

### 11 класс

---

В решении для всех вычислений должна быть представлена формула, где искомая величина записана как явная функция известных величин, записаны подставляемые значения и только потом ответ. Если численные значения получаются из рисунков/графиков, должно быть показано, что именно измерялось.

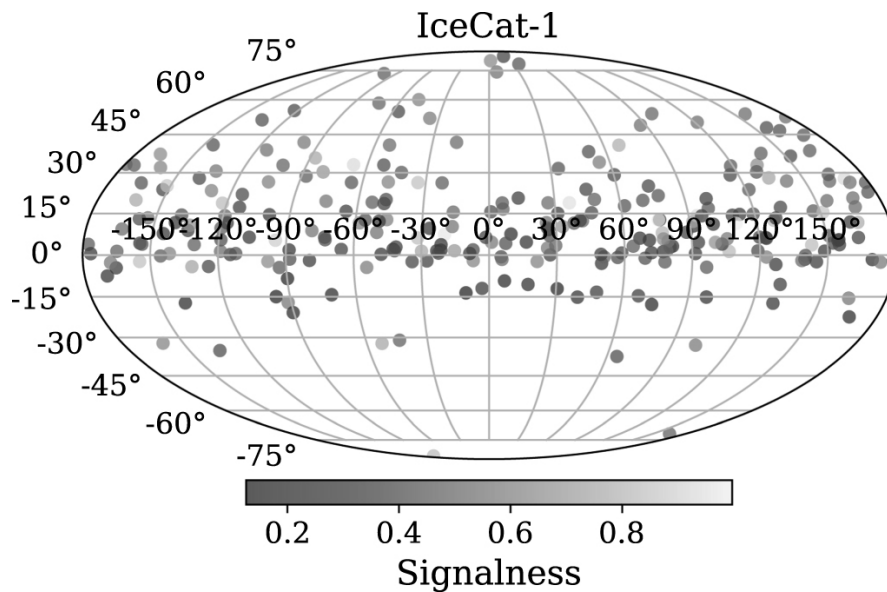
---

#### Задача 1

Хорошо известно, что разрешающая способность телескопа тем лучше, чем меньше длина волны наблюдения. Почему же тогда разрешение изображений, полученных космическими телескопами в жёстком рентгеновском и гамма-диапазонах, существенно хуже оптических?

#### Задача 2

На Южном полюсе Земли во льду на глубине 1450–2450 м расположены детекторы нейтринной обсерватории IceCube. На рисунке ниже показана карта в экваториальных координатах, на которой отмечены места прихода астрофизических нейтрино высоких энергий, т. е. таких нейтрино, чьи источники находятся за пределами нашей Галактики. Наблюдения велись 9 лет. Почему отметки не заполняют карту равномерно, а группируются вдоль одной полосы?



#### Задача 3

Наше Солнце движется относительно реликтового излучения со скоростью примерно 370 км/с в направлении созвездия Чаша вблизи границы с созвездием Льва. Оцените максимальную температуру реликтового фона, которую мы можем зафиксировать. В каком созвездии она будет наблюдаться? Сейчас средняя температура фона составляет 2.725 К, излучением пыли пренебречь.

**Задача 4**

На орбите Юпитера в окрестностях точек Лагранжа  $L_4$  и  $L_5$  находятся две группы астероидов: «Греки» (опережают Юпитер) и «Троянцы». Два астероида, Грек и Троянец, находятся в точках Лагранжа своих групп. В некоторый момент времени на Земле наблюдалось противостояние Юпитера. Какое событие произойдёт раньше: противостояние Грека или квадратура Троянца? Через какое время наступят эти явления? Ответ дайте в сутках.

**Задача 5**

Созвездие Хамелеона занимает на небе «прямоугольную» область между от  $-75^\circ$  до  $-82^\circ$  по склонению и от  $7^{\text{h}} 40^{\text{m}}$  до  $13^{\text{h}} 40^{\text{m}}$  по прямому восхождению. На каких широтах можно увидеть это созвездие на небе полностью в один момент времени?

**Задача 6**

Наблюдатель на экваторе заметил ровно в точке запада на горизонте геосинхронный полярный спутник, обращающийся по круговой орбите. Определите максимальную высоту этого спутника в данном пункте.

**Задача 7**

Один юный астроном решил построить себе спектрограф. Он достал стеклянную призму с углом при вершине  $60^\circ$ , две линзы для камеры и коллиматора с фокусным расстоянием 20 см и диаметром 3 см и «небольшой» телескоп с диаметром объектива 50 см и относительным отверстием  $f/8$ . Считая ширину щели равной атмосферному размеру изображения звезды ( $1''$ ), оцените максимальное и минимальное относительное спектральное разрешение этого спектрографа в оптическом диапазоне спектра (от 4000 до 9000 ангстрем). Дифракцией на всех элементах оптической системы пренебречь. На рисунке представлена зависимость угла отклонения луча света в призме от длины волны.

## Задача 8

Подобно тому как звезды мерцают из-за рассеивания света на неоднородностях земной атмосферы, пульсары мерцают вследствие рассеивания радиоизлучения неоднородностями межзвёздной среды. Одна из простейших моделей мерцаний — рассеивание на тонком экране. Пусть  $D$  — расстояние от наблюдателя до пульсара. Расстояние от пульсара до экрана обозначим  $sD$ , а от экрана до наблюдателя —  $(1 - s)D$ ,  $0 < s < 1$ .

Вследствие рассеивания к наблюдателю попадают не только лучи, идущие прямо, но и некоторые лучи, рассеявшиеся на экране, образуя в плоскости наблюдателя сложное распределение областей пониженной и повышенной интенсивности излучения (картина мерцаний). Пульсар быстро движется относительно наблюдателя и экрана, в результате чего излучение проходит через разные части экрана, картина мерцаний движется, а телескоп фиксирует изменение интенсивности с частотой  $f$ .

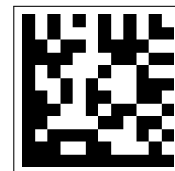
На рисунке на стр. 5 показаны зависимости задержки сигнала  $\tau$ , вызванной рассеянием, от частоты  $f$  для пульсара В1919+10 на четырёх наблюдательных частотах. Аналитическая формула этой зависимости имеет вид

$$\tau = \eta f^2, \quad \eta = 5.15 \cdot 10^5 \frac{Ds(1-s)}{V_{\text{eff}}^2} \lambda^\alpha,$$

где  $D$  измеряется в килопарсеках,  $\lambda$  — длина волны наблюдения в метрах,  $V_{\text{eff}}$  — скорость экрана относительно отрезка наблюдатель — пульсар в км/с.

1. С помощью рисунка определите величину  $\alpha$ .
2. Найдите зависимость скорости  $V_{\text{eff}}$  от тангенциальной скорости пульсара  $V_p$ .
3. Определите угловой и линейный размер рассеянного изображения пульсара.

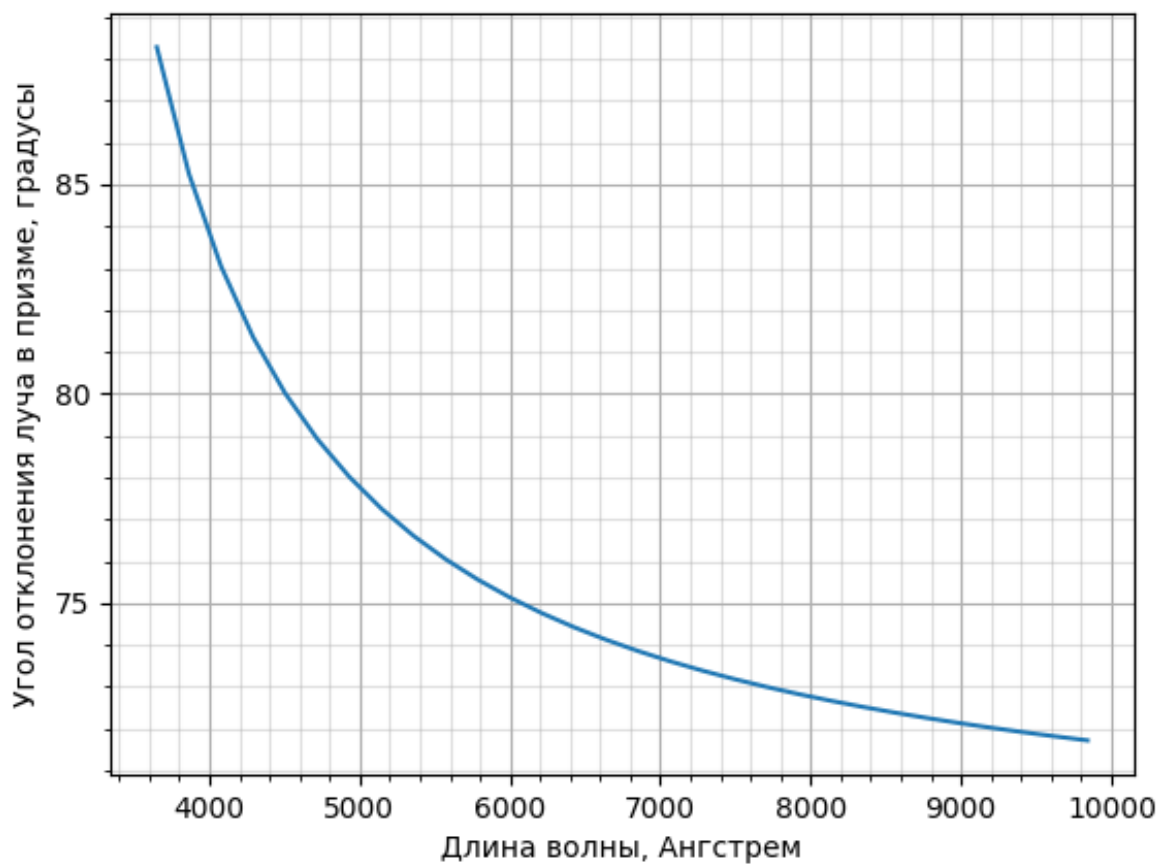
Считайте, что за пределами графиков полезного сигнала нет. Для исследуемого пульсара  $D = 0.36$  кпк,  $V_p = 177$  км/с. Движением наблюдателя и экрана пренебречь.



