравенства из условия сведено к решению простейших тригонометрических уравнений.

2 б – Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения, или присутствуют мелкие недочеты.

3 б - Задача решена верно.

## Задача 3: Найти наименьшее $a = P(n)$ , кратное $k$ .

0 б – Рассмотрены частные случаи, нет существенных продвижений.

1 б –  $P(n)$  разложено на множители.

1 б – Рассмотрены некоторые остатки  $n$  и  $a$  при делении на некоторые простые делители числа  $k$ .

2 б – Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения, или присутствуют мелкие недочеты.

3 б - Задача решена верно.

## Задача 4:

1 б – Число  $a$  разложено на простые множители.

$\leq 2$  б – Получена и обоснована формула для подсчета суммы всех делителей числа (в общем случае для натурального  $n$  или в частном случае для числа  $a$ ).

2 б – Задача решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения, или присутствуют мелкие недочеты.

3 б - Задача решена верно.

## Задача 5:

0 б – Нарисован чертёж.

1 б – Нарисован верный чертёж, соответствующий условию, и записаны все необходимые формулы, связывающие высоту пирамиды, боковые ребра и углы.

$\leq 2$  б – Применена формула тангенса двойного угла, присутствуют попытки выразить высоту, но ответ не получен.

2 б - Задача решена с мелкими недочетами или одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б - Задача решена верно.