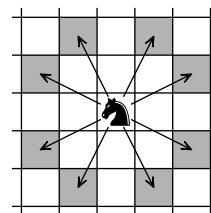


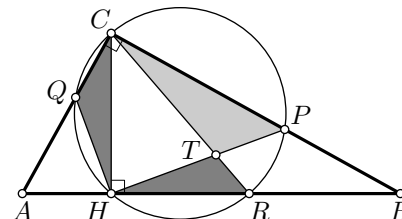
Задача 1. Можно ли расставить девять различных целых чисел в клетки таблицы 3×3 так, чтобы произведение чисел в каждой строке равнялось 2025 и произведение чисел в каждом столбце тоже равнялось 2025?

Задача 2. Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости расставить бесконечное количество шахматных коней (не более одного коня в клетку) так, чтобы каждый конь бил ровно 6 других?

Напомним, что шахматный конь бьёт 8 клеток, как показано на рисунке.



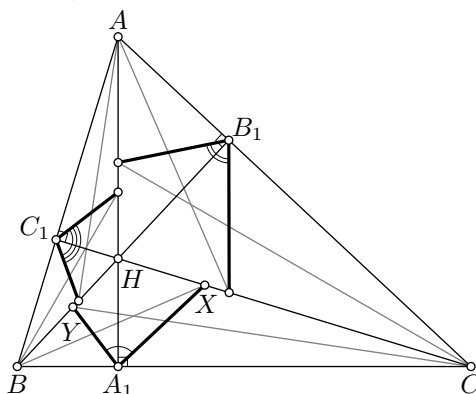
Задача 3. В треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту CH . Окружность, проходящая через точки C и H , повторно пересекает отрезки AC , CB и BH в точках Q , P и R соответственно. Отрезки HP и CR пересекаются в точке T . Что больше: площадь треугольника CPT или сумма площадей треугольников CQH и HTR ?



Задача 4. Каждая клетка квадрата 100×100 покрашена либо в белый, либо в чёрный цвет. Оказалось, что у каждой белой клетки ровно две соседних с ней по стороне клетки покрашены в белый цвет, а у каждой чёрной клетки ровно две соседних с ней по стороне клетки покрашены в чёрный цвет. Найдите максимальное возможное количество чёрных клеток.

Задача 5. У хозяйки есть кусок мяса, которым она хочет накормить трёх котиков. Раз в несколько секунд хозяйка отрезает кусочек мяса и скармливает его одному из котиков на свой выбор, причём каждый кусочек должен составлять одну и ту же долю куска, от которого его отрезают. Через некоторое время хозяйка убирает остаток мяса в холодильник. Может ли она скормить котикам поровну мяса?

Задача 6. Высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Биссектриса угла CBH пересекает отрезок CH в точке X , биссектриса угла BCH пересекает отрезок BH в точке Y . Обозначим величину угла XA_1Y через α . Аналогично определим β и γ . Найдите значение суммы $\alpha + \beta + \gamma$.



XXII устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 13 апреля.

Подробнее — на странице olympiads.mccme.ru/ustn/

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXVIII Московской математической олимпиады —
на сайте mmo.mccme.ru

ММО-2025, 9 класс, решения

Задача 1. Можно ли расставить девять различных целых чисел в клетки таблицы 3×3 так, чтобы произведение чисел в каждой строке равнялось 2025 и произведение чисел в каждом столбце тоже равнялось 2025? (М. Евдокимов)

Ответ: да, можно.

Решение. Разложим 2025 на простые множители: $2025 = 45^2 = 3^4 \cdot 5^2$. Один из возможных примеров:

1	3	$3^3 \cdot 5^2$
5	$-3^3 \cdot 5$	-3
$3^4 \cdot 5$	-5	-1

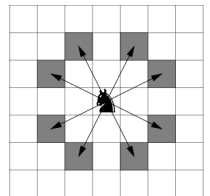
□

Комментарий. Не существует примеров, в которых все числа натуральные.