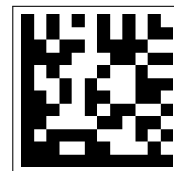
11  
класс

□ □ □ □ □ □ □ □  
номер работы

лист \_\_\_\_\_ из \_\_\_\_\_



К задаче 7

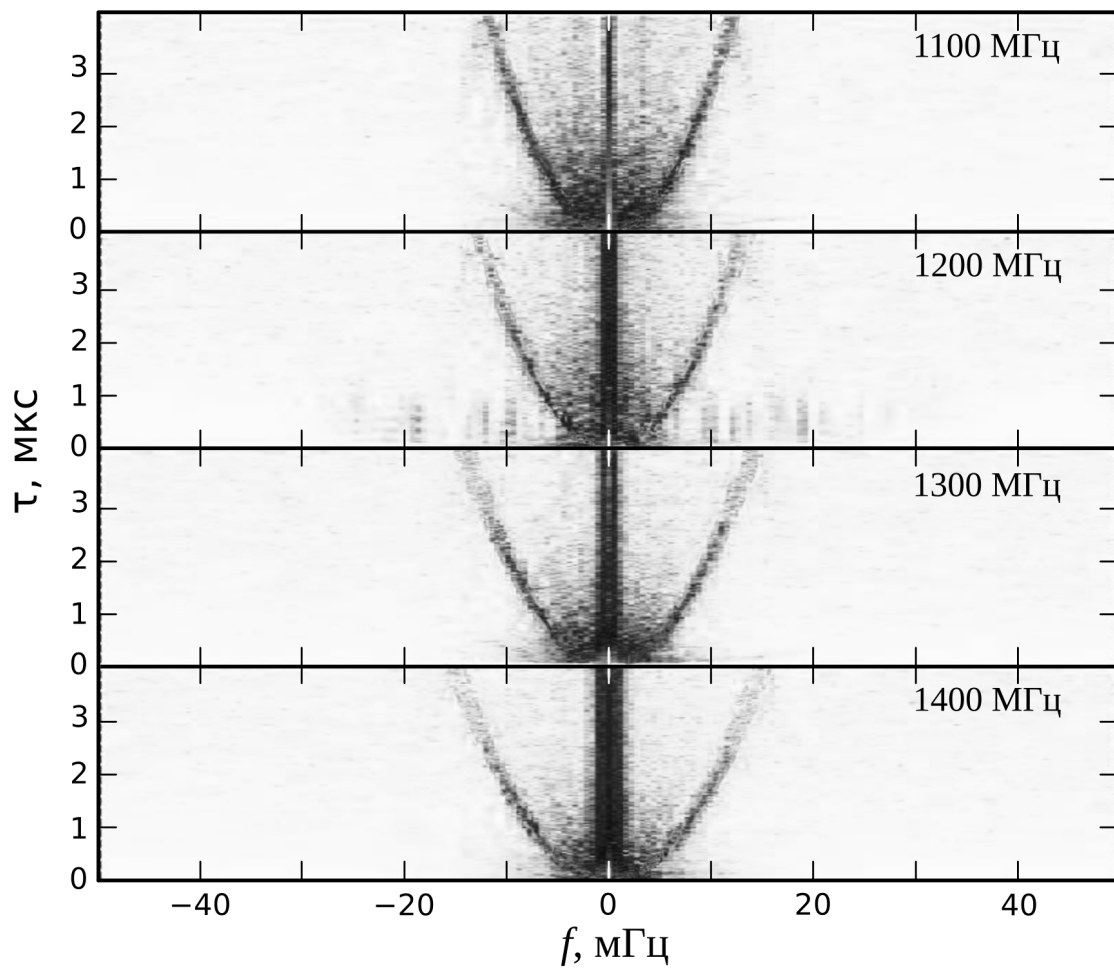


11  
класс

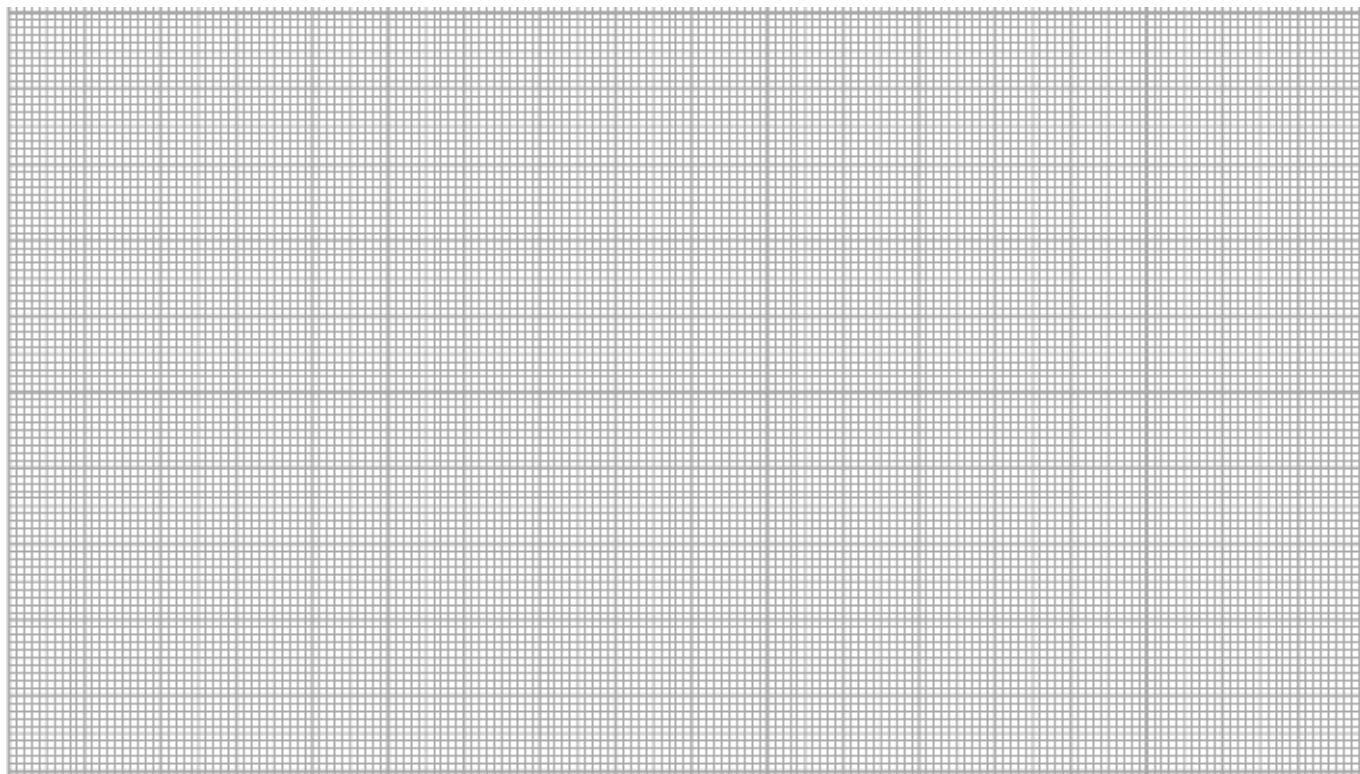
□ □ □ □ □ □ □ □

номер работы

лист \_\_\_\_ из \_\_\_\_



К задаче 8



## Справочные данные

## Данные о Солнце, Земле, Луне и Галактике

Светимость Солнца	$L_{\odot} = 3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
Видимая звёздная величина Солнца	$m_{\odot} = -26.78^{\text{m}}$
Абсолютная болометрическая звёздная величина Солнца	$M_{\odot} = 4.72^{\text{m}}$
Эффективная температура Солнца	$T_{\odot} = 5800 \text{ К}$
Солнечная постоянная	$E_{\odot} = 1360.8 \text{ Вт м}^{-2}$
Поток солнечной энергии в видимых лучах на расстоянии Земли	$= 600 \text{ Вт м}^{-2}$
Тропический год	$= 365.24219 \text{ сут}$
Звёздные сутки	$= 23 \text{ ч } 56 \text{ мин } 04 \text{ с}$
Наклон экватора к эклиптике	$\varepsilon = 23^{\circ}26'21.45''$
Синодический месяц	$S_{\zeta} = 29.53059 \text{ сут}$
Видимая звёздная величина полной Луны	$m_{\zeta} = -12.7^{\text{m}}$
Число звёзд в нашей Галактике	$= 10 \cdot 10^{11}$
Радиус диска нашей Галактики	$= 20 \text{ кпк}$
Масса нашей Галактики (в массах Солнца)	$= 2 \cdot 10^{12}$

## Астрономические и физические постоянные

Гравитационная постоянная	$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$
Скорость света в вакууме	$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м с}^{-1}$
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг с}^{-3} \text{ К}^{-4}$
Постоянная Планка	$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж с}$
Масса протона	$m_{\text{p}} = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Астрономическая единица	$1 \text{ а. е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
Парсек	$1 \text{ пк} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
Время накопления сигнала глазом	$= 0.05 \text{ с}$

