Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2025

Финальный этап   7 класс

Задача 1. Деревянный шар заморожен внутри ледяного куба и прикреплён верёвкой ко дну сосуда с водой. Куб полностью погружён в воду. После полного таяния льда сила натяжения верёвки изменилась на $|\Delta T| = 0{,}4$ Н. Определите плотность льда, если длина ребра ледяного куба составляет $a = 7$ см, плотность воды равна $\rho_\text{в} = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Возможное решение

1. На систему действуют сила тяжести: $F_\text{тяж}$, сила натяжения верёвки: T_1, выталкивающая сила Архимеда: $F_\text{Арх}$. Из условия равновесия:

$$T_1 + m_\text{лед} g + m_\text{шар} g = \rho_\text{вода} V_\text{лед} g.$$

2. Условие равновесия после таяния льда.

$$T_2 + m_\text{шар} g = \rho_\text{вода} V_\text{шар} g.$$

3. Разность сил натяжения.

$$T_1 - T_2 = \Delta T.$$

Подставляем выражения:

$$\Delta T + m_\text{лед} g = \rho_\text{вода} V_\text{лед} g - \rho_\text{вода} V_\text{шар} g.$$

4. Пренебрегаем объемом шара. Выражаем плотность льда.

$$m_\text{лед} = \rho_\text{лед} V_\text{лед}.$$

$$\rho_\text{лед} = \rho_\text{вода} - \frac{\Delta T}{a^3 g} = 883{,}4 \text{ кг/м}^3.$$

Ответ:

$$\rho_\text{лед} = 883{,}4 \text{ кг/м}^3.$$

Критерии

1. Верно записано условие равновесия системы шар и лед (+3 балла)
2. Верно записано условие равновесия после таяния льда (+3 балла)
3. Верно учтена разность сил натяжения (+2 балла)
4. Получено верное конечное выражение, с учётом или с пренебрежением объёмом шара (+2 балла)

Задача 2. Эскалатор метро движется со скоростью $v = 1$ м/с. Пассажир заходит на эскалатор по ходу движения и начинает двигаться следующим образом: он делает два шага вперёд и три шага назад. При этом он достигает другого конца эскалатора за время $t_1 = 40$ с. За какое время он бы добрался до конца эскалатора, если бы двигался обычным шагом? Скорость пассажира относительно эскалатора одинакова при движении вперёд и назад и равна $u = 0{,}4$ м/с. Считайте, что размеры ступенек много меньше длины эскалатора.

Возможное решение

Обозначим время одного шага как τ.

При описанном в условии варианте движения за время 5τ пассажир смещается относительно земли на расстояние

$$S_1 = 2\tau v - 3\tau u + 3\tau v + 2\tau u = 5\tau v - \tau u.$$

Средняя скорость движения пассажира равна

$$v_{\text{ср}1} = \frac{S_1}{5\tau} = \frac{5v - u}{5}.$$

Обозначим длину эскалатора как L, тогда

$$L = v_{\text{ср}1} t_1 = \frac{5v - u}{5} t_1.$$

Теперь рассмотрим случай, когда пассажир двигается обычным шагом. За τ он смещается относительно земли на расстояние

$$S_2 = \tau v + \tau u.$$

Средняя скорость во втором случае равна

$$v_{\text{ср}2} = \frac{S_2}{\tau} = v + u.$$

Для времени движения t_2 во втором случае получаем:

$$L = v_{\text{ср}2} t_2.$$

Подставляя выражение для L, получаем:

$$t_2 = \frac{(5v - u)}{5} \cdot \frac{1}{v + u} t_1.$$

$$t_2 = \frac{5v - u}{5(v + u)} t_1 \approx 26{,}3 \text{ с}$$

Ответ:

$$t_2 = 26{,}3 \text{ с}$$

Критерии

1. Верно получена средняя скорость пассажира в обычном режиме движения (+ 2 балла).
2. Верно получена средняя скорость пассажира в режиме движения "два шага вперед, три шага назад"(+ 4 балла).
3. Получены правильные буквенные и числовые ответы для искомого времени движения пассажира (+ 4 балла).

Задача 3. Юный экспериментатор Александр получает припой из сплава олова и свинца. Плотности олова и свинца равны $\rho_1 = 7{,}3\,\text{г/см}^3$ и $\rho_2 = 11{,}3\,\text{г/см}^3$. Смешав в некоторой пропорции компоненты припоя, Александр получил припой с плотностью $\rho = 8{,}4\,\text{г/см}^3$. Сверившись со своими расчетами для средней плотности смеси, Александр заметил, что получившееся в эксперименте значение на 5% выше расчетного. Осознав, что объем сплава может быть не равен сумме объемов сплавляемых компонент, Александр с легкостью вычислил массовые доли олова и свинца в своем сплаве. Сделайте это и вы.

Возможное решение

Пусть x — рассчетная доля олова по объему. Для рассчета плотности простой смеси предполагается:

$$\frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V} = \rho_{\text{ср}},$$

Где V - сумма исходных объемов сплавляемых компонентов $V = V_1 + V_2$.

$$x \cdot 7{,}3\ +\ (1-x)\cdot 11{,}3 = \rho_{\text{ср}},$$

где $\rho_{\text{ср}}$ — расчётная плотность. Поскольку практическая плотность на 5% выше расчетной, $\rho_{\text{ср}} = \frac{8{,}4\ \text{г/см}^3}{1{,}05} = 8\ \text{г/см}^3$.

Подставляя это значение в уравнение:

$$7{,}3\,x + 11{,}3\,(1-x) = 8.$$

Раскрыв скобки, получаем:

$$7{,}3\,x + 11{,}3 - 11{,}3\,x = 8,$$

$$-\,4\,x + 11{,}3 = 8 \quad\longrightarrow\quad -\,4\,x = -\,3,3 \quad\longrightarrow\quad x = \frac{3,3}{4} = 0{,}825.$$

Для перехода к массовой доле олова $\frac{m_1}{m}$ заметим, что искомая массовая доля связана с объёмной соотношением:

$$\frac{m_1}{m} = \frac{V_1}{V}\frac{\rho_1}{\rho_{\text{ср}}}$$

$$\frac{m_1}{m} = 0{,}825\frac{7{,}3}{8} \approx 0,75$$

Аналогично для свинца:

$$\frac{m_2}{m} = (1-0{,}825)\frac{11{,}3}{8} \approx 0,25$$

Следовательно, массовая доля олова $x \approx 75\%$, а свинца — около 25%. Плотность 8,4 г/см^3 получается выше расчётной 8,0 г/см^3, что указывает на изменение объёмов при сплавлении.

Ответ:

$$\text{олова} - 75\%, \text{свинца} - 25\%$$

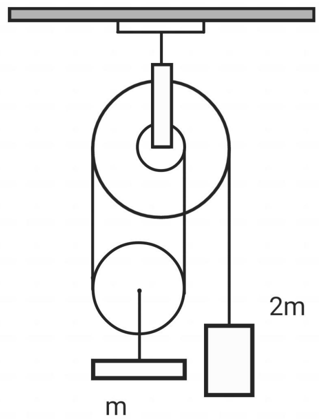
Критерии

1. Верно записана плотность простой смеси через объемные доли компонентов (+ 4 балла).
2. Найдена связь между объемными долями компонентов (+ 2 балла).
3. Найдено верное значение ожидаемой плотности припоя (+ 2 балла).
4. Верно решено уравнение на массовые доли компонентов (+ 2 балла).

Задача 4. На горизонтальной неподвижной оси закреплен составной блок, состоящий из двух жестко соединенных дисков радиусами R и $3R$. Один конец нити намотан на малый диск, далее нить проходит через систему блоков и образует петлю, удерживающую груз массой $m = 150$ г. Второй конец нити свисает с большого диска составного блока и поддерживает груз массой $2m$.

Определите, какую дополнительную массу M нужно положить на груз m, чтобы система оставалась в равновесии.

Считайте, что нить и блоки невесомые, а трение отсутствует.



Возможное решение

1. Запишем правило моментов для неподвижного составного блока. Отсюда получим связь между силами натяжения по разные стороны от большого диска:

$$T_1\ R + T_2\ 3R = T_1\ 3R$$

$$T_2 = \frac{2}{3} T_1$$

2. Запишем для каждого груза условие равновесия. Обозначим массу дополнительного груза как M:

$$T_2 = 2mg$$

$$2T_1 = mg + Mg$$

Отсюда,

$$M = 5m = 750 \text{ г.}$$

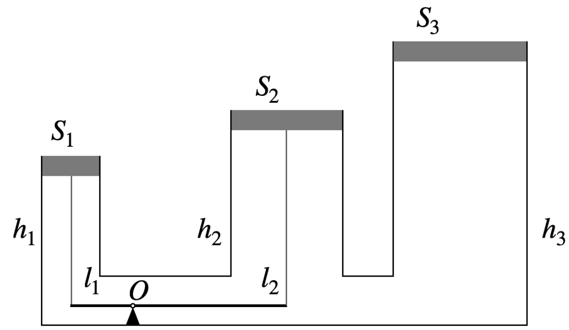
Ответ:

$$M = 750 \text{ г.}$$

Критерии

1. Правильно записано правило моментов (+4 балла)
2. Верно записано уравнение сил для каждого груза (+4 балла)
3. Получен верный конечный ответ (+2 балла)

Задача 5. На дне общего участка сообщающихся сосудов закреплён рычаг, как показано на рисунке. Рычаг находится в равновесии. Сосуд заполнен водой, причём каждое из колен сосуда плотно закрыто сверху подвижным поршнем. Плечи рычага l_1 и l_2 соединены тонкими прочными нерастяжимыми нитями с поршнями первых двух колен сосуда. Найдите соотношение $\dfrac{l_2}{l_1}$, если известно, что $h_3 = 2\,h_1$, $h_2 = 1{,}8\,h_1$, а площади поршней связаны соотношением $S_2 = 3\,S_1$.