Задача 2. Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости расставить бесконечное количество шахматных коней (не более одного коня в клетку) так, чтобы каждый конь бил ровно 6 других?

Напомним, что шахматный конь бьёт 8 клеток, как показано на рисунке.

(А. Тертерян)



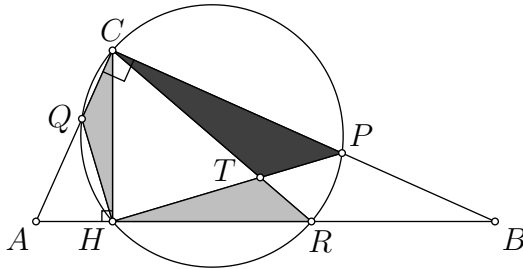
Ответ: да, можно.

Решение. Поставим коней во все клетки плоскости, кроме клеток каждой пятой вертикали. Несложно видеть, что каждый конь бьёт ровно 6 других.



Комментарий. Существуют и другие примеры.

Задача 3. В треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту CH . Окружность, проходящая через точки C и H , повторно пересекает отрезки AC , CB и BH в точках Q , P и R соответственно. Отрезки HP и CR пересекаются в точке T . Что больше: площадь треугольника CPT или сумма площадей треугольников CQH и HTR ?



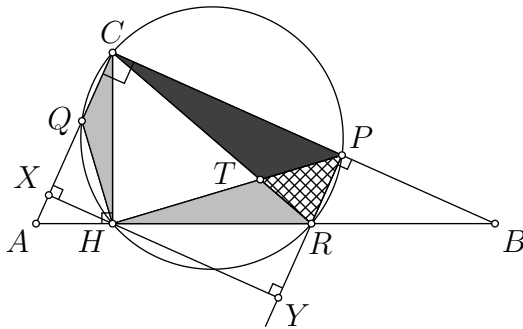
(М. Евдокимов)

Ответ: они равны.

Решение 1. Добавим к рассматриваемым площадям площадь треугольника PTR . Получим, что нужно проверить равенство

$$S_{CQH} + S_{HPR} = S_{CPR}.$$

Поскольку $\angle CHR = 90^\circ$, то CR — диаметр проведённой окружности, откуда $\angle CQR = \angle CPR = 90^\circ$. В четырёхугольнике $CPRQ$ три угла прямые, поэтому он является прямоугольником.



Опустим из точки H перпендикуляры HX и HY на прямые CQ и PR соответственно. Сумма их длин равна длине стороны CP прямоугольника. Следова-

тельно,

$$\begin{aligned} S_{CQH} + S_{HPR} &= \frac{HX \cdot CQ}{2} + \frac{HY \cdot PR}{2} = \frac{(HX + HY) \cdot PR}{2} = \\ &= \frac{XY \cdot PR}{2} = \frac{CP \cdot PR}{2} = S_{CPR}. \end{aligned} \quad \square$$

Решение 2. Добавим к рассматриваемым площадям площадь четырёхугольника $BPTR$. Получим, что нужно проверить равенство

$$S_{CQH} + S_{BPH} = S_{BRC}.$$

Из вписанности $CPRH$ следует, что $\angle PHR = \angle PCR$. Поскольку PQ — диаметр окружности, то $\angle PHQ = 90^\circ = \angle CHB$, поэтому

$$\angle CHQ = \angle PHR = \angle PCR.$$

Каждый из углов HCQ и CBH дополняет угол BCH до 90° , поэтому

$$\angle HCQ = \angle PBH = \angle RBC.$$

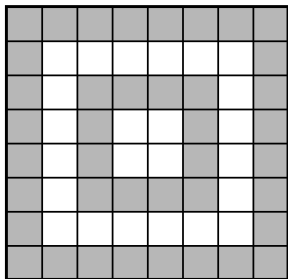
Следовательно, треугольники CQH , BPH и BRC подобны по двум углам. Тогда площади этих треугольников относятся как квадраты коэффициентов подобия, поэтому

$$\begin{aligned} S_{CQH} + S_{BPH} &= \left(\frac{CH}{BC}\right)^2 \cdot S_{BRC} + \left(\frac{BH}{BC}\right)^2 \cdot S_{BRC} = \\ &= \frac{CH^2 + BH^2}{BC^2} \cdot S_{BRC} = S_{BRC}. \end{aligned} \quad \square$$