Формулы приближённого вычисления (при  $x \ll 1$ )

$$\begin{aligned} \sin(x) &\approx x & \cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2} & \operatorname{tg} x &\approx x \\ \ln(1+x) &\approx x & e^x &\approx 1+x & (1+x)^\alpha &\approx 1+\alpha x \end{aligned}$$

## Характеристики Солнца, планет и некоторых спутников

Объект	Большая полуось, а.е.	Эксцентриситет	Орбитальный период	Масса, кг	Радиус, тыс. км	Осевого период
Солнце				$1.989 \times 10^{30}$	696	25.38 сут
Меркурий	0.3871	0.2056	87.97 сут	$3.302 \times 10^{23}$	2.44	58.65 сут
Венера	0.7233	0.0068	224.70 сут	$4.869 \times 10^{24}$	6.05	243.02 сут
Земля	1	0.0167	365.26 сут	$5.974 \times 10^{24}$	6.37	23.93 ч
Луна	0.00257	0.0549	27.322 сут	$7.348 \times 10^{22}$	1.74	27.32 сут
Марс	1.5237	0.0934	686.98 сут	$6.419 \times 10^{23}$	3.40	24.62 ч
Юпитер	5.2028	0.0483	11.862 лет	$1.899 \times 10^{27}$	69.9	9.92 ч
Сатурн	9.5388	0.0560	29.458 лет	$5.685 \times 10^{26}$	60.3	10.66 ч
Уран	19.1914	0.0461	84.01 лет	$8.683 \times 10^{25}$	25.6	17.24 ч
Нептун	30.0611	0.0097	164.79 лет	$1.024 \times 10^{26}$	24.7	16.11 ч

# LXXIX Московская астрономическая олимпиада (2025 г.)

## Теоретический тур. Решения и критерии оценивания

### 11 класс

#### Задача 1

Хорошо известно, что разрешающая способность телескопа тем лучше, чем меньше длина волны наблюдения. Почему же тогда разрешение изображений, полученных космическими телескопами в жёстком рентгеновском и гамма-диапазонах, существенно хуже оптических?

**Решение.** Очевидно, что условие отсылает к известной формуле разрешающей способности:

$$\rho \propto \frac{\lambda}{D},$$

где  $D$  — диаметр объектива телескопа,  $\lambda$  — длина волны наблюдения,  $\rho$  — минимальное угловое расстояние, на котором два точечных объекта видны по отдельности.

Из вида формулы напрашивается ответ, что космические рентгеновские и гамма-телескопы просто очень маленькие, потому и их разрешение невелико. Такое рассуждение неверно. Гамма-излучение характеризуется длинами волн порядка сотых долей нанометра и короче, что на пять порядков меньше оптических длин волн. Казалось бы, такое же разрешение, как у гигантских наземных телескопов с апертурой  $\sim 10$  м, должно быть у крошечных гамма-телескопов размером  $\sim 0.1$  мм. А что мешает запустить в космос гамма-телескоп размером около метра?

Но более важно другое. При прохождении апертуры телескопа свет демонстрирует явление дифракции. Как следствие, даже точечный источник света отображается в фокальной плоскости в виде сложной структуры дифракционных колец. Формула описывает минимальное расстояние между этими изображениями, когда они остаются различимы. Фотоны высоких энергий пронизывают зеркала из любых доступных материалов навывлет, поэтому для их регистрации используют методы, применяемые в физике элементарных частиц. Определение направления прихода гамма-фотонов здесь выполняется совершенно иными методами, а рассматриваемая формула просто неприменима.

#### Критерии проверки

##### 1. Правильный ответ

**4 балла**

Правильный ответ должен содержать обоснованное утверждение: конструкция гамма-телескопов принципиально иная, следовательно, формула неприменима. В иных случаях оценка не может превышать **2 баллов**. Жюри может ставить отдельные баллы за некоторые полезные указания в решении, в том числе

Формула разрешающей способности — **1 балл**

Жесткое излучение не отражается зеркалами — **1 балл**

Максимальная оценка за задачу **4 балла**.

(Е. Н. Фадеев)

### Задача 2

На Южном полюсе Земли во льду на глубине 1450–2450 м расположены детекторы нейтринной обсерватории IceCube. На рисунке ниже показана карта в экваториальных координатах, на которой отмечены места прихода астрофизических нейтрино высоких энергий, т. е. таких нейтрино, чьи источники находятся за пределами нашей Галактики. Наблюдения велись 9 лет. Почему отметки не заполняют карту равномерно, а группируются вдоль одной полосы?

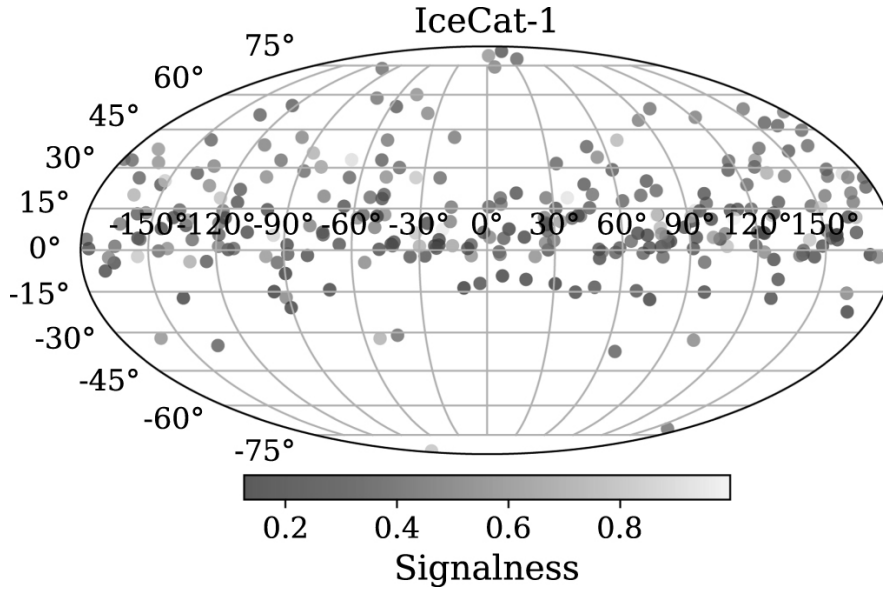
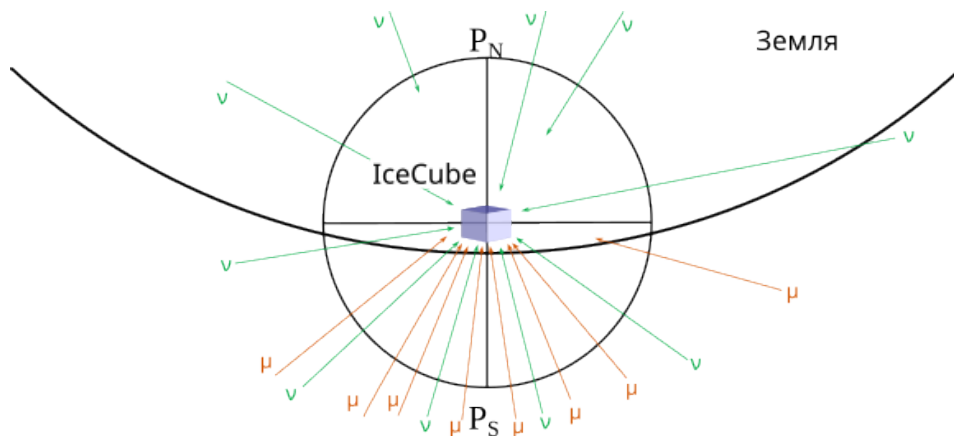


Рисунок из [R. Abbasi et al 2023 ApJ 954 75](#).

**Решение.** Положение оси экваториальной системы координат и всех связанных с ней кругов задается направлением оси вращения Земли. Сложно ожидать, что расположение источников излучения, находящихся за пределами нашей Галактики, тоже тоже связано ориентацией земной оси. Поэтому стоит обратиться к условиям наблюдений.



Обратим внимание, что регистрация нейтрино таких высоких энергий — это довольно редкое событие: несколько штук в месяц. Детекторы расположены на большой глубине, до которой почти не добираются частицы космических лучей. Небольшая часть прошедших космических лучей, преимущественно мюоны, всё же детектируется телескопом, причем число событий, вызванных космическими лучами, превосходит число событий, связанных с нейтрино, отчего

последние сложно выделить в сильном шуме. Только при наблюдении на высотах от примерно  $-20^\circ$  толща льда становится достаточной, чтобы эффективно экранировать космические лучи.

Нейтрино, идущие со стороны Северного полюса, проходят через всю толщу Земли. Хотя нейтрино слабо взаимодействующие частицы, они всё же взаимодействуют с веществом Земли, отчего их поток уменьшается.

Это несколько контринтуитивный вывод, поскольку нейтрино обладают огромной длиной свободного пробега. Тем не менее с ростом энергии длина свободного пробега нейтрино уменьшается и для самых энергичных из них Земля перестаёт быть полностью прозрачной. Для нейтрино менее высоких энергий область высоких склонений на подобной карте не выделяется.

### **Критерии проверки**

- |  |                |
|--|----------------|
| 1. Поглощение нейтрино Землёй в северном направлении | <b>2 балла</b> |
| 2. Сильно зашумлённый сигнал в южном направлении     | <b>2 балла</b> |

Максимальная оценка за задачу **4 балла**.