Возможное решение

Пусть на первое (левое) плечо рычага действует сила F_1, а на второе (правое) плечо — сила F_2. Эти же силы через тонкие нити передаются к поршням в соответствующих коленах. Следовательно, дополнительное давление, оказываемое поршнями на жидкость в каждом колене, равно:

$$P_1 = \frac{F_1}{S_1}, \quad P_2 = \frac{F_2}{S_2}.$$

Из условия равновесия рычага (равенство моментов) следует:

$$F_1\,l_1 = F_2\,l_2.$$

Эквивалентно можно записать это в терминах давлений и площадей:

$$F_1\,l_1 = F_2\,l_2 \implies P_1\,S_1\,l_1 = P_2\,S_2\,l_2 \implies P_1 = \frac{S_2\,l_2}{S_1\,l_1}\,P_2. \qquad (1)$$

Гидростатическое давление в нижней (общей) части сосуда одинаково для всех колен. Значит, для колен 1 и 2:

$$\rho\,g\,h_1 + P_1 = \rho\,g\,h_2 + P_2 \implies P_2 - P_1 = \rho\,g\,(h_1 - h_2). \qquad (2)$$

Используя прошлое выражение для связи давлений

$$P_2 - \frac{S_2\,l_2}{S_1\,l_1}\,P_2 = \rho\,g\,(h_1 - h_2) \implies \left(1 - \frac{S_2\,l_2}{S_1\,l_1}\right)P_2 = \rho\,g\,(h_1 - h_2). \qquad (3)$$

Аналогично, для колен 2 и 3 имеем:

$$\rho\,g\,h_2 + P_2 = \rho\,g\,h_3 \implies P_2 = \rho\,g\,(h_3 - h_2). \qquad (4)$$

Таким образом

$$\left(1 - \frac{S_2\,l_2}{S_1\,l_1}\right)\rho\,g\,(h_3 - h_2) = \rho\,g\,(h_1 - h_2).$$

Сокращая на $\rho\,g$, делим все на h_1 и переходим к относительным высотам:

$$\left(1 - \frac{S_2\,l_2}{S_1\,l_1}\right)\left(\frac{h_3}{h_1} - \frac{h_2}{h_1}\right) = 1 - \frac{h_2}{h_1}. \qquad (5)$$

По условию:

$$h_3 = 2\,h_1, \quad h_2 = 1{,}8\,h_1, \quad S_2 = 3\,S_1.$$

Следовательно,

$$\frac{h_3}{h_1} - \frac{h_2}{h_1} = 2 - 1{,}8 = 0{,}2, \quad 1 - \frac{h_2}{h_1} = 1 - 1{,}8 = -0{,}8.$$

Также $S_2 = 3\,S_1$.

$$\left(1 - 3\,\frac{l_2}{l_1}\right)0{,}2 = -0{,}8.$$

Упростим:

$$0{,}2 \;-\; 0{,}6\,\frac{l_2}{l_1} \;=\; -\,0{,}8 \quad\Longrightarrow\quad -\,0{,}6\,\frac{l_2}{l_1} \;=\; -\,1{,}0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{l_2}{l_1} \;=\; \frac{5}{3}.$$

Ответ:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{5}{3}$$

Критерии

1. Верно записано условие равновесия рычага через силы (+ 1 балла).
2. Верно найдена связь сил, действующих на плечи рычага с давлением на соответсвующие поршни (+ 1 балла).
3. Из равенства моментов сил, действующих на плечи рычага, найдена связь давлений на поршни (+ 1 балла).
4. Записаны условия равенства давлений на дне 1-ого, 2-ого и 3-его колен сосуда. (+ 2 балла).
5. Из условий равенства давлений получено уравнение, связывающее высоты колен сосуда (+ 2 балла).
6. Получено уравнение на отоншение длин плеч рычага (+ 2 балла).
7. Верно найдено численное значение отношений длин рычага (+ 1 балла).

Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2025

Финальный этап 8 класс

Задача 1. Лодка начала движение от одного берега реки к противоположному. Лодочник направил нос лодки перпендикулярно берегу и начал грести веслами, сообщая лодке скорость поперек реки, но за счёт течения лодку относило и вдоль реки со скоростью $u_1 = 10\,\text{км/ч}$. Когда лодка достигла середины реки, начался сильный ветер, и её стало сносить вдоль реки уже со скоростью $u_2 = 15\,\text{км/ч}$. Испугавшись, лодочник начал грести сильнее и в итоге всё же причалил к противоположному берегу. Оказалось, что средняя скорость движения лодки вдоль реки равна $\langle u\rangle = 12\,\text{км/ч}$. Во сколько раз быстрее стал грести лодочник?

Возможное решение

Предположим, что ширина реки равна $2D$ (то есть от одного берега до другого нужно пройти «поперёк течения» расстояние $2D$). Первая половина пути — от берега до середины реки (D по поперечному направлению), вторая половина — от середины до противоположного берега (ещё D). Пусть v_1 — скорость лодки **поперёк** реки при гребле до середины, а v_2 — скорость лодки поперёк реки во второй половине пути. Вдоль реки (по течению) лодку сносит со скоростью $10\,\text{км/ч}$ при движении до середины реки и $15\,\text{км/ч}$ после.

$$T_1 \;=\; \frac{D}{v_1} \quad \text{(время на первую половину)}, \qquad T_2 \;=\; \frac{D}{v_2} \quad \text{(время на вторую половину)}.$$

За первую половину переправы лодку сносит на расстояние u_1T_1 . За вторую половину лодку сносит на расстояние u_2T_2.

Таким образом, полный снос за всё время переправы равен:

$$S = u_1T_1 \;+\; u_2T_2.$$

А суммарное время переправы:

$$T = T_1 + T_2.$$

По условию задачи, средняя скорость движения лодки вдоль реки (средняя скорость сноса) составила $12\,\text{км/ч}$. Это означает:

$$\frac{S}{T} \;=\; 12\ \text{км/ч}.$$

Подставляя выражения из п.3 и данные из условия:

$$\frac{10\,T_1 \;+\; 15\,T_2}{T_1 + T_2} \;=\; 12.$$

Умножим обе части на $(T_1 + T_2)$:

$$10\,T_1 \;+\; 15\,T_2 \;=\; 12\,(T_1 \;+\; T_2).$$

Раскроем правую часть:

$$10\,T_1 \;+\; 15\,T_2 \;=\; 12\,T_1 + 12\,T_2 \quad\Longrightarrow\quad (10-12)\,T_1 + (15-12)\,T_2 = 0$$

$$-\,2\,T_1 \;+\; 3\,T_2 \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad 3\,T_2 \;=\; 2\,T_1 \quad\Longrightarrow\quad T_2 \;=\; \frac{2}{3}\,T_1.$$

Поскольку $T_1 = \frac{D}{v_1}$ и $T_2 = \frac{D}{v_2}$, имеем

$$\frac{D}{v_2} \;=\; \frac{2}{3}\,\frac{D}{v_1} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{v_2} \;=\; \frac{2}{3}\,\frac{1}{v_1} \quad\Longrightarrow\quad v_2 \;=\; \frac{3}{2}\,v_1.$$

Таким образом, во вторую половину пути лодочник стал грести *в полтора раза быстрее*:

$$v_2 = 1{,}5\,v_1.$$

Ответ:

1,5

Критерии

1. Найдены времена движения лодки до и после усиления ветра (+ 2 балла).
2. Найдена длина пути лодки вдоль направления сноса за все время переправы (+ 3 балла).
3. Записано выражение для средней скорости сноса (+ 2 балла).
4. Получена связь времен движения лодки до и после усиления ветра (+ 2 балла).
5. Получено верное отношения скоростей движения лодки поперек реки до и после усиления ветра (+ 1 балла).

Задача 2. Вероника собралась готовить обед и достала из холодильника пельмени. Каждый пельмень имеет массу $m_п = 20$ г, состоит на 70% по массе из воды и имеет начальную температуру $t_1 = -20°C$. Вероника поставила на плиту кастрюлю, в которой находится $m_в = 1{,}2$ кг воды, которая вскоре начала кипеть при температуре $t_2 = 100°C$.

1. Вероника бросила в кипящую воду один пельмень, после чего вода перестала кипеть. Через какое время τ вода в кастрюле закипит снова?