Задача 4. Каждая клетка квадрата 100×100 покрашена либо в белый, либо в чёрный цвет. Оказалось, что у каждой белой клетки ровно две соседних с ней по стороне клетки покрашены в белый цвет, а у каждой чёрной клетки ровно две соседних с ней по стороне клетки покрашены в чёрный цвет. Найдите максимальное возможное количество чёрных клеток. *(А. Заславский)*

Ответ: 5100 клеток.

Решение 1. Пример. Приведём пример раскраски, в которой 5100 чёрных клеток. Разобьём квадрат на 50 каёмок и покрасим их в чёрный и белый цвет так, что внешняя каёмка покрашена в чёрный цвет, а соседние каёмки покрашены в разные цвета. На рисунке приведён пример аналогичной раскраски для квадрата 8×8 . Легко видеть, что эта раскраска удовлетворяет условиям задачи.



Посчитаем количество чёрных клеток. Внешняя чёрная каёмка состоит из $99 \cdot 4$ клеток, следующая чёрная каёмка — из $95 \cdot 4$ клеток, следующая — из $91 \cdot 4$ клеток, ..., последняя — из $3 \cdot 4$ клеток. Просуммировав арифметическую прогрессию, получаем 5100 чёрных клеток.

Оценка. Докажем, что в любой раскраске не более 5100 чёрных клеток. Рассмотрим произвольную раскраску, удовлетворяющую условию. Пусть в ней b чёрных и w белых клеток. Так как все клетки квадрата покрашены, то $b + w = 10000$.

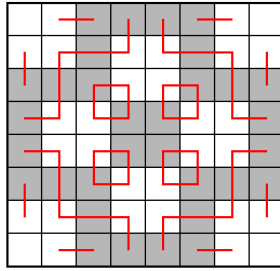
Назовём *ребром* общую сторону двух соседних по стороне клеток. В квадрате 100×100 есть $99 \cdot 100$ вертикальных рёбер и $99 \cdot 100$ горизонтальных, всего — 19800 рёбер. Будем называть ребро *чёрным*, если оно разделяет чёрные клетки, *белым*, если оно разделяет белые клетки, и *разноцветным*, если оно разделяет чёрную и белую клетки.

По условию на границе каждой чёрной клетки лежат ровно два чёрных ребра. Но и каждое чёрное ребро лежит на границе двух чёрных клеток, поэтому чёрных рёбер ровно b . Аналогично белых рёбер ровно w . Поэтому разноцветных рёбер

$$19800 - b - w = 19800 - 10000 = 9800.$$

На границе каждой белой клетки лежит не более двух разноцветных рёбер, а каждое разноцветное ребро лежит на границе ровно одной белой клетки. Из этого следует, что $2w \geq 9800$, то есть $w \geq 4900$. Поскольку $b + w = 10000$, то $b \leq 5100$, что и требовалось доказать. \square

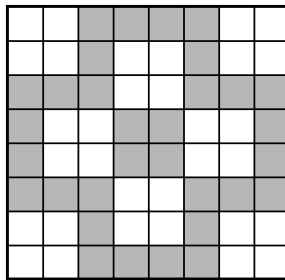
Решение 2. Приведём другой способ сделать оценку. Отметим центры клеток и соединим отрезком центры соседних по стороне разноцветных клеток. Тогда угловые клетки не будут соединены ни с одной другой клеткой, клетки у границы будут соединены ровно с одной клеткой, клетки не у границы будут соединены ровно с двумя клетками. Следовательно, все клетки, кроме угловых, разобьются на цепочки, концы которых лежат на границе, и циклы. На рисунке приведён пример разбиения.