*(Е. Н. Фадеев)*

### Задача 3

Наше Солнце движется относительно реликтового излучения со скоростью примерно 370 км/с в направлении созвездия Чаша вблизи границы с созвездием Льва. Оцените максимальную температуру реликтового фона, которую мы можем зафиксировать. В каком созвездии она будет наблюдаться? Сейчас средняя температура фона составляет 2.725 К, излучением пыли пренебречь.

**Решение.** Определим величину красного смещения, которое появляется в результате движения со скоростью  $v = 370$  км/с:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \approx 1.23 \cdot 10^{-3}.$$

Здесь  $\lambda_0$  — средняя по небу длина волны максимума реликтового излучения,  $\lambda$  — длина волны максимума излучения в заданном направлении. Следует заметить, что если Солнце движется в сторону созвездия Чаши / Льва, то оно движется навстречу реликтовому излучению, а значит, в данном направлении длина волны реликтового излучения будет уменьшаться, то есть красное смещение будет отрицательным.

Реликтовое излучение — чёрнотельное, а длина волны его максимума подчиняется закону смещения Вина:

$$\lambda = \frac{b}{T},$$

где  $T$  — температура излучения, а  $b$  — некоторая константа. Тогда

$$z = \frac{\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}}{\frac{1}{T_0}} = \frac{T_0 - T}{T}.$$

Отсюда

$$\frac{T_0}{T} = z + 1 \Rightarrow \frac{T}{T_0} = \frac{1}{z + 1} \Rightarrow T = \frac{T_0}{z + 1} = \frac{2.725}{1 - 0.00123} \approx 2.728 \text{ К}.$$

Итого, максимальная температура реликтового излучения 2.728 К наблюдается в направлении созвездий Чаша и Лев.

Для справки, минимальная температура реликтового излучения наблюдается в противоположном направлении в созвездии Пегаса, неподалёку от созвездия Рыбы.

#### Критерии проверки

- |  |          |
|--|----------|
| 1. Вычисление красного смещения: формула + значение                  | 1+1 балл |
| 2. Формула закона смещения Вина                                      | 1 балл   |
| 3. Формула зависимости температуры от красного смещения в явном виде | 2 балла  |
| 4. Численное значение температуры                                    | 2 балла  |
| В случае ошибок на предыдущих этапах этот этап не оценивается        |          |
| 5. Созвездие   | 1 балл   |

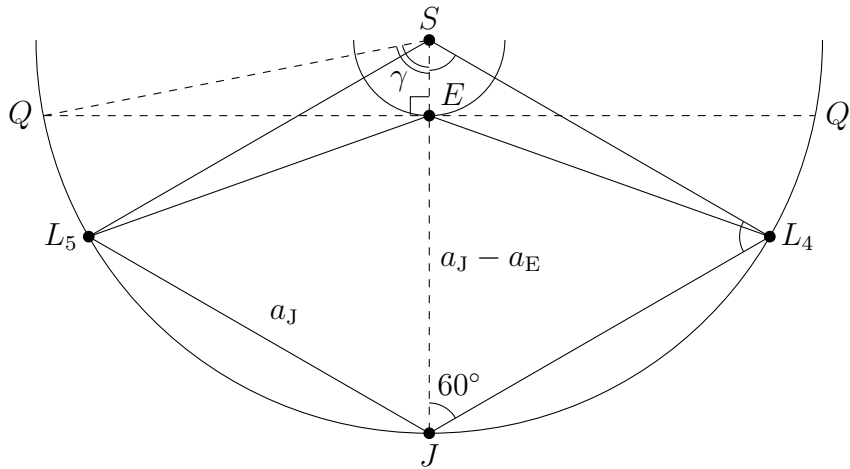
Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(С. Г. Желтоухов)

**Задача 4**

На орбите Юпитера в окрестностях точек Лагранжа  $L_4$  и  $L_5$  находятся две группы астероидов: «Греки» (опережают Юпитер) и «Троянцы». Два астероида, Грек и Троянец, находятся в точках Лагранжа своих групп. В некоторый момент времени на Земле наблюдалось противостояние Юпитера. Какое событие произойдёт раньше: противостояние Грека или квадратура Троянца? Через какое время наступят эти явления? Ответ дайте в сутках.

**Решение.** Как известно, точки Лагранжа  $L_4$  и  $L_5$  находятся в вершинах равносторонних треугольников, образованных также Юпитером и Солнцем. Нарисуем рисунок, на котором обозначим Солнце ( $S$ ), Землю ( $E$ ) и Юпитер ( $J$ ), а также точки Лагранжа  $L_4$  и  $L_5$ . Пусть  $a_E$  и  $a_J$  — радиусы орбит Земли и Юпитера. Тогда  $SJ = SL_4 = JL_4 = a_J$ , а  $EJ = a_J - a_E$ .



Перейдём в систему отсчёта, в которой Солнце, Юпитер и точки Лагранжа покоятся. В такой системе отсчёта Земля будет двигаться по своей орбите против часовой стрелки, совершая оборот за синодический период Юпитера  $S_J$ . Его можно вычислить, зная сидерический период Юпитера  $T_J = 11.862$  года (см. справочные данные):

$$S_J = \frac{11.862 \cdot 1}{11.862 - 1} \approx 1.09 \text{ года.}$$

В процессе движения Земли связанные с ней на чертеже пунктирные линии  $SE$  и  $QQ'$  также будут поворачиваться. Противостояние с Греком произойдёт тогда, когда пунктирная линия  $SE$  совпадёт с линией  $SL_4$ . К этому времени Земля пройдёт по орбите угол  $60^\circ$ , на что потребуется шестая часть синодического периода, то есть 0.182 года или 66 сут.

Заметим, что в этот момент  $\angle L_4EQ = 90^\circ < \angle L_4SL_5 = 120^\circ$ , то есть квадратура с Троянцем уже произошла.

Во время квадратуры точки  $L_5$  для земного наблюдателя точка  $Q$  совпадёт с точкой  $L_5$ . Угол  $\angle QSE = \gamma$  составляет

$$\gamma = \arccos \frac{a_E}{a_J} \approx 79^\circ.$$

Значит, до квадратуры с Троянцем Земле надо пройти угол  $\gamma - 60^\circ = 19^\circ$ . Земля совершит такое перемещение за

$$\frac{19^\circ}{360^\circ} S_J \approx 0.058 \text{ года} \approx 21 \text{ сут.}$$

### Критерии проверки

- |  |                    |
|--|--------------------|
| 1. Синодический период Юпитера: формула + значение   | <b>1 + 1 балл</b>  |
| 2. Время до противостояния Грэка: формула + значение | <b>1 + 1 балла</b> |
| 3. Время до квадратуры Троянца: формула + значение   | <b>2 + 1 балла</b> |
| 4. Вывод о том, какое событие раньше                 | <b>1 балл</b>      |

Если этот вывод сделан без вычисления времени до конфигурации одного из астероидов, то выставляется **2 балла**.

В случае ошибки на предыдущих этапах, приводящих к изменению порядка событий, этот этап не засчитывается.

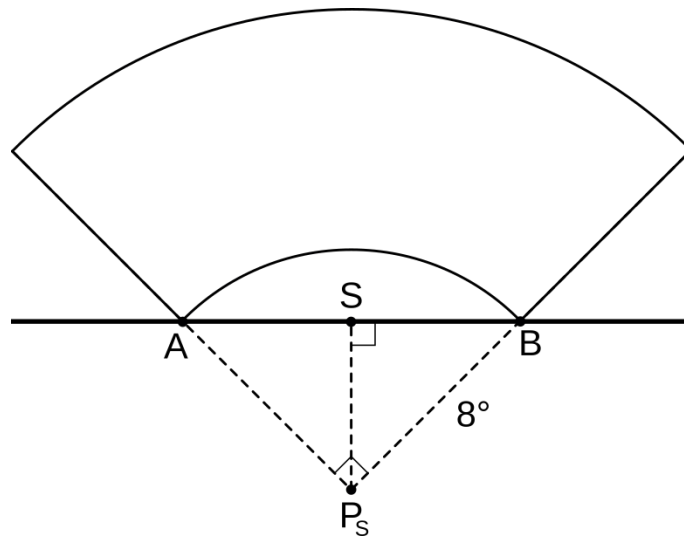
Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

*(М. В. Силантьев)*

**Задача 5**

Созвездие Хамелеона занимает на небе «прямоугольную» область от  $-75^\circ$  до  $-82^\circ$  по склонению и от  $7^h 40^m$  до  $13^h 40^m$  по прямому восхождению. На каких широтах можно увидеть это созвездие на небе полностью в один момент времени?

**Решение.** Для того чтобы созвездие было видно, необходимо, чтобы восходили над горизонтом самые южные его части. Южная граница созвездия отстоит от Южного полюса мира на  $8^\circ$ , а значит, будет кульминировать в точке юга на  $8^\circ$  с.ш. Это условие необходимое, но отнюдь не достаточное. Созвездие Хамелеона простирается по прямому восхождению на 6 часов, откуда следует, что когда одна из точек на его южной границе находится в верхней кульминации на горизонте, остальные находятся под горизонтом.



Рассмотрим ситуацию, когда восточный ( $A$ ) и западный ( $B$ ) «южные углы» созвездия одновременно находятся на горизонте. Расстояние этих точек от Южного полюса мира  $P_S$  равно  $8^\circ$ . Угол  $\angle AP_S B$  равен 6 часам или, в градусной мере,  $90^\circ$ . Нам необходимо найти полярное расстояние  $P_S S$  точки юга ( $S$ ). Очевидно, что  $\angle SP_S B = 45^\circ$ , откуда

$$P_S S = 8^\circ \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 5.7^\circ.$$

Южный полюс находится на глубине  $5.7^\circ$  под горизонтом для наблюдателя на  $5.7^\circ$  с.ш. При наблюдении на более южных широтах созвездие также можно будет наблюдать полностью.