2. Вероника долила воды в кастрюлю, измерила ее новую температуру $t_3 = 90°C$ и спустя $\Delta\tau = 20$ с стала забрасывать пельмени по одному через каждые 30 с (в моменты времени 20, 50, 80, 110 с), причём температура воды после забрасывания каждого пельменя уменьшалась на $1°C$. Постройте график зависимости температуры воды от времени в течение первых 2-ух минут, если суммарная масса пельменей значительно меньше массы воды.

Удельная теплоёмкость пельменя при температуре ниже $0°C$ составляет $c_{п1} = 2000\frac{Дж}{кг\cdot°C}$, а при температуре выше $0°C$ составляет $c_{п2} = 3500\frac{Дж}{кг\cdot°C}$, удельная теплоёмкость воды $c_в = 4200\frac{Дж}{кг\cdot°C}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}34\cdot10^5$ Дж/кг. Полезная мощность плиты $P = 1000$ Вт. Считайте, что тепловой баланс между пельменями и водой устанавливается мгновенно.

Возможное решение

1. Вода перестаёт кипеть, так как холодный пельмень охлаждает окружающую его воду. В результате перемешивания температура воды в кастрюле становится ниже $100°C$, и кипение прекращается.

Для нагрева пельменя от $t_1 = -20°C$ до $t_2 = 100°C$ необходимо передать ему количество теплоты:

$$Q = m_p c_{п,1}(t_0 - t_1) + w m_p \lambda + m_p c_{п,2}(t_2 - t_0),$$

где $t_0 = 0°C$, $w = 0,7$.

Время, через которое вода снова закипит, определяется по формуле:

$$\tau = \frac{Q}{P} = 12.5 \text{ с.}$$

2. Из уравнения теплового баланса:

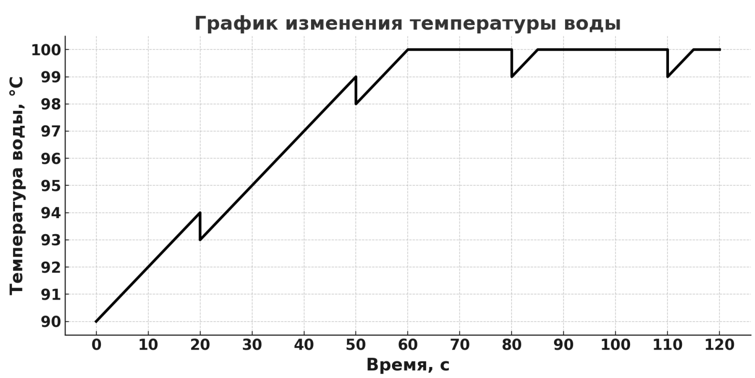
$$P\tau = m_в c_в (t_2 - t_1) = m_в c_в \Delta t,$$

можно определить скорость увеличения температуры воды:

$$\frac{\Delta t}{\tau} = \frac{P}{m_в c_в} = 0.2°C/\text{с.}$$

Таким образом, температура воды увеличивается со скоростью $0.2°C$ в секунду.

При этом известно, что при добавлении каждого пельменя температура воды падает на $1°C$, а пельмени добавляют в моменты времени 20, 50, 80, 110 секунд.



Ответ:

$$\tau = 12,5 \text{ с}$$

Критерии

1. Верно записано уравнение теплового баланса для нагревания одного добавленного пельменя (+ 2 балла).

2. Верно получено время закипания воды (+ 2 балла).

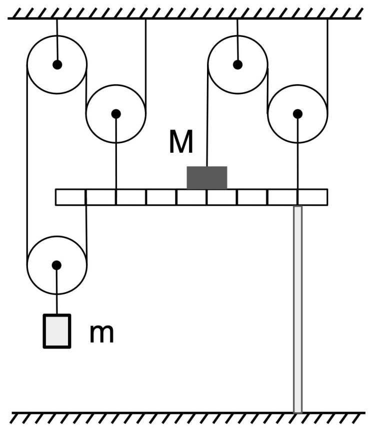
3. Верно определена скорость увеличения температуры воды (наклон графика) (+ 2 балла).

4. Построен верный график (+ 4 балла).

Задача 3. На тонкой невесомой планке, соединённой невесомыми верёвками с системой невесомых блоков, расположен груз массой $M = 35$ кг. Планка поддерживается устойчивой вертикальной доской.

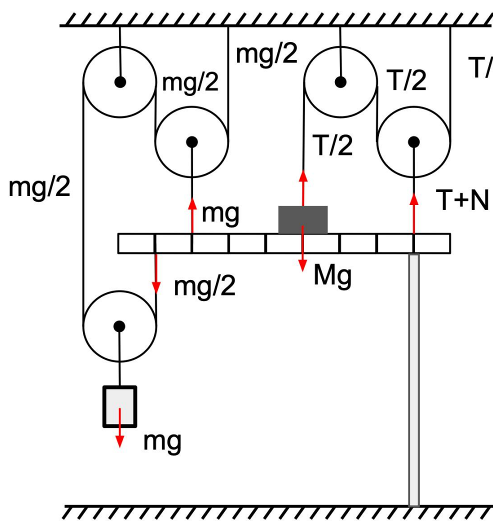
1. Определите, при каких значениях массы m груза, подвешенного к блоку, система останется в равновесии.
2. Определите, при каких значениях массы m груза, подвешенного к блоку, планка сможет остаться в равновесии после удаления поддерживающей доски.

Вертикальные черточки делят планку на равные части. Трение во всей системе отсутствует, масса планки и блоков пренебрежимо мала.



Возможное решение

Обозначим массу груза, подвешенного к крайнему блоку, как m, силу натяжения нити, прикреплённой к левому подвижному блоку, как T, а силу реакции устойчивой доски, поддерживающей планку, как N. Длину одной части планки обозначим за L.



Объединим в систему планку и груз массы M. Система находится в равновесии, поэтому выполняются два условия:
1) Равенство сил в проекции на вертикальную ось:

$$3T/2 + N + mg = Mg + mg/2;$$

2) Равенство моментов сил относительно оси, проходящей через опорную точку доски:

$$3LT/2 + 6Lmg = 3LMg + 7Lmg/2.$$

Решая систему этих уравнений, получаем выражения:

$$T = 2Mg - 5mg/3,$$

$$N = 2mg - 2Mg.$$

Так как силы N и T должны быть направлены вверх, то их значения должны быть положительными. Кроме того, сила $T/2$ не должна превышать Mg, иначе груз на планке начнёт подниматься, и равновесие нарушится.

Таким образом, из условий $N \geq 0$ и $0 \leq T \leq 2Mg$, получаем двойное неравенство:

$$M \leq m \leq 6M/5.$$

Подставляя $M = 35$ кг, находим:

$$35 \text{ кг} \leq m \leq 42 \text{ кг}.$$

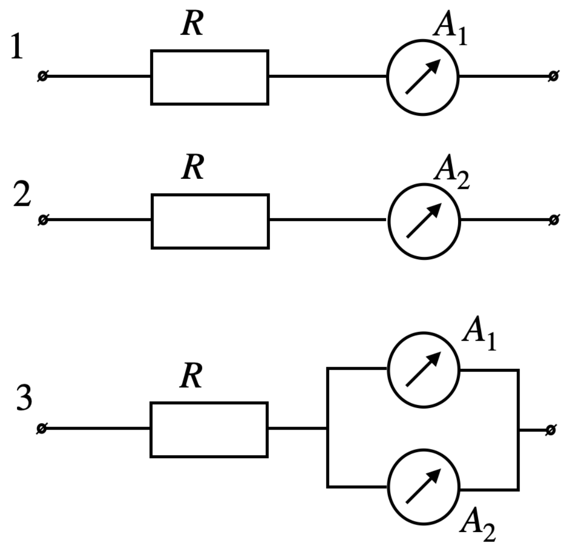
Для ответа на второй вопрос рассмотрим предельный случай $N = 0$, откуда следует, что $m = M$.
Ответ:

$$1)\ 35 \text{ кг} \leq m \leq 42 \text{ кг},\ \ 2)\ 35 \text{ кг}$$

Критерии

1. Верно записан баланс сил в проекции на вертикальную ось (+ 2 балла).
2. Верно записано равенство моментов сил относительно выбранной оси (+ 2 балла).
3. Получены верное выражения для силы натяжения нити и силы реакции доски (+ 2 балла).
4. Получено верное ограничение на массу груза (+ 2 балла).
5. Получена верная масса груза в предельном случае (+ 2 балла).

Задача 4. Вероника определяет сопротивление резистора R, используя источник напряжения $U = 12$ В и два неидеальных амперметра A_1 и A_2 с неизвестными сопротивлениями R_1 и R_2 соответственно. Она проводит три эксперимента. В первом опыте последовательно соединены резистор R и амперметр A_1, сила тока в цепи равна $I_1 = 2{,}4$ А. Во втором опыте последовательно с тем же резистором включается амперметр A_2, и сила тока равна $I_2 = 2{,}0$ А. В третьем опыте резистор R последовательно соединён с параллельно соединёнными амперметрами A_1 и A_2; общая сила тока в цепи, то есть сумма показаний обоих амперметров, равна $I_3 = 3$ А. Найдите сопротивление резистора R.



