LXXXVIII Московская математическая олимпиада

16 марта 2025 года • 8 класс

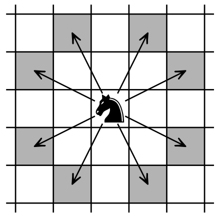
Задача 1. На доске написаны два натуральных числа, одно из которых получается из другого перестановкой цифр. Может ли их разность равняться 2025? (Запись натурального числа не может начинаться с нуля.)

Задача 2. На совместный симпозиум лжецов (всегда лгут) и правдолюбов (всегда говорят правду) собрались 12 участников, среди которых не все лжецы и не все правдолюбы. Каждые два участника либо знакомы, либо незнакомы друг с другом. Каждый ответил «да» или «нет» на вопрос «Знакомы ли вы?» про каждого из остальных. Какое наименьшее количество ответов «да» могло быть получено?

Задача 3. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка D (отличная от A и B) и проведена медиана AM. Оказалось, что $AM = \frac{1}{2}CD$. Обязательно ли треугольник ABC тупоугольный?

Задача 4. Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости расставить бесконечное количество шахматных коней (не более одного коня в клетку) так, чтобы каждый конь бил ровно 5 других?

Напомним, что шахматный конь бьёт 8 клеток, как показано на рисунке.



Задача 5. По кругу стоят 50 чисел (необязательно целых). Известно, что произведение любых 25 чисел отличается от произведения 25 остальных не более чем на 2. Докажите, что какие-то два соседних числа отличаются не более чем на 2.

Задача 6. Правильный треугольник разрезан на треугольники, каждый из которых либо прямоугольный, либо равнобедренный. Все прямоугольные треугольники равны друг другу, все равнобедренные — тоже. Обязательно ли все углы равнобедренных треугольников кратны 30°?

1. *(В. Новиков)*

На доске написаны два натуральных числа, одно из которых получается из другого перестановкой цифр. Может ли их разность равняться 2025? (Запись натурального числа не может начинаться с нуля).

Ответ. Да, может.

Решение. Разность этих чисел может равняться 2025. Например, $12050 - 10025 = 2025$.

Примечание. На самом деле утверждение задачи верно для любого числа, кратного 9. Для построения соответствующего примера двух чисел достаточно последовательно подбирать меньшее число с конца, поставив туда, например, цифру 1. А последующие цифры вычисляются как результат сложения в предыдущем разряде. Например, если взять в качестве разности число 5613417, то, применяя такой алгоритм, получим следующий пример:

$$\begin{array}{r} \ 5613417 \\ +\ 104873981 \\ \hline 110487398 \end{array}$$

Как мы видим, второе число получается из первого в результате циклического сдвига на 1 вправо.

Критерии

\+ Верный пример двух чисел, удовлетворяющих условию.
− Пример двух чисел, не удовлетворяющих условию.
− Неверный ответ.
− Только ответ.

2. *(М. Евдокимов)*

На совместный симпозиум лжецов (всегда лгут) и правдолюбов (всегда говорят правду) собрались 12 участников, среди которых не все лжецы и не все правдолюбы. Каждые два участника либо знакомы, либо незнакомы друг с другом. Каждый ответил «да» или «нет» на вопрос «Знакомы ли вы?» про каждого из остальных. Какое наименьшее количество ответов «да» могло быть получено?

Ответ: 11.

Решение. Рассмотрим каких-то двух участников и проанализируем их высказывания друг о друге. Если это два правдолюба, то на вопросы друг о друге оба либо дают ответ «да», если они знакомы, либо «нет», если незнакомы. Если это два лжеца, то, наоборот, знакомые лжецы отвечают «нет», а незнакомые — «да». Наконец, если один из знакомых участников — правдолюб, а другой — лжец, то правдолюб отвечает «да», а лжец — «нет»; если же они незнакомы, то, наоборот, правдолюб отвечает «нет», а лжец — «да».