В каждом цикле и в каждой цепочке цвета клеток чередуются, поэтому в цикле количества чёрных и белых клеток совпадают, а в цепочке — совпадают или отличаются на 1. Всего цепочек $392/2 = 196$, поэтому максимальная разность между количествами чёрных и белых клеток равна $196 + 4 = 200$. Следовательно, чёрных клеток не больше 5100. \square

Комментарий 1. Пример оптимальной раскраски единственный. Действительно, из второго решения следует, что чёрных клеток на 200 больше, чем белых, только в случае, когда все угловые и все конечные клетки цепочек чёрные. Это соответствует тому, что все граничные клетки чёрные. Несложно видеть, что такая раскраска только одна.

Комментарий 2. Отметим, что в раскрасках, удовлетворяющих условию, связанное по стороне множество чёрных клеток не обязательно образует прямоугольную каёмку.



Задача 5. У хозяйки есть кусок мяса, которым она хочет накормить трёх котиков. Раз в несколько секунд хозяйка отрезает кусочек мяса и скармливает его одному из котиков на свой выбор, причём каждый кусочек должен составлять одну и ту же долю куска, от которого его отрезают. Через некоторое время хозяйка убирает остаток мяса в холодильник. Может ли она скормить котикам поровну мяса?

(А. Кушнир)

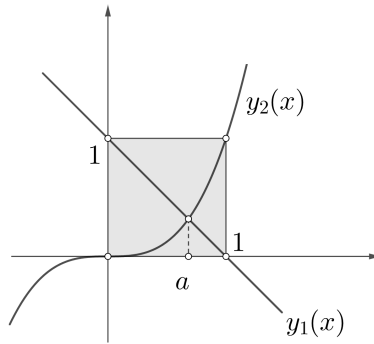
Ответ: да, может.

Решение. Пусть каждый отрезаемый кусочек составляет долю $(1 - a)$ куска, от которого его отрезают. Тогда k -й отрезанный кусочек составляет долю $(1 - a)a^{k-1}$ от изначального куска. Сократив на $(1 - a)$, получим, что задачу можно переформулировать следующим образом: для некоторого $a \in (0; 1)$ и натурального n необходимо разбить числа $1, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ на три группы с равными суммами.

Выберем в качестве a корень уравнения

$$1 = x + x^3 \Leftrightarrow 1 - x = x^3.$$

Он существует и принадлежит интервалу $(0, 1)$, потому что графики функций $y_1(x) = 1 - x$ и $y_2(x) = x^3$ пересекаются внутри единичного квадрата на координатной плоскости (см. рисунок).



Поскольку $1 = a + a^3$, то для любого натурального k выполнено равенство $a^k = a^{k+1} + a^{k+3}$. Тогда

$$1 = a + a^3 = (a^2 + a^4) + a^3 = a^2 + (a^5 + a^7) + (a^4 + a^6) = a^2 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7.$$

Таким образом, для для $n = 8$ и указанного a числа $1, a, \dots, a^7$ можно разбить на три группы с равными суммами:

$$\{1\}, \quad \{a, a^3\}, \quad \{a^2, a^4, a^5, a^6, a^7\}. \quad \square$$

Комментарий 1. Существуют и другие разбиения:

$$\begin{aligned} 1 &= a + a^4 + a^6 = a^2 + a^3 + a^5 + a^7, \\ 1 &= a^2 + a^3 + a^4 = a + a^5 + a^6 + a^7. \end{aligned}$$

Комментарий 2. Существуют примеры с другим значением a . Например, если a — корень уравнения $1 = x^2 + x^3$, то