Возможное решение

В первом опыте

$$I_1 = \frac{U}{R+R_1}, \quad \text{то есть} \quad R+R_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{12}{2{,}4} = 5 \text{ Ом}.$$

Во втором опыте

$$I_2 = \frac{U}{R+R_2}, \quad \text{то есть} \quad R+R_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{12}{2{,}0} = 6 \text{ Ом}.$$

В третьем опыте амперметры R_1 и R_2 включены параллельно, а эта параллель последовательно соединена с R. Поскольку сумма показаний обоих амперметров равна $I_3 = 3$ А, полный ток через всю цепь

$$I_3 = \frac{U}{R + \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}} = 3 \text{ А}.$$

Следовательно,

$$R + \frac{R_1\,R_2}{R_1+R_2} = \frac{U}{I_3} = \frac{12}{3} = 4 \text{ Ом}.$$

Из первых двух опытов находим

$$R_1 = 5 - R, \quad R_2 = 6 - R.$$

Тогда

$$\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{(5-R)\,(6-R)}{(5-R)+(6-R)} = \frac{30 - 11R + R^2}{11 - 2R}.$$

Подставим это в равенство

$$R + \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = 4.$$

Получим уравнение

$$R + \frac{30-11R+R^2}{11-2R} = 4.$$

Умножая обе части на $(11-2R)$ и приводя подобные члены, приходим к квадратному уравнению

$$R^2 - 8R + 14 = 0.$$

Дискриминант равен $\Delta = 64 - 56 = 8$, откуда

$$R = \frac{8 \pm \sqrt{8}}{2} = 4 \pm \sqrt{2}.$$

Сопротивление амперметров должно быть положительным, поэтому R не может превышать 5 (иначе R_1 оказался бы отрицательным). Анализ показывает, что физически возможен лишь меньший корень

$$R = 4 - \sqrt{2} \text{ Ом}.$$

Именно при этом значении $R_1 = 5 - R$ и $R_2 = 6 - R$ оказываются положительными. Таким образом,

$$R = 4 - \sqrt{2} \approx 2,59 \text{ Ом}.$$

Ответ:

$$R = 2,59 \text{ Ом}$$

Критерии

1. Найдено общее сопротивление цепи в первом эксперименте (+ 2 балла).
2. Найдено общее сопротивление цепи во стором эксперименте (+ 2 балла).
3. Найдено общее сопротивление цепи в третьем эксперименте (+ 2 балла).
4. Записано квадратное уравнение на сопротивление резистора (+ 2 балла).
5. Верно решено уравнение на сопротивление резистора (+ 2 балла).

Задача 5. Экспериментатор Глюк проводил опыт с теплоизолированным цилиндрическим сосудом, в котором он зафиксировал на дне кусок льда при температуре $t_0 = 0°C$. Затем он налил в сосуд воду так, что лёд оказался полностью под водой. Масса налитой воды в точности равна массе льда. Когда в сосуде установилось тепловое равновесие, Глюк заметил, что уровень воды опустился на $\alpha = 2{,}0\%$ относительно первоначального. Определите начальную температуру t_x налитой в сосуд воды. Плотность воды $\rho_0 = 1{,}0$ г/см^3, плотность льда $\rho = 0{,}9$ г/см^3, удельная теплоёмкость воды $c_в = 4{,}2\ \frac{кДж}{кг \cdot °C}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. Изменением объёма воды из-за теплового расширения, испарением воды пренебречь. Считайте, что теплоемкость сосуда пренебрежимо мала по сравнению с теплоемкостью воды и льда в сосуде. В ходе эксперимента лёд остаётся неподвижным на дне сосуда.

Возможное решение

Сначала проверим, полностью ли растаял лёд. Предположим, что он растаял полностью. Объём содержимого сосуда складывается из объёма льда

$$V_1 = \frac{m}{\rho}$$

и объёма налитой воды

$$V_2 = \frac{m}{\rho_0}.$$

Обозначим H как начальный уровень воды в сосуде сразу после заполнения. Очевидно, что

$$S \cdot H = V_1 + V_2.$$

Отсюда выражаем:

$$H = \frac{m}{S}\frac{\rho_0 + \rho}{\rho_0 \cdot \rho}.$$

Уменьшение объёма воды после полного таяния льда составит

$$\Delta V = V_1 - V_2 = m\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 \cdot \rho},$$

что приведёт к снижению уровня воды:

$$\Delta H_0 = \frac{V_1 - V_2}{S} = m\frac{\rho_0 - \rho}{S \cdot \rho_0 \cdot \rho}.$$

Относительное уменьшение уровня воды:

$$\alpha_0 = \frac{\Delta H_0}{H} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 + \rho} \approx 5\%.$$

Следовательно, лёд не растаял полностью, и установившаяся температура воды будет $t_0 = 0°C$. Обозначим массу растаявшего льда как Δm. Тогда объём оставшегося льда:

$$V_1' = \frac{m - \Delta m}{\rho}.$$

Суммарный объём воды теперь:

$$V_2' = \frac{m + \Delta m}{\rho_0}.$$

Фактическое изменение объёма:

$$\Delta V' = (V_1 + V_2) - (V_1' + V_2') = \frac{\Delta m}{\rho} - \frac{\Delta m}{\rho_0}.$$

Выразим ΔH:

$$\Delta H = \frac{\Delta m}{S}\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 \cdot \rho}.$$

Отсюда:

$$\alpha = \frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta m}{m}\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 + \rho}.$$

Следовательно, относительное уменьшение массы льда:

$$\frac{\Delta m}{m} = \alpha\frac{\rho_0 + \rho}{\rho_0 - \rho}.$$

Составляем уравнение теплового баланса:

$$c_{\text{в}} m(t_x - t_0) = \lambda \Delta m.$$

Выразим начальную температуру воды:

$$t_x = t_0 + \frac{\lambda}{c_{\text{в}}} \frac{\Delta m}{m} = t_0 + \frac{\lambda}{c_{\text{в}}} \alpha \frac{\rho_0 + \rho}{\rho_0 - \rho}.$$

Подставляя числовые значения:

$$t_x = 0 + \frac{330 \cdot 10^3}{4.2 \cdot 10^3} \cdot 0.02 \cdot \frac{1.9}{0.1} = 30^\circ C.$$

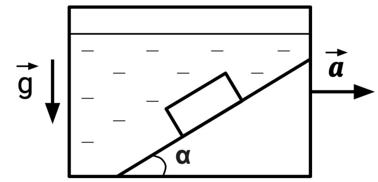
Ответ:

$$t_x = 30^\circ C$$

Критерии

1. Верно определена установившаяся температура воды в сосуде и показано, что лед растаял не полностью (+ 4 балла).
2. Верно получена связь изменения уровня воды в сосуде с изменением массы воды в сосуде (+ 2 балла).
3. Записано верное уравнение теплового баланса (+ 2 балла).
4. Получен верный формульный и числовой ответ (+ 2 балла).

Задача 1. В аквариуме с водой закреплена гладкая наклонная плоскость, наклонённая к горизонту под углом $\alpha = 30°$. На ней находится полностью погружённый брусок массой m и плотностью $\rho' = 1200$ кг/м³. Аквариум разгоняется горизонтально с ускорением a. Коэффициент трения между бруском и плоскостью $\mu = 0,3$. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³. Найдите минимальное ускорение a, при котором брусок не скользит вниз.



Возможное решение

Существует горизонтальная составляющая силы Архимеда, так как в ускоряющемся сосуде поверхность жидкости наклоняется, изменяя направление результирующей выталкивающей силы.

Обозначим:
$\vec{F_{A,x}} = \rho V \vec{a}$ — горизонтальная составляющая силы Архимеда;
$\vec{F_{A,y}} = -\rho V \vec{g}$ — вертикальная составляющая силы Архимеда.
В соответствии со вторым законом Ньютона:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}.$$

Спроецируем данное соотношение на оси, направленные вдоль наклонной плоскости и перпендикулярно ей:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_{A,y}\sin\alpha - F_{тр} + F_{A,x}\cos\alpha = -ma\cos\alpha, \\ N - mg\cos\alpha + F_{A,y}\cos\alpha - F_{A,x}\sin\alpha = -ma\sin\alpha. \end{cases}$$

Выразим силу реакции опоры:

$$N = V\left[(\rho' - \rho)g\cos\alpha - (\rho' - \rho)a\sin\alpha\right].$$

Выразим силу трения:

$$F_{тр} = V\left[(\rho' - \rho)g\sin\alpha + (\rho' - \rho)a\cos\alpha\right].$$

Скольжение начинается в момент, когда сила трения покоя переходит в силу трения скольжения. Запишем неравенство для силы трения покоя:

$$F_{тр} \le \mu N \quad \to \quad V\left[(\rho' - \rho)g\sin\alpha + (\rho' - \rho)a\cos\alpha\right] \le \mu V\left[(\rho' - \rho)g\cos\alpha - (\rho' - \rho)a\sin\alpha\right].$$

Получаем неравенство для a:

$$a \le \frac{g(-\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Подстановка численных данных дает нам отрицательное значение ускорения, что означает, что для реализации описанной в условии ситуации необходимо ускорять сосуд в противоположном направлении с ускорением:

$$a \ge \frac{9,8(\sin 30° - 0,3\cos 30°)}{\cos 30° + 0,3\sin 30°}.$$

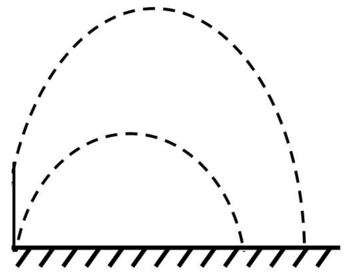
Ответ:

$$a_{\min} \approx 2,3 \text{ м/с}^2$$

Критерии

1. Отмечено существование горизонтальной составляющей силы Архимеда, действующей на брусок (+ 2 балла).
2. Верно записано уравнение движения бруска в проекции на выбранные оси (+ 4 балла).
3. Получено верное выражение и численное значение для граничного ускорения акуариума (+ 4 балла).