Обратим внимание на эффекты, которые могут «приподнять» созвездие над горизонтом. Атмосферная рефракция у горизонта составляет  $35' \approx 0.6^\circ$ , что вполне сравнимо с найденной поправкой к формуле верхней кульминации.

Можно вспомнить, что рост наблюдателя ненулевой, а значит должно наблюдаться понижение горизонта. Его величина для наблюдателя ростом 1.7 м при радиусе Земли 6400 км составляет однако всего  $\sqrt{2 \cdot 1.7 / 6.4} \cdot 10^6 \approx 7.3 \cdot 10^{-6}$  рад  $\approx 0.04^\circ$ , что более чем на порядок уступает величине рефракции и на ответ практически не влияет.

Таким образом, с учётом рефракции, которая отодвигает искомую границу на север, получаем ответ:  $\varphi \in [90^\circ \text{ ю. ш.}; 6.3^\circ \text{ с. ш.}]$ .

*Замечание.* Дадим решение для любителей сферической тригонометрии. Обозначим  $AP_S = P_S B = p$ ,  $AS = SB = l$ ,  $P_S S = x$ . Применим теорему косинусов к сферическому треугольнику  $AP_S B$  и воспользуемся тем фактом, что угол  $AP_S B$  прямой:

$$\begin{aligned}\cos 2l &= \cos p \cos p, \\ \cos 2l &= 2 \cos^2 l - 1 = \cos^2 p, \\ \cos l &= \sqrt{\frac{\cos^2 p + 1}{2}}\end{aligned}$$

Теперь применим теорему косинусов для сферического треугольника  $SP_S B$ , вновь учитывая, что угол при вершине  $S$  прямой:

$$\cos p = \cos x \cos l \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{\cos p}{\cos l} = \sqrt{\frac{2 \cos^2 p}{\cos^2 p + 1}} = \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{1}{\cos^2 p}}} = \sqrt{\frac{2}{2 + \operatorname{tg}^2 p}}.$$

Подставив значение  $p$ , получим примерно то же самое значение  $x \approx 5.7^\circ$ . Очевидно, что последний способ излишне сложен для такой простой задачи.

### Критерии проверки

1. Правильный рисунок или описание условий видимости созвездия **2 балла**  
В частности, если указано, что созвездие можно увидеть в какой-то момент целиком из любой точки Южного полушария — **1 балл**.
2. Определение высоты полюса мира **3 балла**
3. Учёт рефракции **1 балл**  
При отсутствии этого пункта определение широты оценивается в полной мере.
4. Определение широты **2 балла**  
Если дано только граничное значение широты и из текста явно не понятно, что более южные широты тоже подходят, то **1 балл**.  
Если граничное значение неверно, то **0 баллов** за этот этап вне зависимости от того, на каком этапе была сделана (кроме неучёта рефракции).

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

**Задача 6**

Наблюдатель на экваторе заметил ровно в точке запада на горизонте геосинхронный полярный спутник, обращающийся по круговой орбите. Определите максимальную высоту этого спутника в данном пункте.

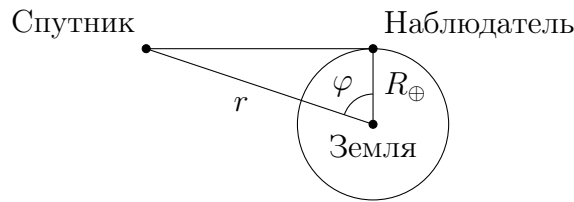
**Решение.** Геосинхронный спутник совершает один оборот вокруг Земли за одни звёздные сутки. Частным случаем геосинхронной является геостационарная орбита. Раз спутник движется по круговой орбите, её радиус равен радиусу геостационарной орбиты:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_{\oplus}T_{\oplus}^2}{4\pi^2}} \approx 42\,000 \text{ км.}$$

Здесь  $G$  — гравитационная постоянная,  $M_{\oplus}$  — масса Земли,  $T_{\oplus}$  — звёздные сутки. Треугольник спутник — центр Земли — наблюдатель прямоугольный. Найдём угол спутник — центр Земли — наблюдатель из определения косинуса:

$$\cos \varphi = \frac{R_{\oplus}}{r} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{R_{\oplus}}{r} \approx 81^\circ.$$

Здесь  $R_{\oplus}$  — радиус Земли.



Введём систему координат с центром в центре Земли так, что в момент, описанный в задаче, ось  $Ox$  совпадает с направлением на спутник, ось  $Oy$  направлена на полюс Земли, ось  $Oz$  дополняет до правой тройки. Таким образом, плоскость орбиты лежит в плоскости  $xy$ . Запишем зависимости координат спутника от времени, обозначив за  $\omega$  угловую скорость вращения Земли.

$$\begin{aligned} x_c &= r \cos \omega t \\ y_c &= r \sin \omega t \\ z_c &= 0 \end{aligned}$$

Координаты наблюдателя в этой же системе координат

$$\begin{aligned} x_n &= R_{\oplus} \cos(\omega t + \varphi) \\ y_n &= 0 \\ z_n &= R_{\oplus} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Нас интересует момент времени, когда высота спутника максимальна. Он соответствует моменту времени, когда расстояние до спутника минимально. Запишем квадрат расстояния

и посмотрим, чему равен его минимум.

$$\begin{aligned} d^2 &= (x_c - x_n)^2 + (y_c - y_n)^2 + (z_c - z_n)^2 = \\ &= (r \cos \omega t)^2 + (R_{\oplus} \cos(\omega t + \varphi))^2 - 2(r \cos \omega t)(R_{\oplus} \cos(\omega t + \varphi)) + (r \sin \omega t)^2 + (R_{\oplus} \sin(\omega t + \varphi))^2. \end{aligned}$$

Преобразуем, используя основное тригонометрическое тождество

$$d^2 = r^2 + R_{\oplus}^2 - 2(r \cos \omega t)(R_{\oplus} \cos(\omega t + \varphi)) = \text{const} - 2rR_{\oplus} \cdot (\cos \omega t \cos(\omega t + \varphi)).$$

Значит, необходимо определить максимальное значение произведения косинусов. Для его анализа, воспользуемся, например формулой косинуса суммы:

$$\cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) (\cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi)).$$

Теперь используем формулы для двойных углов

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) &= \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \cos(\varphi) - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \sin(\varphi) = \\ &= \frac{1}{2} [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)]. \end{aligned}$$

К этой формуле можно было прийти сразу, если использовать формулу для произведения косинусов

$$\cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} (\cos(\omega t + \varphi - \omega t) + \cos(\omega t + \varphi + \omega t)) = \frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos(2\omega t + \varphi).$$

Мы можем выбрать такое время  $t$ , чтобы косинус во втором слагаемом был равен единице. Тогда максимальное значение этого выражения равно

$$\frac{1}{2} (\cos \varphi + 1) = \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Подставим это значение в выражение для минимального расстояния до спутника

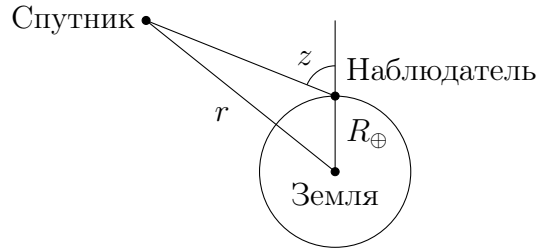
$$d_{\min}^2 = r^2 + R_{\oplus}^2 - 2(rR_{\oplus}) \frac{1}{2} (\cos \varphi + 1) = r^2 + R_{\oplus}^2 - rR_{\oplus} - rR_{\oplus} \cos \varphi.$$

Вспомним, чему равен  $\cos \varphi$ :

$$d_{\min}^2 = r^2 + R_{\oplus}^2 - rR_{\oplus} - rR_{\oplus} \frac{R_{\oplus}}{r} = r^2 - rR_{\oplus}.$$

Как бы ни был расположен спутник в момент минимального сближения, стороны треугольника спутник — центр Земли — наблюдатель равны  $R_{\oplus}$ ,  $r$  и  $d_{\min}$ . Угол при наблюдателе в нём равен  $180^\circ - z$ , где  $z$  — зенитное расстояние спутника. Запишем теорему косинусов для этого треугольника:

$$r^2 = R_{\oplus}^2 + d_{\min}^2 - 2R_{\oplus}d_{\min} \cos(180^\circ - z)$$



Учитывая, что высота  $h = 90^\circ - z$ , получаем

$$\sin h = \cos z = \frac{r^2 - R_{\oplus}^2 - d^2}{2R_{\oplus}d} = \frac{rR_{\oplus} - R_{\oplus}^2}{2R_{\oplus}\sqrt{r^2 - rR_{\oplus}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r - R_{\oplus}}{r}}$$

Подставим числа

$$\sin h = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{R_{\oplus}}{r}} = 0.46 \Rightarrow h \approx 27^\circ.$$