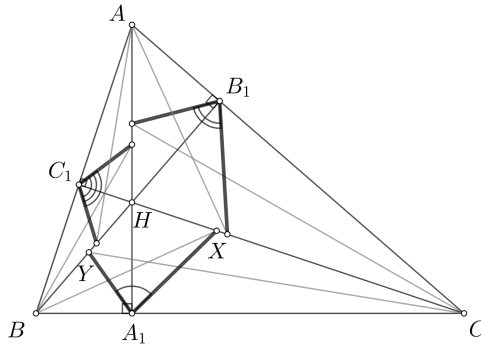
$$1 + a^4 = a + a^2 = a^3 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12}.$$

Комментарий 3. Для четырёх котиков также существует пример. Если a — корень уравнения $1 = x^2 + x^3$, то

$$1 = a^2 + a^3 = a + a^5 = a^4 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} + a^{13}.$$

Составителям задачи неизвестно, существуют ли примеры для пяти и более котиков.

Задача 6. Высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Биссектриса угла CBH пересекает отрезок CH в точке X , биссектриса угла BCH пересекает отрезок BH в точке Y . Обозначим величину угла XA_1Y через α . Аналогично определим β и γ . Найдите значение суммы $\alpha + \beta + \gamma$.



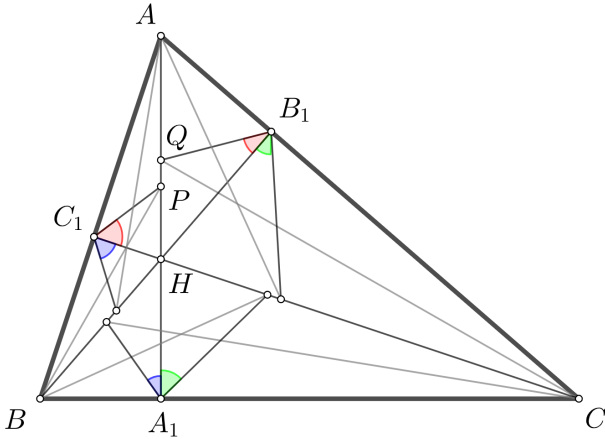
(А. Доледенюк)

Ответ: 270° .

Решение. Обозначим точки пересечения биссектрис углов ABH и ACH с отрезком AH через P и Q соответственно. Докажем, что

$$\angle PC_1H = \angle AB_1Q = 90^\circ - \angle QB_1H.$$

Из этого будет следовать решение задачи — сумма из условия разбивается на три пары углов с суммой 90° (см. рисунок), то есть искомая сумма будет равна 270° .

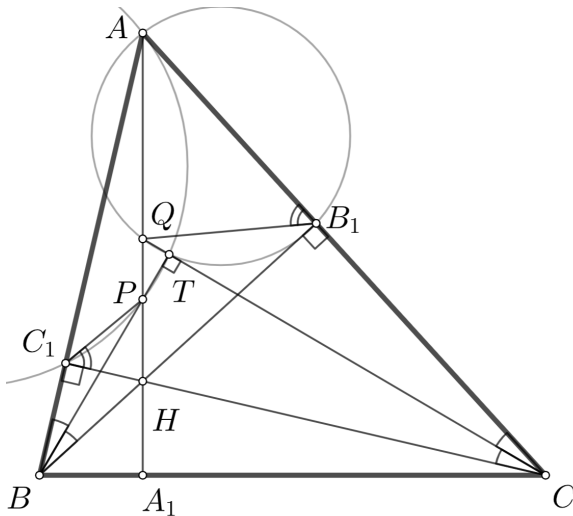


Способ 1. Окружность, построенная на BC как на диаметре, проходит через точки B_1 и C_1 , а биссектрисы вписанных углов B_1BC_1 и B_1CC_1 проходят через середину дуги B_1C_1 , на которую они опираются; обозначим её через T . Таким образом, T — это точка пересечения прямых BP и CQ .

Поскольку

$$\angle BTC_1 = \angle BCC_1 = \angle BAA_1,$$

то точки A, T, P, C_1 лежат на одной окружности. Аналогично точки A, T, Q, B_1 лежат на одной окружности.



