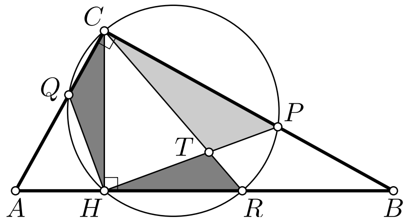
Задача 1. Герцог Сумматор выбрал некоторые вещественные числа (хотя бы одно, но, возможно, бесконечное количество). То же самое сделал герцог Вычитатор. Оказалось, что если x является числом Сумматора, а y является числом Вычитатора, то $x + y$ является числом Сумматора, а $y - x$ является числом Вычитатора. Обязательно ли все числа Сумматора являются числами Вычитатора?

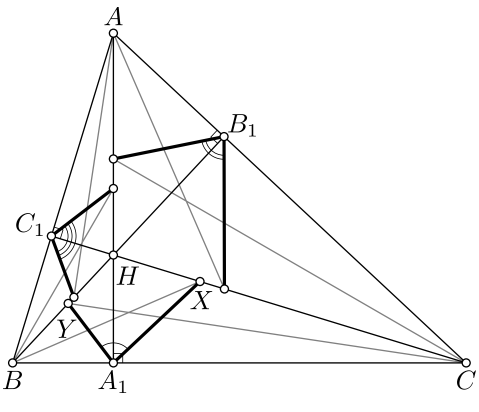
Задача 2. В треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту CH. Окружность, проходящая через точки C и H, повторно пересекает отрезки AC, CB и BH в точках Q, P и R соответственно. Отрезки HP и CR пересекаются в точке T. Что больше: площадь треугольника CPT или сумма площадей треугольников CQH и HTR?



Задача 3. В Камелот съехались 100 рыцарей Круглого Стола, любые два из которых либо дружат, либо враждуют (дружба и вражда взаимны). Фея Моргана может выбрать любого рыцаря и сделать так, что он поссорится со всеми своими друзьями и при этом подружится со всеми своими врагами. Накладывать это заклинание Моргана может сколько угодно раз. Докажите, что она сможет добиться того, чтобы в итоге образовались такие две группы по 5 рыцарей, что каждый рыцарь из первой пятёрки будет враждовать с каждым рыцарем из второй.

Задача 4. Существуют ли такие натуральные числа m и n и такой многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(m)$ не делится на n, но $f(p^k)$ делится на n для любого простого числа p и любого натурального k?

Задача 5. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Биссектриса угла CBH пересекает отрезок CH в точке X, биссектриса угла BCH пересекает отрезок BH в точке Y. Обозначим величину угла XA_1Y через α. Аналогично определим β и γ. Найдите значение суммы $\alpha + \beta + \gamma$.



Задача 6. Около таверны стоят 100 эльфов, 100 гномов и 100 орков. Сначала в неё заходят 10 эльфов, 10 гномов и 10 орков. Затем каждую минуту из неё выходит одно существо и тут же заходит другое, причём всегда после выхода эльфа заходит гном, после выхода гнома — орк, а после выхода орка — эльф. Могло ли оказаться так, что к какому-то моменту в таверне побывали все возможные компании из 30 существ ровно по одному разу? Все 300 существ различны.

XXII устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 13 апреля.
Подробности — на странице olympiads.mccme.ru/ustn/

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXVIII Московской математической олимпиады —
на сайте mmo.mccme.ru

ММО-2025. 10 класс. Решения

1. Герцог Сумматор выбрал некоторые вещественные числа (хотя бы одно, но, возможно, бесконечное количество). То же самое сделал герцог Вычитатор. Оказалось, что если x является числом Сумматора, а y является числом Вычитатора, то $x+y$ является числом Сумматора, а $y-x$ является числом Вычитатора. Обязательно ли все числа Сумматора являются числами Вычитатора?

(*А. Тертерян*)

Ответ. Да, обязательно.

Решение. Пусть a — некоторое число Вычитатора, b — некоторое число Сумматора.

Лемма. Если x — число Сумматора, то $-x$ является числом Вычитатора.

Действительно, по условию получаем, что сумма чисел a и x является числом Сумматора. Тогда разность $a-(a+x)=-x$ является числом Вычитатора. Лемма доказана.

Вернёмся к задаче. Пусть x — произвольное число Сумматора. По лемме число $-x$ является числом Вычитатора. Значит, разность чисел $-x$ и b является числом Вычитатора. Но тогда сумма чисел $-x-b$ и b, что равно $-x$, является числом Сумматора. Снова применяя лемму, получаем, что $-(-x)=x$ — число Вычитатора, что и требовалось.

Замечание. Из решения следует, что множества чисел, выбранных Сумматором и Вычитатором, совпадают.