### Критерии проверки

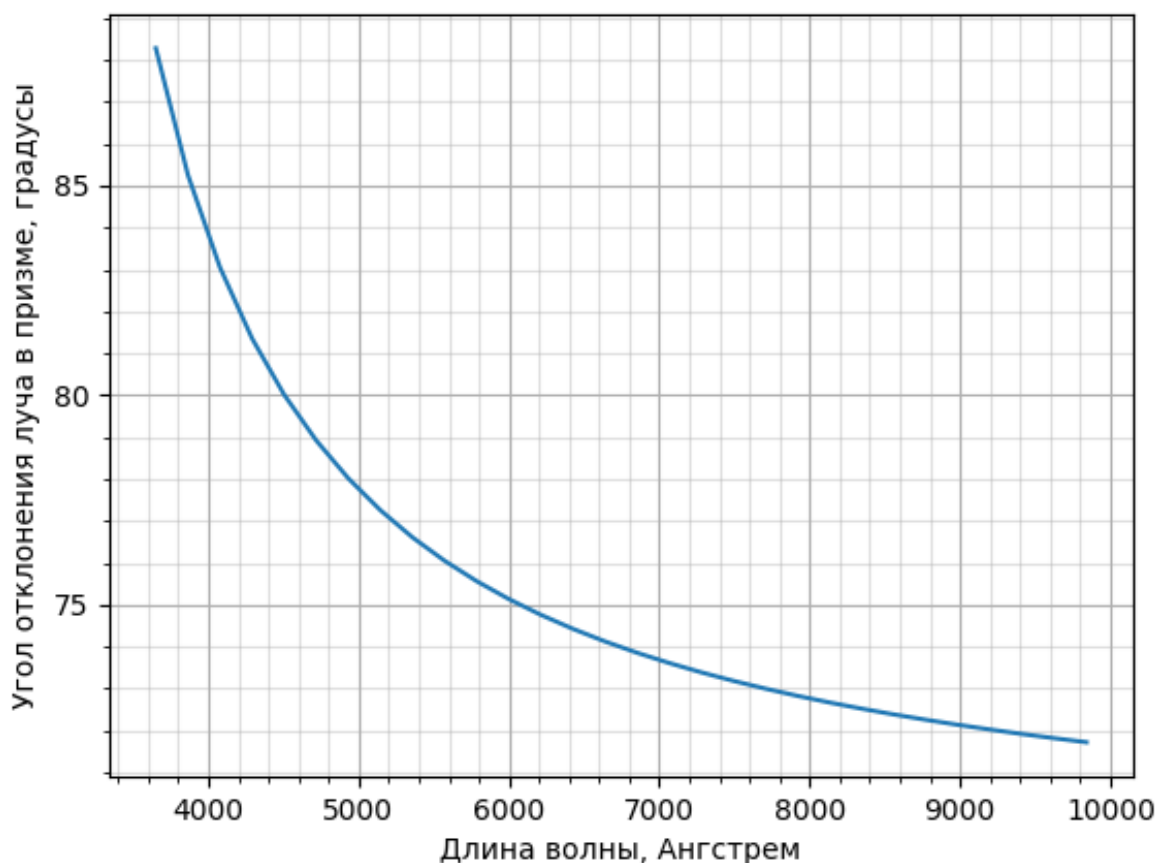
- |  |            |
|--|------------|
| 1. Определение радиуса орбиты спутника: формула + значение | 1 + 1 балл |
| 2. Минимальное расстояние до спутника                      | 4 балла    |
| 3. Максимальная высота спутника                            | 2 балла    |

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(А. В. Ребриков)

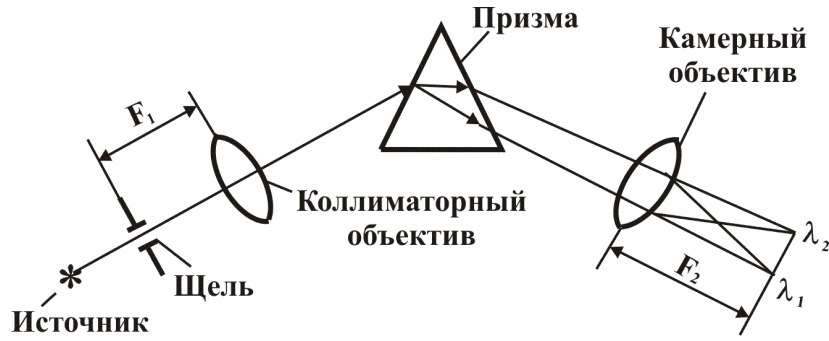
### Задача 7

Один юный астроном решил построить себе спектрограф. Он достал стеклянную призму с углом при вершине  $60^\circ$ , две линзы для камеры и коллиматора с фокусным расстоянием 20 см и диаметром 3 см и «небольшой» телескоп с диаметром объектива 50 см и относительным отверстием  $f/8$ . Считая ширину щели равной атмосферному размеру изображения звезды ( $1''$ ), оцените максимальное и минимальное относительное спектральное разрешение этого спектрографа в оптическом диапазоне спектра (от 4000 до 9000 ангстрем). Дифракцией на всех элементах оптической системы пренебречь. На рисунке представлена зависимость угла отклонения луча света в призме от длины волны.



**Решение.** Рассмотрим принципиальную схему призмного спектрографа. Источник света освещает щель спектрографа. За спектрографом установлена линза коллиматора таким образом, чтобы щель находилась в фокусе линзы. Тогда коллиматор создаёт параллельный пучок света, который падает на призму. После прохождения призмы свет попадает на линзу камеры, которая строит изображение в своей фокальной плоскости. Поскольку отклонение луча в призме зависит от длины волны, изображение щели, построенное камерой, оказывается растянутым.

Щель спектрографа устанавливается в фокальной плоскости телескопа. Фокусное расстояние телескопа  $F$  можно определить, зная диаметр объектива и относительное отверстие:  $F = 50 \text{ см} \cdot 8 = 400 \text{ см}$ . Если диск дрожания звезды имеет угловой размер  $1''$ , то диаметр изображения



такой звезды, построенное телескопом, будет равен

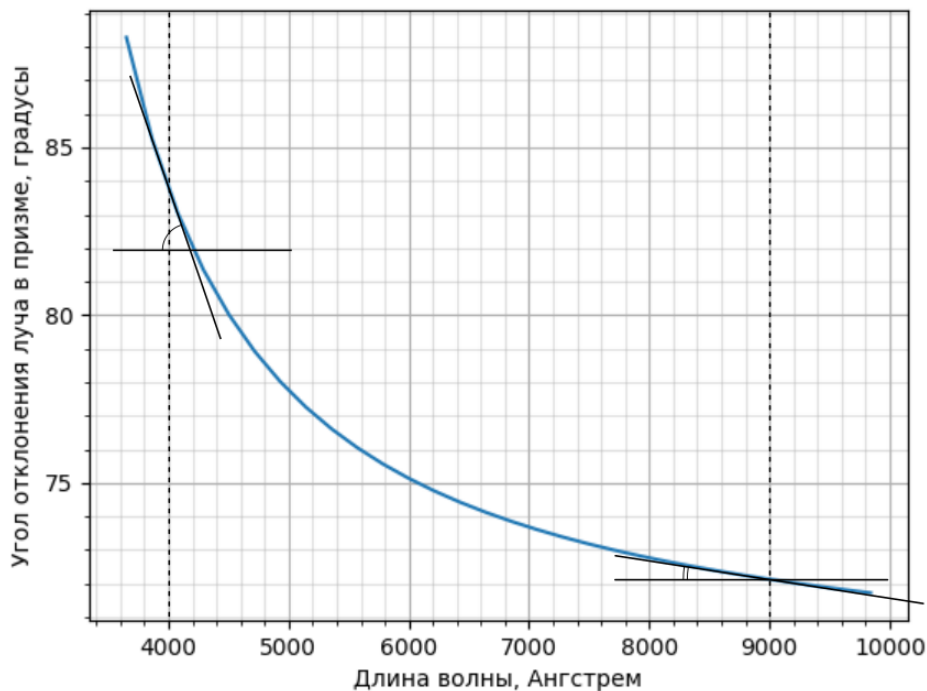
$$b = 2F \operatorname{tg} \frac{1''}{2} \approx \frac{F}{206265} \approx 19.4 \text{ мкм.}$$

Здесь мы воспользовались известным свойством: тангенс малого угла приблизительно равен самому этому углу, выраженному в радианах, а 206 265 — число секунд в радианах. По условию этой же величине равен линейный размер щели.

Так как мы пренебрегаем дифракцией, разрешение спектрографа будет ограничиваться угловым расхождением каждого монохроматического пучка после прохождения линзы коллиматора  $\theta$ , которое равно угловому размеру щели, видимому из центра этой линзы:

$$\theta = \frac{b}{F_{col}} = \frac{19.4 \text{ мкм}}{20 \text{ см}} = 9.7 \cdot 10^{-5} \text{ рад} \approx 20''.$$

Теперь нам нужно узнать, какому диапазону длин волн соответствует угловое разделение в  $20''$ . Для этого по графику, данному в условии, определим места, где малому изменению длины волны соответствует максимальное и минимальное изменения угла отклонения. Иначе говоря,



нам необходимо определить максимальное и минимальное значение производной заданной графически функции. Сделать это можно разными способами, например, просто проведя касательную по линейке. Видим, что наибольшая дисперсия будет на минимальной длине волны, а наименьшая — на максимальной. Оценим эти дисперсии:

$$D_{4000} = 35.7''/\text{Å}$$
$$D_{9000} = 1.9''/\text{Å}$$

Таким образом, разность углов отклонения  $\theta$  образуется на интервале длин волн  $\Delta\lambda$ , которое можно назвать абсолютным разрешением на данной длине волны:  $\theta = D\Delta\lambda$ . Тогда

$$\Delta\lambda_{4000} = \frac{\theta}{D_{4000}} = \frac{20''}{35.7''/\text{Å}} \approx 0.56\text{Å}$$
$$\Delta\lambda_{9000} = \frac{\theta}{D_{9000}} = \frac{20''}{1.9''/\text{Å}} \approx 10.5\text{Å}$$

Наконец, мы можем посчитать относительное разрешение спектрографа:

$$R_{4000} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{4000}} = \frac{4000\text{Å}}{0.56\text{Å}} \approx 7000$$
$$R_{9000} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{9000}} = \frac{9000\text{Å}}{10.5\text{Å}} \approx 1000$$

### Критерии проверки

- |   |         |
|---|---------|
| 1. Фокусное расстояние телескопа                                    | 1 балл  |
| 2. Ширина щели  | 1 балл  |
| 3. Расхождение пучка после коллиматора                              | 1 балл  |
| 4. Дисперсия для двух частот: метод + два значения                  | 3 балла |
| 5. Абсолютное разрешение для двух частот: формула + два значения    | 3 балла |
| 6. Относительное разрешение для двух частот: формула + два значения | 3 балла |

Максимальная оценка за задачу **12 баллов**.