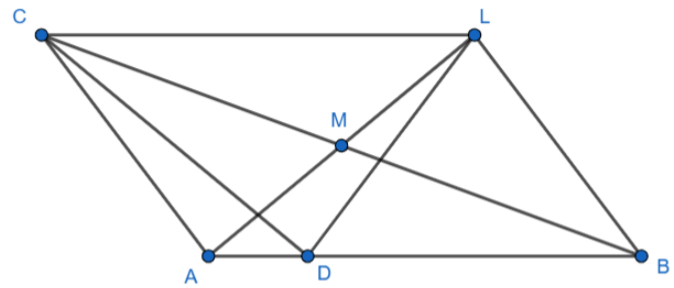
Теперь ясно, что для достижения наименьшего количества ответов «да» необходимо, чтобы все лжецы были знакомы друг с другом, а все правдолюбы — не были. Если среди собравшихся k правдолюбов, то лжецов $12 - k$, и количество ответов «да» в этом случае равно $k(12 - k)$, то есть количеству пар, состоящих из правдолюба и лжеца (в каждой такой паре ровно один раз звучит ответ «да», независимо от знакомства или незнакомства участников). Легко проверить (например, перебором значений $k = 1, 2, \ldots, 11$), что минимальное значение выражения $k(12 - k)$ достигается при $k = 1$ или $k = 11$, то есть наименьшее возможное количество ответов «да» — 11.

Критерии

−. Только верный пример, когда число ответов «да» равно 11.
∓ Доказано утверждение о единственности ответа «да» в паре из правдолюба и лжеца, приведён верный ответ, но отсутствует мысль о необходимости минимизировать количество таких пар (например, утверждается, что минимальным должно быть число правдолюбов, а не число таких пар).
± Доказано, что ответ равен минимальному количеству пар из правдолюба и лжеца, далее без обоснования утверждается, что оно равно 11.
+. Доказано, что ответ равен минимальному количеству пар из правдолюба и лжеца, далее хотя бы минимально, но не совсем точно, обосновано, что оно равно 11.

3. *(М. Федотова)*

В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка D (отличная от A и B) и проведена медиана AM. Оказалось, что $AM = \frac{1}{2}CD$. Обязательно ли треугольник ABC тупоугольный?



Ответ: да, обязательно.

Решение. Продлим медиану AM на её длину до точки L ($AM = ML$). Тогда $ACLB$ — параллелограмм, $ACLD$ — трапеция. Поскольку её диагонали AL и CD равны, она равнобокая, откуда $LD = CA = LB$, то есть угол LBD острый как угол при основании равнобедренного $\triangle LBD$, а дающий в сумме с ним 180° угол CAB тупой.

Критерии

∓ Удвоена медиана AM и доказано, что трапеция $ACLD$ равнобокая.
∓ Задача решена верно в предположении неравенства $BC > CD$, которое не доказано.

4. *(А. Тертерян)*

Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости расставить бесконечное количество шахматных коней (не более одного коня в клетку) так, чтобы каждый конь бил ровно 5 других?

Ответ: да, возможно.

Решение. Пример на рисунке. Расстановка продолжается циклично как по горизонтали, так и по вертикали. Существуют и другие примеры.

Примечание. Можно раскрасить всю плоскость в 5 цветов как показано на рисунке. При этом каждая клетка каждого цвета будет иметь 4 «соседа» (т.е. клетки, бьющиеся из неё конём) своего цвета и по 1 «соседу» каждого из остальных цветов.

Таким образом, для построения примера к задаче достаточно выбрать какие-то два цвета и поставить коней на все клетки этих цветов. Аналогично можно построить пример, в котором каждый конь бьёт 6 или 7 других: для этого достаточно взять все клетки трёх или четырёх цветов.

К	К				К	К			
		К	К				К	К	
К				К	К				К
	К	К				К	К		
			К	К				К	К
К	К				К	К			
		К	К				К	К	
К				К	К				К
	К	К				К	К		
			К	К				К	К

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2

Критерии

+ Верный пример расстановки коней.
− Неверный пример расстановки коней.
− Неверный ответ.
− Только ответ.

5. *(И. Богданов)*

По кругу стоят 50 чисел (необязательно целых). Известно, что произведение любых 25 чисел отличается от произведения 25 остальных не более чем на 2. Докажите, что какие-то два соседних числа отличаются не более чем на 2.

Решение 1. Пусть по кругу записаны числа a_1, a_2, …, a_{50} (в таком порядке). Докажем, что в одной из пар (a_1, a_2), (a_3, a_4), …, (a_{49}, a_{50}) числа отличаются не более чем на 2.