Задача 2. Садовая поливалка разбрызгивает капли на 360° в разные стороны. Найдите, во сколько раз вырастет площадь полива, когда поливалку поднимают с уровня земли на высоту $H = 50$ см. Все капли вылетают из поливалки с постоянной скоростью $v = 5$ м/с, сопротивлением воздуха пренебречь.

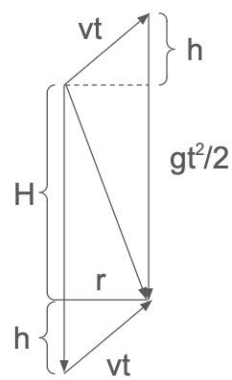


Возможное решение

Рассмотрим вектор перемещения капли $\vec{l}$. Зависимость перемещения капли от времени дается выражением:

$$\vec{l} = \vec{v}t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$$

Рассмотрим горизонтальную составляющую перемещения капли к моменту ее падения на землю. Площадь полива зависит



от неё квадратично. Из векторной диаграммы получим $\frac{gt^2}{2} = H + h$, тогда:

$$r^2 = (vt)^2 - h^2 = v^2\frac{2(H+h)}{g} - h^2 = -h^2 + \frac{2v^2}{g}h + \frac{2v^2H}{g}$$

Данное уравнение представляет собой параболу ветвями вниз с вершиной в точке $(\frac{v^2}{g}, \frac{2v^2H}{g} + \frac{v^4}{g^2})$, где

$$r_{max}^2 = \frac{2v^2H}{g} + \frac{v^4}{g^2}$$

Поскольку начальному случаю $H = 0$ отвечает $r_0 = \frac{v^2}{g}$, найдем искомое отношение:

$$\frac{r_{max}^2}{r_0^2} = 1 + \frac{2gH}{v^2} = 1,4$$

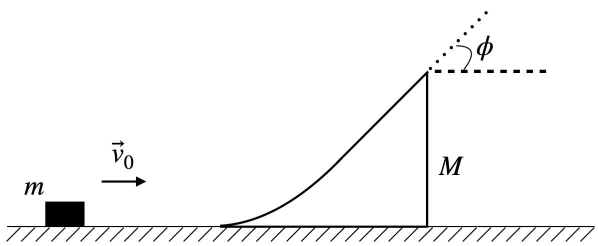
Ответ:

$$S_2/S_1 = 1,4$$

Критерии

1. Рассмотрена векторная диаграмма перемещения капли (+ 2 балла).
2. Получено верное уравнение для горизонтального смещения капли (+ 2 балла).
3. Найдена максимальное значение горизонтального смещения капли (+ 2 балла).
4. Получен верный формульный и числовой ответ (+ 4 балла).

Задача 3. На гладком горизонтальном столе шайба массы m движется со скоростью v_0. На её пути расположен клин массы $M = 11m$, который также может двигаться по столу без трения. Наклонная поверхность клина имеет начальный покатый участок, плавно переходящий в участок с постоянным наклоном к горизонтальной поверхности $\phi = 60°$. Наклонная часть поверхности клина имеет шероховатости. После прохождения наклонного участка шайба вылетает с верхнего края клина. Найдите, какая доля начальной кинетической энергии шайбы переходит в тепловую энергию в результате трения, если скорость шайбы в момент вылета с клина в системе отсчета движущегося клина в два раза меньше начальной скорости шайбы в системе отсчета стола. Высота клина такова, что если сбросить с такой высоты шайбу, скорость ее в момент удара о поверхность окажется равной $0{,}4 \cdot v_0$. Ответ представьте в виде дроби.



Возможное решение

Пусть в системе клина скорость шайбы убывает до

$$\alpha v_0, \quad \alpha = \tfrac{1}{2}, \quad \phi = 60°.$$

Тогда горизонтальная компонента её скорости в системе клина $\alpha v_0 \cos\phi$, а в лабораторной системе (где клин движется со скоростью V) она равна

$$u_x = \alpha v_0 \cos\phi + V.$$

Начальный импульс системы по горизонтали:

$$p_{\text{нач}} = m v_0.$$

В момент вылета шайбы суммарный горизонтальный импульс равен

$$m v_0 = m\big(\alpha v_0 \cos\phi + V\big) + (11\, m) V.$$

Отсюда

$$m v_0 = m \alpha v_0 \cos\phi + 12\, m V \quad \Longrightarrow \quad 12\, m V = m v_0 \left[1 - \alpha\cos\phi\right].$$

Значит,

$$V = \frac{v_0\left(1 - \alpha\cos\phi\right)}{12}.$$

Подставляя $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\phi = 60°$:

$$1 - \alpha\cos 60° = 1 - \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2} = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}, \quad V = \frac{v_0 \times \frac{3}{4}}{12} = \frac{v_0}{16}.$$

К моменту вылета её полная скорость в *системе клина* есть $\alpha v_0 = \frac{1}{2} v_0$ под углом $\phi = 60°$. Тогда

$$\big(v_x,\, v_y\big)_{(\text{клин})} = \big(\alpha v_0 \cos\phi,\ \alpha v_0 \sin\phi\big) = \left(\tfrac{1}{2}v_0 \times \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}v_0 \times \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{4}\, v_0,\ \tfrac{\sqrt{3}}{4}\, v_0\right).$$

При переходе в лабораторную систему к горизонтальной компоненте прибавляется $V = \frac{v_0}{16}$. Значит

$$u_x = \tfrac{1}{4} v_0 + \tfrac{v_0}{16} = \frac{4}{16} v_0 + \frac{1}{16} v_0 = \frac{5}{16} v_0, \qquad u_y = \tfrac{\sqrt{3}}{4} v_0.$$

Тогда

$$u_x^2 + u_y^2 = \left(\tfrac{5}{16}\, v_0\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{4}\, v_0\right)^2 = \frac{25}{256}\, v_0^2 + \frac{3}{16}\, v_0^2.$$

Следовательно, модуль скорости шайбы: $\left|\mathbf{u}_{\text{шайбы}}\right| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = v_0\sqrt{\frac{73}{256}}$, а её кинетическая энергия (в лабораторной С.О.) в момент вылета:

$$K_{\text{шайбы}} \;=\; \tfrac{1}{2}\, m \left|\mathbf{u}_{\text{шайбы}}\right|^2 \;=\; \tfrac{1}{2}\, m\, \frac{73}{256}\, v_0^2 \;=\; \frac{73}{512}\, m\, v_0^2.$$

Масса клина $M = 11\, m$. Скорость $V = \frac{v_0}{16}$. Тогда

$$K_{\text{клин}} \;=\; \tfrac{1}{2}\,(11\, m)\left(\tfrac{v_0}{16}\right)^2 \;=\; \frac{11}{2}\, m\, \frac{v_0^2}{256} \;=\; \frac{11}{512}\, m\, v_0^2.$$

По условию, если бросить шайбу с высоты h, то она наберёт скорость $0{,}4\, v_0$. Из

$$v^2 = 2\, g\, h \quad\Longrightarrow\quad (0{,}4\, v_0)^2 = 2\, g\, h \quad\Longrightarrow\quad 0{,}16\, v_0^2 = 2\, g\, h \quad\Longrightarrow\quad h = \frac{0{,}08\, v_0^2}{g}.$$

Тогда потенциальная энергия шайбы:

$$m\, g\, h \;=\; m\, g\, \frac{0{,}08\, v_0^2}{g} \;=\; 0{,}08\, m\, v_0^2 \;=\; \frac{2}{25}\, m\, v_0^2.$$

Начальная кинетическая энергия шайбы:

$$E_{\text{нач}} \;=\; \tfrac{1}{2}\, m\, v_0^2.$$

К моменту вылета имеем суммы:

$$K_{\text{шайбы}} \;=\; \frac{73}{512}\, m\, v_0^2, \quad K_{\text{клина}} \;=\; \frac{11}{512}\, m\, v_0^2, \quad m\, g\, h \;=\; \frac{2}{25}\, m\, v_0^2.$$

Обозначим теплопотери через Q. Тогда:

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v_0^2 \;=\; \left[\, \frac{73}{512}\, m\, v_0^2 \;+\; \frac{11}{512}\, m\, v_0^2 \;+\; \frac{2}{25}\, m\, v_0^2 \right] \;+\; Q.$$

$$Q \;=\; \left(\frac{1600}{3200} - \frac{781}{3200}\right) m\, v_0^2 \;=\; \frac{819}{3200}\, m\, v_0^2.$$