Тогда

$$\begin{aligned}\angle AC_1P + \angle AB_1Q &= (180^\circ - \angle ATP) + (180^\circ - \angle ATC) = \\ &= 360^\circ - (\angle ATP + \angle ATC) = 360^\circ - (360^\circ - \angle BTC) = \\ &= \angle BTC = 90^\circ,\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Способ 2. Так как $\angle ABH = \angle ACH$, то и $\angle ABP = \angle HCQ$, поэтому

$$\angle BPA_1 = \angle ABP + \angle BAP = \angle HCQ + \angle BCH = \angle BCQ.$$

Следовательно, прямоугольные треугольники BPA_1 и QCA_1 подобны по двум углам, поэтому

$$\frac{BA_1}{PA_1} = \frac{QA_1}{A_1C} \Leftrightarrow BA_1 \cdot A_1C = PA_1 \cdot QA_1. \quad (1)$$

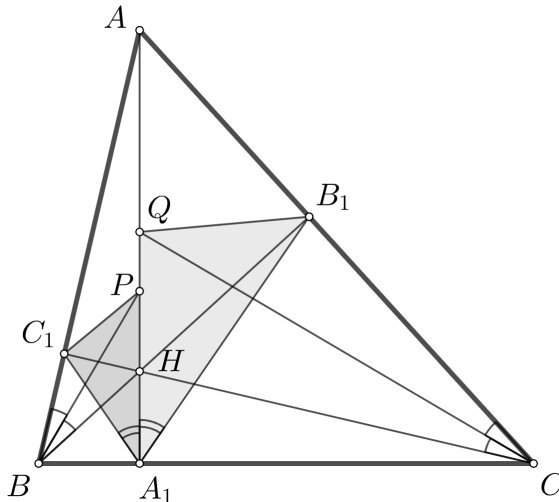
Как известно, треугольники A_1BC_1 и A_1B_1C подобны треугольнику ABC , а следовательно, подобны друг другу. Отсюда

$$\frac{BA_1}{A_1C_1} = \frac{B_1A_1}{A_1C} \Leftrightarrow BA_1 \cdot A_1C = B_1A_1 \cdot A_1C_1. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$PA_1 \cdot QA_1 = B_1A_1 \cdot A_1C_1 \Leftrightarrow \frac{PA_1}{A_1C_1} = \frac{B_1A_1}{QA_1}.$$

Вспользуемся ещё одним известным фактом: высота AA_1 — это биссектриса угла $B_1A_1C_1$. Из $\angle C_1A_1P = \angle B_1A_1Q$ получаем, что треугольники PC_1A_1 и B_1QA_1 подобны по углу и отношению прилежащих сторон, откуда $\angle A_1C_1P = \angle A_1QB_1$.



Тогда

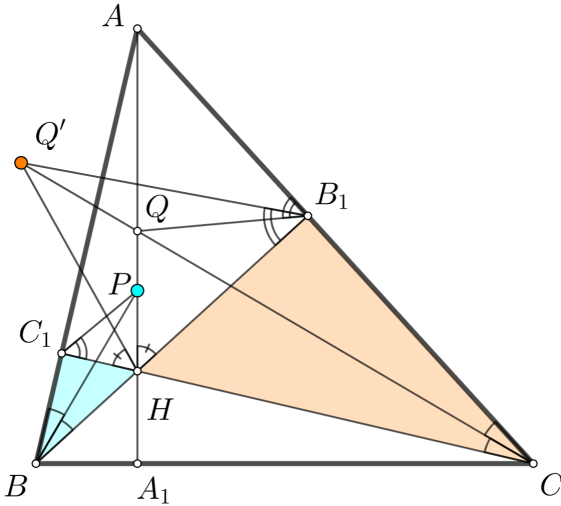
$$\angle PC_1H = \angle A_1C_1P - \angle A_1C_1C = \angle A_1QB_1 - \angle A_1AC = \angle AB_1Q,$$