Рассмотрим выражение

$$A = (a_1 - a_2)(a_3 - a_4) \dots (a_{49} - a_{50}).$$

При раскрытии скобок получается сумма 2^{25} произведений по 25 исходных чисел — в каждое произведение входит по одному числу из каждой пары (a_1, a_2), (a_3, a_4), …, (a_{49}, a_{50}). Каждое из произведений входит в сумму со знаком «плюс» или «минус» — в зависимости от того, чётное или нечётное количество чисел из набора a_2, a_4, …, a_{50}, имевших знак «минус» в выражении A, содержится в данном произведении. Произведения разбиваются на пары: вместе с каждым произведением 25 каких-либо чисел в сумму входит и произведение остальных 25 чисел. При этом произведения из каждой такой пары входят в сумму с разными знаками. Действительно, если в одно из произведений входит k чисел из набора a_2, a_4, …, a_{50}, то оставшиеся $25 - k$ из этих чисел входят в парное произведение — и так как k и $25 - k$ разной чётности, то соответствующие произведения имеют разные знаки.

Количество пар в два раза меньше, чем количество произведений, то есть равно $\frac{1}{2} \cdot 2^{25} = 2^{24}$. По условию разность произведений в каждой паре по модулю не превосходит 2. Отсюда следует, что сумма, получающаяся после раскрытия скобок в выражении A, по модулю не превосходит $2 \cdot 2^{24} = 2^{25}$. Таким образом, мы доказали, что

$$|A| = |a_1 - a_2| \cdot |a_3 - a_4| \cdot \ldots \cdot |a_{49} - a_{50}|$$

не больше 2^{25}, а значит, один из 25 множителей $|a_1 - a_2|$, $|a_3 - a_4|$, $\ldots$, $|a_{49} - a_{50}|$ не больше 2, что и требовалось.

Решение 2. Предположим, что утверждение задачи неверно, то есть что любые два соседних числа отличаются более чем на 2. Как и в первом решении, разобьём числа на 50 непересекающихся пар соседних (a_1, a_2), (a_3, a_4), $\ldots$, (a_{49}, a_{50}) и в каждой паре выберем число с наибольшим модулем (если модули чисел в паре совпадают, можно выбрать любое число). Выбранные 25 чисел назовём *большими*, а оставшиеся 25 — *маленькими*. Докажем, что произведение 25 *больших* чисел отличается от произведения 25 *маленьких* более чем на 2. Не умаляя общности, будем считать, что *большие* числа — это $a_1, a_3, \ldots, a_{49}$, а *маленькие* — $a_2, a_4, \ldots, a_{50}$. Заметим, что модуль каждого из чисел $a_1, a_3, \ldots, a_{49}$ больше единицы — иначе в соответствующей паре числа отличались бы не более чем на 2.

Случай 1: в какой-то из выбранных пар числа одного знака (возможно, одно из чисел равно нулю). Без ограничения общности будем считать, что это пара (a_1, a_2). Докажем индукцией по n, что $|a_1 a_3 \ldots a_{2n-1}| - |a_2 a_4 \ldots a_{2n}| > 2$ при любом n от 1 до 25. База для $n = 1$ следует из нашего предположения. Переход от n к $n+1$: обозначим $A = a_1 a_3 \ldots a_{2n-1}$ и $B = a_2 a_4 \ldots a_{2n}$ и предположим, что $|a_1 a_3 \ldots a_{2n-1}| - |a_2 a_4 \ldots a_{2n}| > 2$. Тогда

$$|Aa_{2n+1}| - |Ba_{2n+2}| = |A| \cdot |a_{2n+1}| - |B| \cdot |a_{2n+2}| \geqslant |A| \cdot |a_{2n+1}| - |B| \cdot |a_{2n+1}| =$$

$$= |a_{2n+1}|(|A| - |B|) > 2|a_{2n+1}| > 2.$$

Здесь первое неравенство выполнено в силу условия $|a_{2n+1}| \geqslant |a_{2n+2}|$, второе — по предположению индукции, а третье — так как $|a_{2n+1}| > 1$. При $n = 25$ получается, что модули произведений $a_1 a_3 \ldots a_{25}$ и $a_2 a_4 \ldots a_{50}$ отличаются более чем на 2, и тогда тем более это верно для самих произведений.