Доля тепловых потерь от начальной кинетической энергии:

$$N \;=\; \frac{Q}{\frac{1}{2}\, m\, v_0^2} \;=\; \frac{\frac{819}{3200}\, m\, v_0^2}{\frac{1}{2}\, m\, v_0^2} \;=\; \frac{819}{1600}.$$

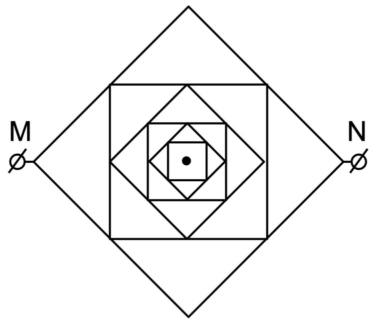
Ответ:

$$N = \frac{819}{1600}$$

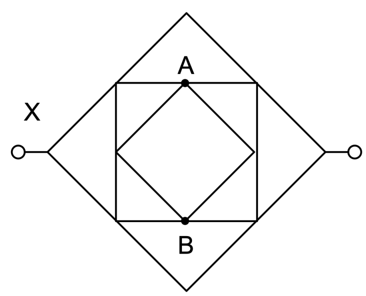
Критерии

1. Найдено значение проекции скорости шайбы на горизонтальную ось в системе отсчета стола в момент вылета шайбы с клина (+ 1 балл).
2. Верно записан закон сохранения импульса вдоль горизонтальной оси для начального момента и момента вылета шайбы с клина (+ 2 балла).
3. Верно записан закон сохранения энергии с учетом тепловых потерь (+ 2 балла).
4. Найдена высота клина (+ 1 балл).
5. Верно найдена доля тепловых потерь из законов сохранения (+ 4 балла).

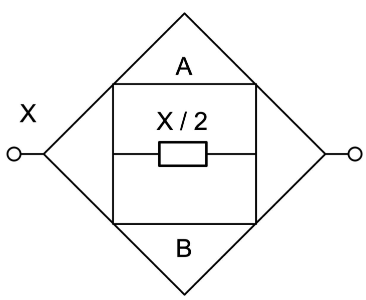
Задача 4. Проволочная конструкция состоит из бесконечно большого количества вложенных квадратов (см. рисунок). Конструкцию подключают к внешнему напряжению в точках M и N. Сторона наибольшего квадрата равна $a = 10$ см , сопротивление единицы длины проволоки $\rho = 0,2$ Ом/см. Найдите общее сопротивление всей конструкции.

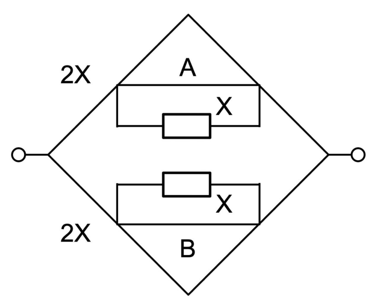


Возможное решение

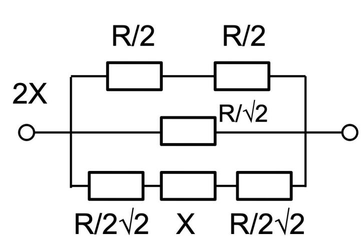


Обозначим общее сопротивление цепи за X. Заметим, что точки A и B имеют равный потенциал. Тогда в этих точках внутренний ромб можно отделить от внешнего квадрата. Этот ромб аналогичен исходному, но каждая его сторона имеет сопротивление в два раза меньше. Следовательно, его общее сопротивление равно $\frac{X}{2}$.





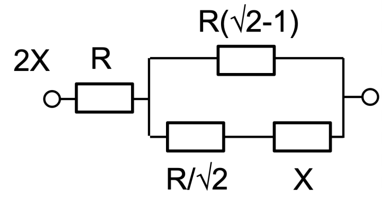
Заметим, что этот резистор можно представить как параллельное соединение двух резисторов по X каждый, поделив как внутренний, так и внешний ромб на две одинаковые части. Приходим к эквивалентной схеме для верхней половины, обозначая $R = \rho a$.



Найдем общее сопротивление среднего и верхнего провода:

$$R_1 = \frac{R \cdot \frac{R}{\sqrt{2}}}{R + \frac{R}{\sqrt{2}}}.$$

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} R = (\sqrt{2}-1)R$$



Тогда получим упрощённую схему исходной цепи:
Приравняем общее сопротивление цепи к $2X$:

$$2X = R + \frac{(\sqrt{2}-1)R\left(\frac{R}{\sqrt{2}}+X\right)}{(\sqrt{2}-1)R+\frac{R}{\sqrt{2}}+X}.$$

Преобразуем уравнение:

$$(2X-R)\left(\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}-1\right)R+X\right) = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}+X\right)(\sqrt{2}-1)R.$$

В результате получаем квадратное уравнение:

$$X^2 + (\sqrt{2}-1)XR - \frac{\sqrt{2}}{2}R^2 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение:

$$X = -\frac{(\sqrt{2}-1)R}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}R\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}R^2}.$$

Упрощая выражение и отбрасывая отрицательный корень:

$$X = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}\rho a \approx 1{,}3 \text{ Ом}.$$

Ответ:

$$X = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}\rho a \approx 1{,}3 \text{ Ом}$$

Критерии

1. Отмечено равенство потенциалов в точках A и B (+ 1 балл).
2. Верно получена эквивалентная схема после разделения внутреннего ромба (+ 3 балла).
3. Получено верное квадратное уравнение для неизвестного сопротивления цепи (+ 2 балла).
4. Получен верный формульный и числовой ответ (+ 4 балла).

Задача 5. В ёмкость с расплавом алюминия при температуре $T_1 = 670°C$ погрузили слиток алюминия при температуре $T_2 = 500°C$. После установления теплового равновесия слиток извлекли из расплава и обнаружили, что его масса увеличилась на 5%. На сколько процентов уменьшилась масса алюминия в расплаве? Считать, что удельная теплоёмкость алюминия одинакова для расплава и слитка и равна $C_a = 920\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot°C}$, удельная теплота плавления $\lambda = 390\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$, а температура плавления $T_{\text{пл}} = 660°C$. Теплообменом с окружающей средой пренебречь. Ответ округлите до сотых долей процента.

Возможное решение

Конечное состояние системы однозначно определяется равенством температуры расплава и слитка температуре плавления алюминия, то есть $T_{\text{кон}} = T_{\text{пл}} = 660°C$. Действительно, если часть алюминия остаётся в жидкой фазе, а часть — в твёрдой, то система не может иметь температуру выше или ниже $660°C$, поскольку дополнительное тепло либо расходуется на плавление твёрдой фазы, либо выделяется при кристаллизации расплава.

Пусть:

$$M_{\text{р}} \quad \text{— начальная масса расплава,}$$

$$M_{\text{с}} \quad \text{— начальная масса слитка,}$$

$$m \quad \text{— масса алюминия, перешедшая из жидкой фазы (расплава) в твёрдую фазу (слиток).}$$

По условию масса слитка в конце эксперимента увеличилась на 5%, то есть

$$\frac{M_{\text{с}} + m}{M_{\text{с}}} = 1{,}05 \quad \Longrightarrow \quad \frac{m}{M_{\text{с}}} = 0{,}05.$$

Запишем условие установления теплового баланса. Тепло, которое отдаёт остывающий расплав (от $670°C$ до $660°C$), равно

$$Q_1 = C_a\,M_{\text{р}}\,\big(T_1 - T_{\text{пл}}\big) = 920\,M_{\text{р}}\,(670 - 660) = 9200\,M_{\text{р}}.$$

Дополнительно при кристаллизации массы m выделяется теплота

$$Q_2 = \lambda\,m = 390\ 000\,m.$$

Слиток нагревается от $T_2 = 500°C$ до $T_{\text{пл}} = 660°C$, получая тепло

$$Q_3 = C_a\,M_{\text{с}}\,\big(T_{\text{пл}} - T_2\big) = 920\,M_{\text{с}}\,(660 - 500) = 920 \times 160\,M_{\text{с}} = 147\ 200\,M_{\text{с}}.$$

Тогда уравнение теплового баланса:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad \Longrightarrow \quad 9200\,M_{\text{р}} \ +\ 390\ 000\,m \ =\ 147\ 200\,M_{\text{с}}.$$

Делим это уравнение на $M_{\text{с}}$ и учитываем, что $\dfrac{m}{M_{\text{с}}} = 0{,}05$:

$$9200\,\frac{M_{\text{р}}}{M_{\text{с}}} \ +\ 390\ 000 \times 0{,}05 \ =\ 147\ 200.$$

$$390\ 000 \times 0{,}05 = 19\ 500 \quad \Longrightarrow \quad 9200\,\frac{M_{\text{р}}}{M_{\text{с}}} + 19\ 500 = 147\ 200.$$

$$9200\,\frac{M_{\text{р}}}{M_{\text{с}}} = 127\ 700 \quad \Longrightarrow \quad \frac{M_{\text{р}}}{M_{\text{с}}} = \frac{127\ 700}{9200} \approx 13{,}88.$$

Нас просят найти, на сколько процентов уменьшилась масса расплава. Поначалу она была $M_{\text{р}}$, а после кристаллизации массы m стала $M_{\text{р}} - m$. Следовательно, относительно исходного значения масса уменьшилась на

$$\frac{m}{M_{\text{р}}} \times 100\%.$$

Чтобы вычислить это процентное изменение массы, используем

$$\frac{m}{M_{\text{р}}} = \frac{m}{M_{\text{с}}}\,\frac{M_{\text{с}}}{M_{\text{р}}} = 0{,}05 \ \times\ \frac{1}{(M_{\text{р}}/M_{\text{с}})} = 0{,}05 \ \times\ \frac{1}{13{,}88} \ \approx\ 0{,}05 \times 0{,}07206 = 0{,}003603.$$

В процентах это примерно 0,36%.