(С. Г. Желтоухов)

### Задача 8

Подобно тому как звезды мерцают из-за рассеивания света на неоднородностях земной атмосферы, пульсары мерцают вследствие рассеивания радиоизлучения неоднородностями межзвёздной среды. Одна из простейших моделей мерцаний — рассеивание на тонком экране. Пусть  $D$  — расстояние от наблюдателя до пульсара. Расстояние от пульсара до экрана обозначим  $sD$ , а от экрана до наблюдателя —  $(1 - s)D$ ,  $0 < s < 1$ .

Вследствие рассеивания к наблюдателю попадают не только лучи, идущие прямо, но и некоторые лучи, рассеявшиеся на экране, образуя в плоскости наблюдателя сложное распределение областей пониженной и повышенной интенсивности излучения (картина мерцаний). Пульсар быстро движется относительно наблюдателя и экрана, в результате чего излучение проходит через разные части экрана, картина мерцаний движется, а телескоп фиксирует изменение интенсивности с частотой  $f$ .

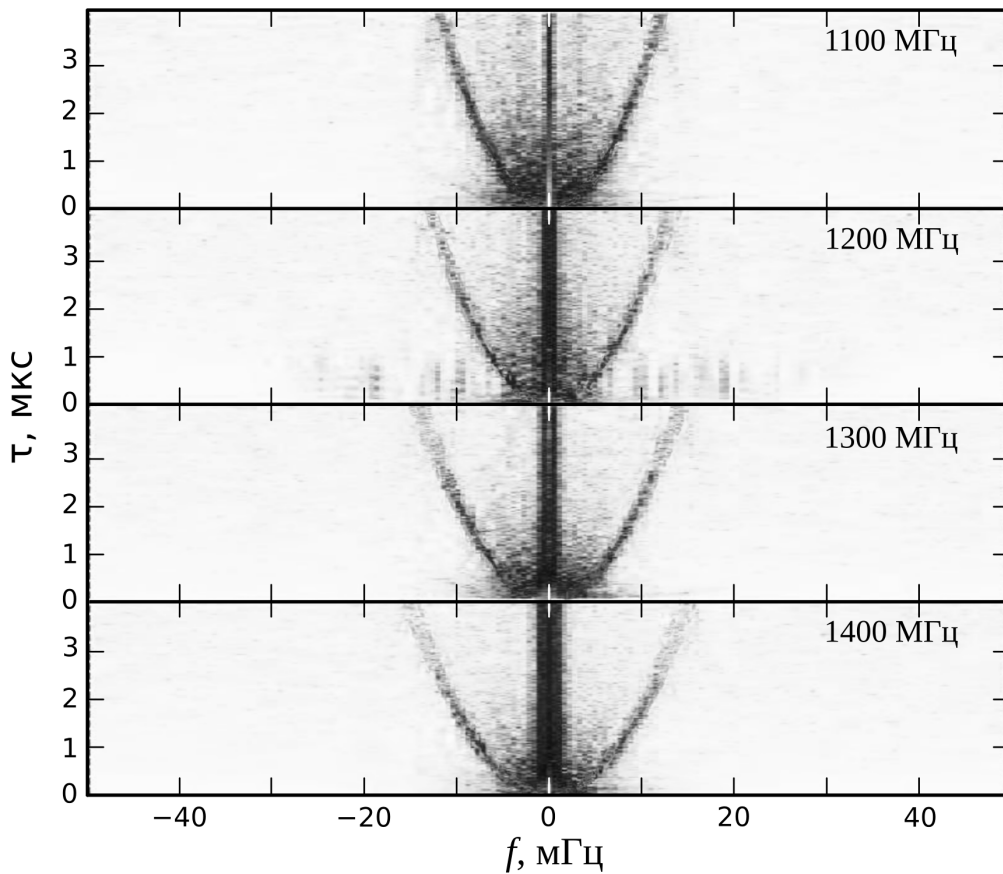


Рисунок из Yao et al 2020 RAA, v. 20, 5.

На рисунке показаны зависимости задержки сигнала  $\tau$ , вызванной рассеянием, от частоты  $f$  для пульсара B1919+10 на четырёх наблюдательных частотах. Аналитическая формула этой зависимости имеет вид

$$\tau = \eta f^2, \quad \eta = 5.15 \cdot 10^5 \frac{Ds(1-s)}{V_{\text{eff}}^2} \lambda^\alpha,$$

где  $D$  измеряется в килопарсеках,  $\lambda$  — длина волны наблюдения в метрах,  $V_{\text{eff}}$  — скорость экрана относительно отрезка наблюдатель — пульсар в км/с.

1. С помощью рисунка определите величину  $\alpha$ .
2. Найдите зависимость скорости  $V_{\text{эф}}$  от тангенциальной скорости пульсара  $V_p$ .
3. Определите угловой и линейный размер рассеянного изображения пульсара.

Считайте, что за пределами графиков полезного сигнала нет. Для исследуемого пульсара  $D = 0.36$  кпк,  $V_p = 177$  км/с. Движением наблюдателя и экрана пренебречь.

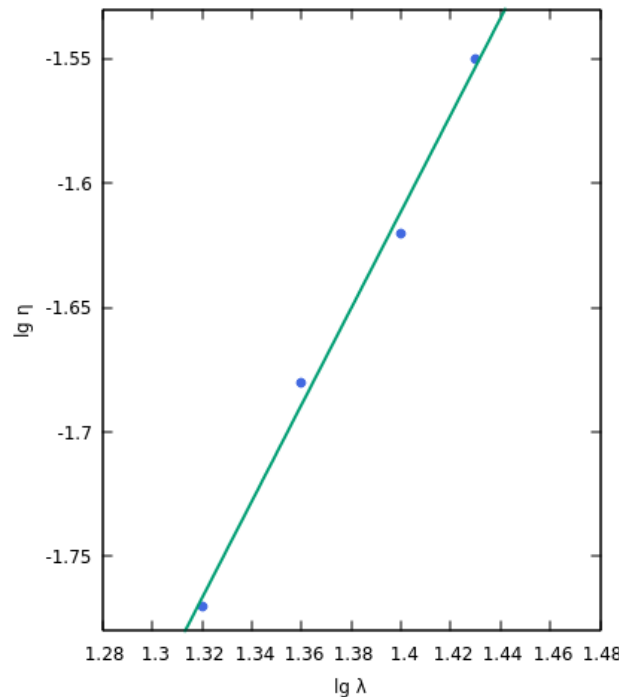
**Решение.** Для ответа на первый вопрос нам не требуется знать значение множителя при  $\lambda^\alpha$  в формуле для  $\eta$ . Обозначим его как  $C$  и прологарифмируем это выражение:

$$\lg \eta = \lg(C\lambda^\alpha) = \alpha \lg \lambda + \lg C.$$

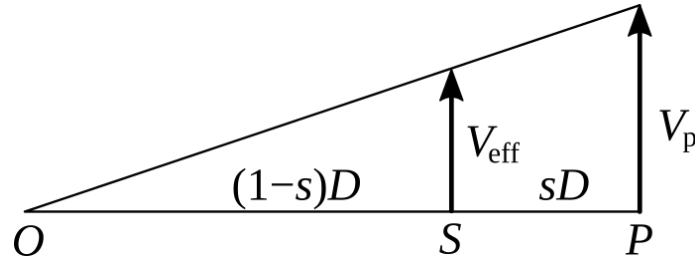
Зависимость между  $\lg \eta$  и  $\lg \lambda$  получилась линейной, а искомый параметр  $\alpha$  в ней — коэффициент наклона. Длина волны связана с частотой наблюдения  $\nu$  как  $\lambda = c/\nu$ , где  $c$  — скорость света. Частотам 1100 МГц, 1200 МГц, 1300 МГц, 1400 МГц соответствуют длины волн 27 см, 25 см, 23 см, 21 см. Для того чтобы определить  $\eta$ , выберем на каждой параболе на рисунке несколько точек, для каждой определим пары  $(f_i, \tau_i)$ , вычислим значения  $\eta_i = \tau_i/d_i^2$  и усредним результаты для каждой частоты. Результаты сведём в таблицу:

$\lambda$ , см	$\lg \lambda$	$\eta$ , с <sup>3</sup>	$\lg \eta$
21	1.32	0.017	-1.77
23	1.36	0.021	-1.68
25	1.40	0.024	-1.62
27	1.43	0.028	-1.55

Нанесём эти данные на график и проведём прямую по точкам. Получаем, что угол наклона равен около  $63^\circ$ , а искомый коэффициент  $\alpha = \text{tg}(63^\circ) \approx 2$ .