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту CH. Окружность, проходящая через точки C и H, повторно пересекает отрезки AC, CB и BH в точках Q, P и R соответственно. Отрезки HP и CR пересекаются в точке T. Что больше: площадь треугольника CPT или сумма площадей треугольников CQH и HTR?

(*М. Евдокимов*)

Решение. см. 9.3

3. В Камелот съехались 100 рыцарей Круглого Стола, любые два из которых либо дружат, либо враждуют (дружба и вражда взаимны). Фея Моргана может выбрать любого рыцаря и сделать так, что он поссорится со всеми своими друзьями и при этом подружится со всеми своими врагами. Накладывать это заклинание Моргана может сколько угодно раз. Докажите, что она сможет добиться того, чтобы в итоге образовались такие две группы по 5 рыцарей, что каждый рыцарь из первой пятёрки будет враждовать с каждым рыцарем из второй.

(*М. Федотова, И. Богданов*)

Решение 1. Возьмём произвольного рыцаря K_1. Наложим заклинание на тех рыцарей, кто дружит с K_1, тем самым K_1 теперь будет со всеми враждовать. Выберем другого рыцаря K_2. Помимо их двоих осталось ещё 98 рыцарей (обозначим их за $\mathcal{T}_1$), поэтому K_2 либо дружит хотя бы с $98/2=49$ рыцарями из $\mathcal{T}_1$, либо враждует хотя бы с 49 из них. Наложением заклинания на K_2 (если необходимо) можно добиться того, чтобы реализовался второй вариант, при этом оно не затронет отношения K_1 с рыцарями из $\mathcal{T}_1$. Таким образом мы добились того, что K_1 и K_2 вместе враждуют с группой из 49 рыцарей (обозначим их за $\mathcal{T}_2$).

Продолжим процесс: выберем третьего рыцаря $K_3 \neq K_1, K_2$ не из $\mathcal{T}_2$. Тогда в $\mathcal{T}_2$ найдётся либо хотя бы $\lceil 49/2 \rceil = 25$ врагов K_3, либо хотя бы 25 друзей K_3. Во втором случае наложим заклинание на K_3, что даст нам группу из 25 рыцарей, враждующих с K_1, K_2, K_3 (обозначим их за $\mathcal{T}_3$). Аналогично находятся рыцари K_4, K_5 и строятся множества рыцарей $\mathcal{T}_4, \mathcal{T}_5$ размера $\lceil 25/2 \rceil = 13$ и $\lceil 13/2 \rceil = 7$ соответственно, при этом все рыцари из $\mathcal{T}_5$ будут враждовать с рыцарями $K_1, \ldots, K_5$, что и требовалось.

Решение 2. Зафиксируем 5 рыцарей, назовём их *орденом.* На каждого из оставшихся рыцарей наложим заклинание в том и только в том случае, если он дружит не более чем с двумя рыцарями из ордена. После наложения всех заклинаний получим, что каждый рыцарь имеет не менее 3 друзей среди рыцарей ордена. Будем считать двух рыцарей не из ордена *схожими*, если они дружат с одинаковыми рыцарями ордена. Рыцарей вне ордена 95, а множество возможных друзей может принимать $C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 10 + 5 + 1 = 16$ различных значений. Значит, по принципу Дирихле найдётся хотя бы $\frac{95}{16} > 5$ схожих рыцарей, назовём их *братством.* Тогда фея Моргана может наложить заклинания на их общих друзей из ордена, после чего каждый рыцарь из ордена будет враждовать с каждым рыцарем из братства.

Решение 3. Для решения нам понадобится следующая

Лемма. $C_k^5 + C_{99-k}^5 \geqslant C_{49}^5 + C_{50}^5$ для $k \in \mathbb{N}$ (считаем, что $C_k^5 = 0$ при $k < 5$).

Доказательство. Достаточно заметить, что для натуральных $x < y$ выполнено неравенство $C_x^5 + C_y^5 \geqslant C_{x+1}^5 + C_{y-1}^5$. Действительно, по условию $y - 1 \geqslant x$, поэтому $C_{y-1}^4 \geqslant C_x^4$. По свойству числа сочетаний левая часть равна $C_y^5 - C_{y-1}^5$, а правая равна $C_{x+1}^5 - C_x^5$, что приводит нас к требуемому неравенству. Лемма доказана.