Ответ:

$$\frac{m}{M_{\text{р}}} = 0{,}36\%$$

Критерии

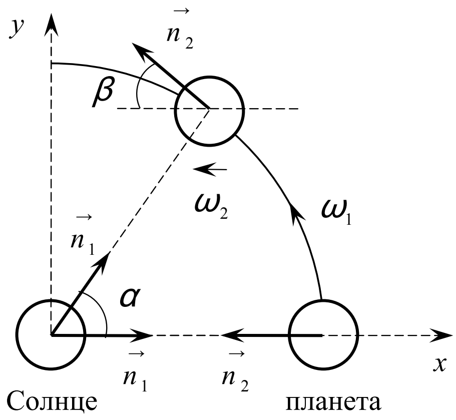
1. Сделано верное заключение о фазовом составе конечного состояния и температуре системы в конечном состоянии (+ 3 балл).
2. Верно записано уравнение теплового баланса для начального и коненчного состояний (+ 4 балла).
3. Из уравнения на тепловой баланс получено верное уравнение на соотношение масс (+ 2 балла).
4. Верно решено уравнение на соотношение масс (+ 1 балл).

Задача 1. Вокруг некоторой звезды, которую для удобства будем называть Солнцем, по круговой орбите движется планета. Период обращения равен $T_1 = 230$ земных суток. Планета также вращается вокруг собственной оси, перпендикулярной плоскости орбиты. Период осевого вращения относительно далёких звёзд равен $T_2 = 300$ земных суток; направления орбитального и осевого вращений противоположны. Найдите следующие величины:

1. Продолжительность T солнечных суток на планете (время между двумя последовательными полуднями). Числовой ответ выразите в земных сутках и округлите до целого значения.
2. Количества оборотов N_1 и N_2, которые планета совершает за время T при орбитальном и осевом вращениях. Числовые значения округлите до сотых.

Подсказка: для наблюдателя на экваторе планеты в полдень Солнце находится в зените.

Возможное решение



Поместим начало координат в центр Солнца и введём вектор $\overrightarrow{n_1}$, направленный вдоль отрезка, соединяющего центры Солнца и планеты. Введём также вектор $\overrightarrow{n_2}$, жёстко связанный с планетой и направленный от её центра к произвольной точке на экваторе. Этот вектор участвует в осевом вращении вместе с планетой и определяет положение наблюдателя на экваторе. В дальнейшем нас будут интересовать толко направления введённых векторов. Поэтому будем считать их единичными.

Предположим, что в некоторый момент для наблюдателя наступил полдень, то есть Солнце оказалось в зените. В этом случае векторы $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ направлены противоположно друг другу. Примем этот момент за начало отсчёта времени, ось x системы координат направим вдоль вектора $\overrightarrow{n_1}$, ось y — в сторону орбитального движения планеты. За время t векторы $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ повернутся относительно своих начальных положений на углы α и β:

$$\alpha = \omega_1 t\,, \qquad \beta = \omega_2 t\,,$$

ω_1 и ω_2 — угловые скорости орбитального и осевого вращений:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}\,, \qquad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}\,.$$

Координаты векторов равны:

$$\overrightarrow{n_1} = (\,\cos\alpha\,, \sin\alpha\,)\,, \qquad \overrightarrow{n_2} = (\,-\cos\beta\,, \sin\beta\,)\,.$$

Следующий полдень наступит в момент, когда векторы $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ снова окажутся направленными противоположно. Это условие удобно записать через скалярное произведение:

$$\overrightarrow{n_1}\,\overrightarrow{n_2} = -1\,.$$

Переходя к координатам, получаем:

$$-\cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta = -1\,, \qquad \cos(\,\alpha + \beta\,) = 1\,, \qquad \alpha + \beta = 2\pi n\,, \qquad \omega_1 t + \omega_2 t = 2\pi n$$

$$t\left(\frac{2\pi}{T_1}+\frac{2\pi}{T_2}\right)=2\pi n\,,\qquad t\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)=n\quad\longrightarrow\quad t=\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}\,n\,.$$

Здесь n — целое число. Продолжительность солнечных суток является наименьшим положительным значением t. Оно получается при $n=1$:

$$T=\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}=130\ \text{суток}\,.$$

Количества оборотов N_1 и N_2 определяются значениями углов поворота α и β за время T:

$$N_1=\frac{\alpha}{2\pi}=\frac{T}{T_1}=\frac{T_2}{T_1+T_2}=0{,}57\,,\qquad N_2=\frac{\beta}{2\pi}=\frac{T}{T_2}=\frac{T_1}{T_1+T_2}=0{,}43\,.$$

Как видно, сумма N_1+N_2 равна единице. Если подумать, то до этого можно догадаться. Тогда решение запишется в одну строчку.

Ответ:

1. $T=T_1T_2/(T_1+T_2)=130$ суток.
2. $N_1=T/T_1=0{,}57\,,\qquad N_2=T/T_2=0{,}43\,.$

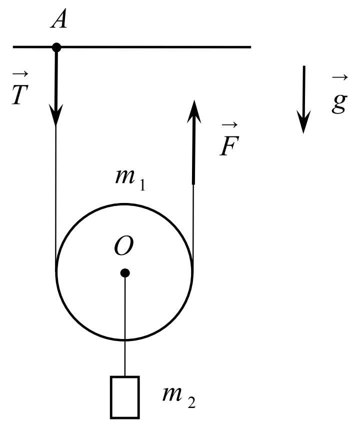
Критерии

1. Введены единичные векторы, связанные с орбитальным и осевым вращениями (+2 балла).
2. Правильно записаны координаты единичных векторов как функции времени (+1 балл).
3. Правильно сформулировано условие наступления полудня (+2 балла).
4. Правильно вычислено скалярное произведение векторов (+1 балл).
5. Получены правильные буквенный и числовой ответы для продолжительности солнечных суток (+2 балла).
6. Получены правильные буквенные и числовые ответы для количества оборотов (+2 балла).

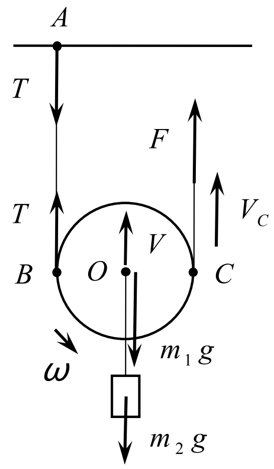
Задача 2. Блок, представляющий собой тонкий обруч с невесомыми спицами, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр O. Масса обруча $m_1 = 0{,}1$ кг равномерно распределена по его длине. К оси блока подвешен груз массой $m_2 = 0{,}3$ кг. Нижняя половина блока охватывается невесомой и нерастяжимой нитью с вертикальными концевыми участками. Левый участок закреплён на потолке в точке A, а правый поднимают вверх, действуя на него постоянной силой $F = 2{,}1$ Н. Считая, что при движении нить не скользит по блоку, найдите следующие величины:

1. Ускорение центра блока a.
2. Отношение $x = \Delta T/F$, где $\Delta T = F - T$, T — сила натяжения левого участка нити. Числовое значение x округлите до сотых.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение



1. Пусть V — мгновенная скорость оси блока и груза, ω — мгновенная угловая скорость вращения блока вокруг своей оси, r — радиус блока. Рассмотрим мгновенные скорости V_B и V_C точек блока B и C, лежащих на концах его горизонтального диаметра. В точке B блок касается левого вертикального участка нити. Так как нить нерастяжима, скорости всех точек этого участка равны скорости точки A, то есть нулю. Поскольку нить не скользит по блоку, скорость V_B также обрашается в нуль. В точке C блок касается правого вертикального участка нити, скорости всех точек которого равны V_C. Используя закон сложения скоростей, находим связь скоростей V и V_C:

$$V_B = V - \omega r = 0\,, \qquad \omega r = V\,, \qquad V_C = V + \omega r = 2V\,.$$

2. Рассмотрим полную механическую энергию E системы, состоящей из блока, нити и груза. Для того чтобы правильно записать кинетическую энергию блока, воспользуемся известным фактом, что если тонкий обруч массой M катится без проскальзывания по столу, то его кинетическая энергия равна MV^2, где V — скорость центра обруча. В нашем случае роль стола играет левый вертикальный участок нити AB. Блок как бы катится вверх по этому неподвижному участку. Отсутствие проскальзывания соответствует обращению в нуль скорости V_B. Таким образом, в нашей задаче кинетическая энергия обруча равна $m_1 V^2$. Получаем:

$$E = m_1 V^2 + \frac{m_2 V^2}{2} + m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) V^2 + m_1 g h_1 + m_2 g h_2 ,$$

h_1 и h_2 высоты оси обруча и центра масс груза над полом.