что и требовалось доказать. \square

Способ 3. Пусть Q' — точка, изогонально сопряжённая Q относительно треугольника B_1CH . Так как

$$\angle ACQ' = \angle ACQ = \angle C_1BP \quad \text{и} \quad \angle Q'HC_1 = \angle QHB_1 = \angle PHB_1,$$

то точки P и Q' — соответствующие точки в подобных треугольниках BC_1H и CB_1H . Тогда $\angle AB_1Q = \angle HB_1Q' = \angle HC_1P$, что и требовалось доказать.



\square

Способ 4. Пусть K и L — точки пересечения описанных окружностей треугольников BHP и CHQ с прямыми AB и AC соответственно. Так как четырёхугольник $BHPK$ вписанный, то

$$\angle PKH = \angle PBH = \angle PBK = \angle PHK.$$

Так как четырёхугольник $CHQL$ вписанный, то

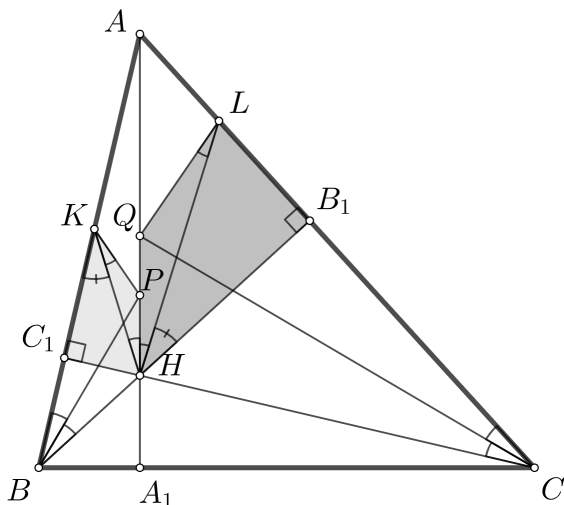
$$\angle QLH = \angle QCH = \angle QCL = \angle QHL.$$

Таким образом, треугольники KPH и HQL подобны по двум углам.

Поскольку четырёхугольник $BHPK$ вписанный, то $\angle BKP = \angle QHB_1$, поэтому

$$\angle C_1KH = \angle BKP - \angle HKP = \angle QHB_1 - \angle QHL = \angle LHB_1.$$

Таким образом, прямоугольные треугольники KC_1H и HB_1L подобны по двум углам.



На гипотенузах KH и HL подобных треугольников KC_1H и HB_1L построены соответствующим образом подобные треугольники KPH и HQL . Следовательно, полученные четырёхугольники C_1HPK и B_1LQH подобны. Тогда диагонали C_1P и B_1Q образуют одинаковые углы с соответствующими сторонами C_1H и B_1L , то есть $\angle PC_1H = \angle QB_1L$, что и требовалось доказать. \square

Способ 5. Продлим высоту AA_1 и отметим на ней такие точки R и S , что $A_1C_1 = A_1R$ и $A_1B_1 = A_1S$. Тогда в равнобедренном треугольнике A_1C_1R внутренние углы при стороне C_1R равны половине внешнего угла C_1A_1H , поэтому

$$\angle A_1C_1R = \angle A_1RC_1 = \angle C_1BP.$$

Аналогично им равны и углы A_1B_1S и A_1SB_1 . Следовательно, четырёхугольники BC_1PR и CB_1QS вписанные.