Вернёмся к решению задачи. Назовём *метёлкой* пару из рыцаря (будем называть его *королём*) и пятёрки других рыцарей (будем называть их *орденом*), для которой король одновременно дружит или враждует со всеми рыцарями из ордена. Ясно, что если рыцарь K дружит с k рыцарями, то метёлок с королём K ровно $C_k^5 + C_{99-k}^5$, что по лемме не меньше $C_{50}^5 + C_{49}^5$, поэтому всего метёлок не менее $100 \cdot (C_{50}^5 + C_{49}^5)$. С другой стороны, количество возможных пятёрок равно C_{100}^5, поэтому по принципу Дирихле найдётся как минимум

$$\frac{100 \cdot (C_{50}^5 + C_{49}^5)}{C_{100}^5} = \frac{100 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot (50 + 45)}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96} = \frac{47 \cdot 46 \cdot (50 + 45)}{99 \cdot 2 \cdot 97 \cdot 2} > 5$$

метёлок с общим орденом. Тогда достаточно взять 5 таких метёлок и наложить заклинание на тех королей, которые дружат с рыцарями из ордена. Таким образом, все пять королей будут враждовать со всеми пятью рыцарями ордена, что и требовалось.

4. Существуют ли такие натуральные числа m и n и такой многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(m)$ не делится на n, но $f(p^k)$ делится на n для любого простого числа p и любого натурального k?

(*А. Волостнов, С. Гришин*)

Решение. см. 11.4

5. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Биссектриса угла CBH пересекает отрезок CH в точке X, биссектриса угла BCH пересекает отрезок BH в точке Y. Обозначим величину угла XA_1Y через α. Аналогично определим β и γ. Найдите значение суммы $\alpha + \beta + \gamma$.

(*А. Доледенок*)

Решение. см. 9.6

6. Около таверны стоят 100 эльфов, 100 гномов и 100 орков. Сначала в неё заходят 10 эльфов, 10 гномов и 10 орков. Затем каждую минуту из неё выходит одно существо и тут же заходит другое, причём всегда после выхода эльфа заходит гном, после выхода гнома — орк, а после выхода орка — эльф. Могло ли оказаться так, что в какой-то момент в таверне побывали все возможные компании из 30 существ ровно по одному разу? Все 300 существ различны.

(*М. Федотова*)

Решение. Назовём *типом* компании остаток разности количества эльфов и количества гномов при делении на три. Заметим, что компаний типа 1 и 2 одинаковое количество, так как между ними можно построить взаимнооднозначное соответствие: пронумеруем эльфов и гномов от 1 до 100 и поменяем одних на других с теми же номерами. Далее заметим, что компании меняются по циклу $0 \to 1 \to 2 \to 0 \ldots$, причём, так как компаний типов 1 и 2 поровну, мы не можем закончить на 1, то есть количество всех компаний не может давать остаток 2 при делении на 3. Вычислим C_{300}^{30} по модулю 3.

$$
\begin{aligned}
C_{300}^{30} = \frac{300 \cdot 299 \cdot 298 \cdot \ldots \cdot 273 \cdot 272 \cdot 271}{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} &= \\
= \frac{299 \cdot 298 \cdot 296 \cdot \ldots \cdot 274 \cdot 272 \cdot 271}{29 \cdot 28 \cdot 26 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{100 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot 92 \cdot 91}{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} &\equiv \\
\equiv \frac{100 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot 92 \cdot 91}{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{100 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 94 \cdot 92 \cdot 91}{10 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{33 \cdot 32 \cdot 31}{3 \cdot 2 \cdot 1} &\equiv \\
\equiv \frac{33 \cdot 32 \cdot 31}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 16 \cdot 31 \equiv 2 \pmod 3
\end{aligned}
$$

Противоречие, значит, так оказаться не могло.

Замечание. Есть другой способ посчитать остаток C_{300}^{30} при делении на 3. Теорема Люка утверждает, что если p — простое число, а числа n и k записываются в p-ичной системе счисления как $n = \sum n_i p^i$ и $k = \sum k_i p^i$, то $C_n^k \equiv \prod C_{n_i}^{k_i} \pmod p$. Запишем 300 и 30 в троичной системе счисления: $300 = (102010)_3$ и $30 = (1010)_3$. Таким образом, $C_{300}^{30} \equiv C_1^0 C_0^0 C_2^1 C_0^0 C_1^1 C_0^0 = 2 \pmod 3$.

Другое решение. Как и в прошлом решении разделим все компании на три типа. Если описанное в задаче возможно, то количества компаний разных типов отличается не более чем на 1, так как типы компаний меняются по циклу. Пронумеруем представителей всех рас от 1 до 100. Разобьем на тройки все компании, в которых множества номеров хотя бы каких-то двух рас различны, следующим образом. Возьмем некую компанию данного вида и рассмотрим максимальный номер, представленный хотя бы одной, но не всеми расами. Дважды «прокрутим» всех существ с этим номером, поменяв каждое существо на существо «следующей» расы с таким же номером. Легко видеть, что исходная и две полученные компании различных типов, причем с помощью данной операции они могут быть получены только друг из друга. При этом все компании не данного вида, коих всего C_{100}^{10}, имеют тип 0, то есть компаний типа 0 ровно на C_{100}^{10} больше, чем других — противоречие.