Случай 2: в каждой из пар числа разного знака. Наше предположение о разности чисел в каждой паре переписывается как $|a_{2i-1}| + |a_{2i}| > 2$ при любом $i = 1, 2, \ldots, 25$. При этом произведения $a_1 a_3 \ldots a_{25}$ и $a_2 a_4 \ldots a_{50}$ имеют разные знаки, так что нужно доказать, что $|a_1 a_3 \ldots a_{25}| + |a_2 a_4 \ldots a_{50}| > 2$. Снова докажем индукцией по n, что

$$|a_1 a_3 \ldots a_{2n-1}| + |a_2 a_4 \ldots a_{2n}| > 2$$

при любом $n = 1, 2, \ldots, 25$. База для $n = 1$ уже известна. Переход от n к $n + 1$: обозначим $A = a_1 a_3 \ldots a_{2n-1}$ и $B = a_2 a_4 \ldots a_{2n}$ и предположим, что $|A| + |B| > 2$. Так как $|a_{2i-1}| \geqslant |a_{2i}|$ при любом i, то легко понять, что $|A| \geqslant |B|$. Нам нужно доказать, что

$$|A| \cdot |a_{2n+1}| + |B| \cdot |a_{2n+2}| > 2.$$

Для этого достаточно убедиться, что $|A| \cdot |a_{2n+1}| + |B| \cdot |a_{2n+2}| \geqslant |A| + |B|$, а это неравенство переписывается в следующем виде:

$$|A|(|a_{2n+1}| - 1) \geqslant |B| \cdot (1 - |a_{2n+2}|).$$

Вспомним, что $|a_{2n+1}| > 1$, так что если $|a_{2n+2}| \leqslant 1$, то последнее неравенство очевидно. В противном случае перепишем условие $|a_{2n+1}| + |a_{2n+2}| > 2$ в виде $|a_{2n+1}| - 1 > 1 - |a_{2n+2}|$, и, перемножая данное неравенство с $|A| \geqslant |B|$ (что возможно в силу неотрицательности выражений в неравенствах), получаем требуемое.

Критерии

$-$. Верное решение в случае, если все записанные числа положительны.

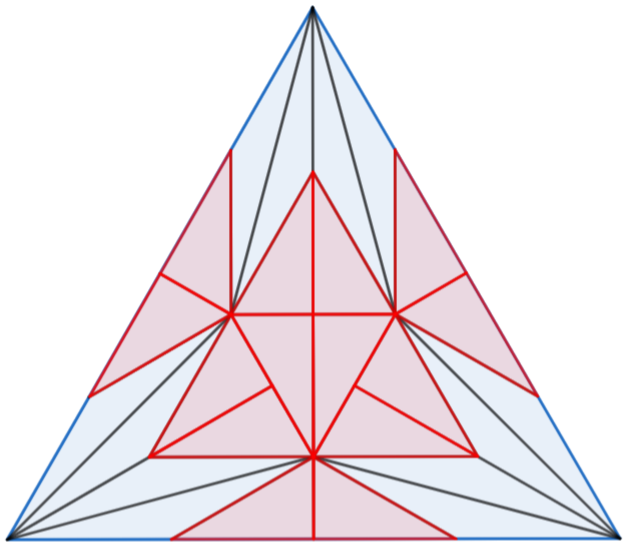
$\mp$ В Решении 2 верно разобран только один из двух случаев.

6. *(А. Заславский)*

Правильный треугольник разрезан на треугольники, каждый из которых либо прямоугольный, либо равнобедренный. Все прямоугольные треугольники равны друг другу, все равнобедренные — тоже. Обязательно ли все углы равнобедренных треугольников кратны 30°?

Ответ: нет, необязательно.

Решение. Пример на рисунке. Все 12 равнобедренных треугольников имеют углы 15, 15 и 150 градусов, а все 14 прямоугольных — 90, 60 и 30 градусов.



Критерии

+ Верный пример разрезания.
− Неверный пример разрезания (в частности, пример без равнобедренных треугольников).
− Неверный ответ.
− Только ответ.