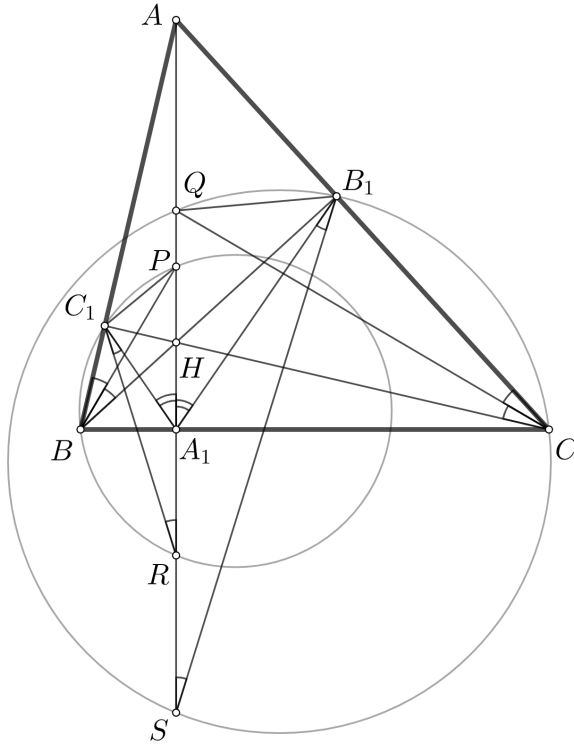
Равенство, которое мы хотим доказать, можно эквивалентно переписать в виде $\angle AC_1P + \angle AB_1Q = 90^\circ$. Воспользовавшись доказанными вписанностями, получим

$$\begin{aligned} \angle AC_1P + \angle AB_1Q &= \angle PRB + \angle QSC = \angle A_1RB + \angle A_1SC = \\ &= \angle A_1RB + (90^\circ - \angle A_1CS) = 90^\circ + (\angle A_1RB - \angle A_1CS). \end{aligned}$$

Таким образом, нужно доказать равенство углов A_1RB и A_1CS , что эквивалентно подобию прямоугольных треугольников A_1RB и A_1CS . Чтобы доказать это подобие, запишем отношение соответствующих сторон и воспользуемся равенствами $A_1C_1 = A_1R$ и $A_1B_1 = A_1S$:

$$\frac{A_1R}{A_1B} = \frac{A_1C}{A_1S} \Leftrightarrow \frac{A_1C_1}{A_1B} = \frac{A_1C}{A_1B_1}.$$

Последнее равенство верно, так как треугольники A_1BC_1 и A_1B_1C подобны, что и требовалось. \square



Замечание для знатоков. Точки S и R возникают, если сделать естественное преобразование для треугольника – композицию инверсии с центром в точке H радиуса $\sqrt{AH \cdot HA_1}$ и центральной симметрии в точке H . При этом преобразовании вершины треугольника переходят в основания высот, а точки P и Q – в точки S и R .

Способ 6. Введём обозначения для углов: $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, $\angle PC_1H = \varphi$, $\angle AB_1Q = \psi$. Поскольку φ и ψ меньше 90° , то их равенство равносильно равенству их тангенсов, поэтому

$$\begin{aligned} \varphi = \psi &\Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \psi \Leftrightarrow \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \Leftrightarrow \frac{\sin \varphi}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{\sin \psi}{\sin(90^\circ - \psi)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin \angle HC_1P}{\sin \angle AC_1P} = \frac{\sin \angle AB_1Q}{\sin \angle HB_1Q}. \end{aligned}$$

Запишем теоремы синусов для треугольников AC_1P и HC_1P :

$$\frac{HP}{\sin \varphi} = \frac{PC_1}{\sin \beta}, \quad \frac{AP}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{PC_1}{\sin(90^\circ - \beta)}.$$

Разделив одно равенство на другое, получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{HP}{AP} \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

По свойству биссектрисы $HP/AP = HB/AB$. Подставив и воспользовавшись теоремой синусов для треугольника ABH , получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{HP}{AP} \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{HB}{AB} \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin(180^\circ - \gamma)} \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\operatorname{tg} \angle HB_1Q = \operatorname{tg}(90 - \psi) = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma},$$

то есть $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \psi$, что и требовалось. □

Комментарий. Аналогично доказывается, что сумма углов, указанных на картинке, равна 270° .