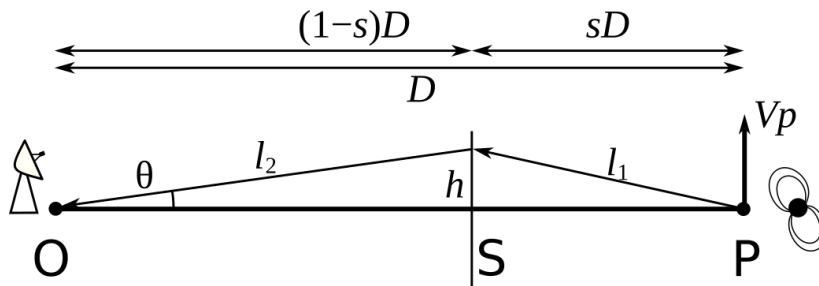
Пусть наблюдатель находится в точке  $O$ , экран — в точке  $S$ , а пульсар — в точке  $P$ . Скорость пульсара  $V_p$  и эффективная скорость  $V_{\text{эф}}$  перпендикулярны направлению  $OP$ .



Тогда из подобия треугольников получаем пропорцию

$$\frac{V_p}{V_{\text{eff}}} = \frac{D}{(1-s)D} \Rightarrow V_{\text{eff}} = (1-s)V_p.$$

Задержка сигнала в результате рассеивания возникает в связи с разной длиной пути рассеянного и нерассеянного сигналов. Пусть  $l_1$  — расстояние, которое проходит излучение пульсара до экрана,  $l_2$  — расстояние, пройденное от экрана до наблюдателя, а  $h$  — расстояние между рассеянным и нерассеянным лучами в плоскости экрана.



Угол  $\theta$ , под которым наблюдатель видит рассеянное изображение пульсара, крайне мал, поэтому дальше будем использовать формулы приближенных вычислений:  $\text{tg } \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$  и  $(1 + \theta)^n \approx 1 + n\theta$ .

Сначала определим  $l_2$ :

$$l_2 = \frac{(1-s)D}{\cos \theta} \approx \frac{(1-s)D}{1 - \frac{\theta^2}{2}} \approx (1-s)D \left(1 + \frac{\theta^2}{2}\right).$$

Расстояние  $h$  можно выразить как

$$h = (1-s)D \text{tg } \theta \approx (1-s)D\theta.$$

Тогда  $l_1$  можно получить из теоремы Пифагора:

$$l_1 = \sqrt{h^2 + s^2D^2} = sD \left(1 + \frac{h^2}{s^2D^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx sD \left(1 + \frac{(1-s)^2D^2\theta^2}{2s^2D^2}\right) = sD \left(1 + \frac{(1-s)^2\theta^2}{2s^2}\right).$$

Расстояние, пройденное импульсом пульсара, равно

$$l_1 + l_2 = (1-s)D + (1-s)D\frac{\theta^2}{2} + sD + \frac{(1-s)^2\theta^2}{s}D = D + \frac{1-s}{s}\frac{\theta^2}{2}D.$$

Здесь  $D$  — расстояние, пройденное нерассеянным импульсом, поэтому задержка составляет

$$\tau = \frac{l_1 + l_2 - D}{c} = \frac{(1-s)\theta^2}{s} \frac{D}{2c}.$$

Значение  $s$  можно определить с помощью измеренных значений  $\eta$ . Перепишем формулу из условия в более удобном виде, приняв во внимание полученное соотношение между  $V_p$  и  $V_{\text{eff}}$ :

$$\eta = 5.15 \cdot 10^5 \frac{Ds(1-s)}{(1-s)^2 V_p^2} \lambda^2 = 5.15 \cdot 10^5 \frac{Ds(1-s)}{(1-s)^2 V_p^2} \lambda^2 = 5.15 \cdot 10^5 \frac{D\lambda^2}{V_p^2} \frac{s}{1-s}$$

$$\frac{1}{s} - 1 = 5.15 \cdot 10^5 \frac{D\lambda^2}{\eta V_p^2}$$

$$s = \left( \frac{5.15 \cdot 10^5 D\lambda^2}{\eta V_p^2} + 1 \right)^{-1}.$$

Вычислим  $s$  для каждой длины волны, а результаты занесём в таблицу:

$\lambda$ , м	$\eta$ , с <sup>3</sup>	$s$
0.21	0.017	0.059
0.23	0.021	0.062
0.25	0.024	0.061
0.27	0.028	0.060

Усреднив значение  $s$ , получим  $s \approx 0.06$ . Максимальные задержки на графике равны 4.2 мкс. Тогда угловой размер изображения пульсара равен

$$2\theta = 2\sqrt{\frac{s}{1-s} \frac{2c\tau}{D}} = 2\sqrt{\frac{0.06}{(1-0.06)} \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 4.2 \cdot 10^{-6}}{0.36 \cdot 3.1 \cdot 10^{16}}} \approx 7.6 \cdot 10^{-9} \text{ рад} \approx 1.6 \cdot 10^{-3}''.$$

Этому углу соответствует линейный размер в области экрана

$$2h = (1-s)D \cdot 2\theta = (1-0.06) \cdot 360 \text{ пк} \cdot 7.6 \cdot 10^{-9} \text{ рад} \approx 2.6 \cdot 10^{-6} \text{ пк} \approx 0.5 \text{ а. е.}$$

### Критерии проверки

- |  |                |
|--|----------------|
| 1. Определение $\alpha$  | <b>4 балла</b> |
| Получено значение в пределах 1.8–2.2 — полный балл, 1.5–2.5 — не более 3 баллов.                 |                |
| Если значения $\eta$ получены по одному измерению на график, оценка снижается на <b>1 балл</b> . |                |
| 2. Определение зависимости $V_{\text{eff}}(V_p)$   | <b>1 балл</b>  |
| 3. Формула для задержки сигнала  | <b>2 балла</b> |
| 4. Определение $s$   | <b>2 балла</b> |
| Если значение получено по одному измерению, то <b>1 балл</b> .                                   |                |
| 5. Определение $\theta$  | <b>1 балл</b>  |
| 6. Определение линейного размера   | <b>2 балла</b> |

Максимальная оценка за задачу **12 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

## Справочные данные

### Данные о Солнце, Земле, Луне и Галактике

Светимость Солнца	$L_{\odot} = 3.827 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$
Видимая звёздная величина Солнца	$m_{\odot} = -26.78^{\text{m}}$
Абсолютная болометрическая звёздная величина Солнца	$M_{\odot} = 4.72^{\text{m}}$
Эффективная температура Солнца	$T_{\odot} = 5800 \text{ К}$
Солнечная постоянная	$E_{\odot} = 1360.8 \text{ Вт м}^{-2}$
Поток солнечной энергии в видимых лучах на расстоянии Земли	$= 600 \text{ Вт м}^{-2}$
Тропический год	$= 365.24219 \text{ сут}$
Звёздные сутки	$= 23 \text{ ч } 56 \text{ мин } 04 \text{ с}$
Наклон экватора к эклиптике	$\varepsilon = 23^{\circ} 26' 21.45''$
Синодический месяц	$S_{\zeta} = 29.53059 \text{ сут}$
Видимая звёздная величина полной Луны	$m_{\zeta} = -12.7^{\text{m}}$
Число звёзд в нашей Галактике	$= 10 \cdot 10^{11}$
Радиус диска нашей Галактики	$= 20 \text{ кпк}$
Масса нашей Галактики (в массах Солнца)	$= 2 \cdot 10^{12}$

### Астрономические и физические постоянные

Гравитационная постоянная	$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$
Скорость света в вакууме	$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м с}^{-1}$
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг с}^{-3} \text{ К}^{-4}$
Постоянная Планка	$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж с}$
Масса протона	$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Астрономическая единица	$1 \text{ а. е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м}$
Парсек	$1 \text{ пк} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м}$
Время накопления сигнала глазом	$= 0.05 \text{ с}$

### Формулы приближённого вычисления (при $x \ll 1$ )

$$\begin{aligned} \sin(x) &\approx x & \cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2} & \operatorname{tg} x &\approx x \\ \ln(1+x) &\approx x & e^x &\approx 1+x & (1+x)^\alpha &\approx 1+\alpha x \end{aligned}$$

### Характеристики Солнца, планет и некоторых спутников

Объект	Большая полуось, а.е.	Эксцентриситет	Орбитальный период	Масса, кг	Радиус, тыс. км	Осевой период
Солнце				$1.989 \times 10^{30}$	696	25.38 сут
Меркурий	0.3871	0.2056	87.97 сут	$3.302 \times 10^{23}$	2.44	58.65 сут
Венера	0.7233	0.0068	224.70 сут	$4.869 \times 10^{24}$	6.05	243.02 сут
Земля	1	0.0167	365.26 сут	$5.974 \times 10^{24}$	6.37	23.93 ч
Луна	0.00257	0.0549	27.322 сут	$7.348 \times 10^{22}$	1.74	27.32 сут
Марс	1.5237	0.0934	686.98 сут	$6.419 \times 10^{23}$	3.40	24.62 ч
Юпитер	5.2028	0.0483	11.862 лет	$1.899 \times 10^{27}$	69.9	9.92 ч
Сатурн	9.5388	0.0560	29.458 лет	$5.685 \times 10^{26}$	60.3	10.66 ч
Уран	19.1914	0.0461	84.01 лет	$8.683 \times 10^{25}$	25.6	17.24 ч
Нептун	30.0611	0.0097	164.79 лет	$1.024 \times 10^{26}$	24.7	16.11 ч