3. Рассмотрим баланс энергии системы за малое время Δt:

$$\Delta E = F V_C \Delta t .$$

Здесь в левой части стоит приращение энергии ΔE, в правой части — работа силы F на перемещении $V_C \Delta t$ (это перемещение точки приложения силы F). В связи с этим равенством следует отметить два обстоятельства. Во-первых, сила, действующая на нить со стороны потолка в точке A, не совершает работу, поскольку скорость точки A равна нулю. Во-вторых, так как нить не скользит по блоку, силы трения, действующие между блоком и нижним участком нити, являются силами трения покоя. Суммарная работа этих сил равна нулю (другими словами, при взаимодействии нити с блоком не выделяется тепло).

Запишем приращение энергии ΔE:

$$\Delta E = \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) \Delta (V^2) + m_1 g \Delta h_1 + m_2 g \Delta h_2 .$$

Обозначим через ΔV приращение скорости оси блока за время Δt. Тогда для приращения квадрата скорости имеем:

$$\Delta (V^2) = (V + \Delta V)^2 - V^2 = 2 V \Delta V + (\Delta V)^2 = 2 V \Delta V \left(1 + \frac{\Delta V}{2 V} \right) .$$

При уменьшении Δt отношение $\Delta V / V$ становится сколь угодно малым и может быть отброшено. Тогда

$$\Delta (V^2) = 2 V \Delta V .$$

Приращения высот Δh_1 и Δh_2 равны:

$$\Delta h_1 = \Delta h_2 = V \Delta t .$$

Собирая всё вместе, получаем:

$$\Delta E = \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) \cdot 2 V \Delta V + (m_1 + m_2) g V \Delta t .$$

Введём ускорение оси блока a:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} .$$

Тогда $\Delta V = a \Delta t$ и выражение для ΔE принимает вид:

$$\Delta E = (2 m_1 + m_2) V a \Delta t + (m_1 + m_2) g V \Delta t .$$

Подставляя этот результат в уравнение баланса энергии и полагая $V_C = 2 V$, находим ускорение a:

$$(2 m_1 + m_2) V a \Delta t + (m_1 + m_2) g V \Delta t = F \cdot 2 V \Delta t \quad \longrightarrow \quad a = \frac{2 F - (m_1 + m_2) g}{2 m_1 + m_2} = 0{,}4 \text{ м/с}^2 .$$

4. Для того чтобы найти силу натяжения T, запишем второй закон Ньютона для системы, состоящей из блока, груза и нижнего участка нити. Внешними силами, действующими на эту систему, являются силы тяжести $m_1 g$ и $m_2 g$, а также направленные вверх силы натяжения, действующие со стороны вертикальных участков нити. Так как нить невесома, эти силы равны T и F. Получаем:

$$(m_1 + m_2) a = T + F - (m_1 + m_2) g .$$

Используя полученное выше выражение для ускорения a, после некоторых алгебраических преобразований находим силу натяжения T, разность $\Delta T = F - T$ и отношение $\Delta T/F$:

$$T = \frac{m_2 F + (m_1 + m_2) m_1 g}{2 m_1 + m_2}, \qquad \Delta T = F - T = m_1 a, \qquad x = \frac{\Delta T}{F} = \frac{m_1 a}{F} = 0{,}02.$$

Ответ:

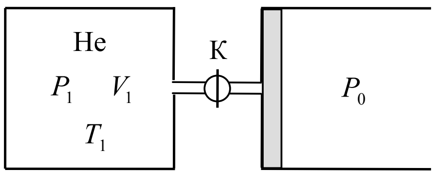
$$a = \frac{2F - (m_1 + m_2) g}{2 m_1 + m_2} = 0{,}4 \text{ м/с}^2, \qquad x = \frac{m_1 a}{F} = 0{,}02.$$

Критерии

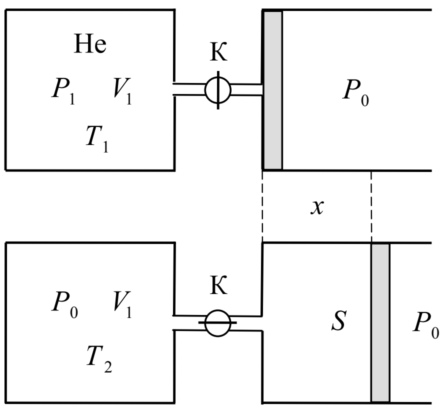
1. Правильно найдена связь скоростей блока и правого вертикального участка нити (+1 балл).
2. Правильно записана кинетическая энергия блока (+2 балла).
3. Правильно записано уравнение баланса энергии системы (+2 балла).
4. Получены правильные буквенный и числовой ответы для ускорения блока (+2 балла).
5. Правильно указаны силы, действующие на блок и нижний участок нити (+1 балл).
6. Правильно записано уравнение второго закона Ньютона для блока (+1 балл).
7. Получены правильные буквенный и числовой ответы для силы натяжения нити (+1 балл).

Задача 3. Сосуд постоянного объёма V_1 соединён короткой трубкой с краном К с длинным горизонтальным цилиндром, в котором может свободно двигаться поршень. Правый торец цилиндра открыт в атмосферу, давление которой P_0 постоянно. В начальном состоянии кран закрыт, поршень прижат силой атмосферного давления к левому торцу цилиндра, в сосуде находится гелий при температуре $T_1 = 300$ К и давлении $P_1 = k\,P_0$, где $k = 4$. Кран открывают, гелий перетекает в цилиндр, и вся система переходит в новое состояние равновесия. Считая, что все стенки, поршень и трубка с краном не проводят тепло, найдите следующие величины:

1. Конечную температуру гелия T_2.
2. Отношение $\Delta V/V_1$, где ΔV — приращение объёма гелия (конечный объём гелия в цилиндре). Объём трубки с краном не учитывайте.



Возможное решение



1. Пусть ν — число молей газа, S и x — площадь и перемещение поршня. Согласно первому началу термодинамики имеем:

$$0 = \nu\,C_V\,(\,T_2 - T_1\,) + A\,,$$

C_V — молярная теплоёмкость при постоянном объёме, A — работа газа. Запишем уравнение баланса энергии для поршня:

$$0 = A - P_0\,S\,x\,.$$

Нуль в левой части — приращение механической энергии поршня (энергия не изменилась). Второе слагаемое в правой части представляет собой работу постоянной силы атмосферного давления $P_0\,S$ на перемещении x. Эта работа отрицательна, так как направление действия силы давления противоположно направлению перемещения. Получаем:

$$A = P_0\,S\,x\,.$$

Выразим работу A через начальную и конечную температуры газа. Для этого воспользуемся уравнением состояния:

$$P_1\,V_1 = \nu\,R\,T_1\,,$$

$$P_0\,(\,V_1 + S\,x\,) = \nu\,R\,T_2 \quad \longrightarrow \quad P_0\,V_1 + A = \nu\,R\,T_2\,.$$

Полагая в первом уравнении $P_1 = k\,P_0$, получаем:

$$P_0\,V_1 = \frac{\nu\,R\,T_1}{k}\,, \qquad A = \nu\,R\,T_2 - \frac{\nu\,R\,T_1}{k}\,.$$

Подставляя этот результат в уравнение первого начала термодинамики, находим конечную температуру газа:

$$0 = \nu\, C_V\, T_2 - \nu\, C_V\, T_1 + \nu\, R\, T_2 - \frac{\nu\, R\, T_1}{k} \quad \longrightarrow \quad T_2 = T_1\, \frac{k\, C_V + R}{k\, C_P}\,,$$

$C_P = C_V + R$ — молярная теплоёмкость при постоянном давлении.

2. Для того чтобы найти приращение объёма газа, воспользуемся найденными выше выражениями для работы A:

$$\Delta\, V = S\, x = \frac{A}{P_0} = \frac{\nu\, R}{P_0} \left(T_2 - \frac{T_1}{k} \right).$$

Отношение $\Delta\, V/V_1$ равно:

$$\frac{\Delta\, V}{V_1} = \frac{\nu\, R}{P_0\, V_1} \left(T_2 - \frac{T_1}{k} \right) = \frac{k}{T_1} \left(T_2 - \frac{T_1}{k} \right) = \frac{k\, T_2}{T_1} - 1\,.$$

Используя выражение для T_2, этот результат можно привести к следующему виду:

$$\frac{\Delta\, V}{V_1} = \frac{k-1}{\gamma}\,,$$

$\gamma = C_P/C_V$ — показатель адиабаты.

Упростим полученные формулы для одноатомного газа. В этом случае $C_V = 3\, R/2$, $C_P = 5\, R/2$, $\gamma = 5/3$,

$$T_2 = T_1\, \frac{3\, k + 2}{5\, k} = 210\ \text{K}\,, \qquad \frac{\Delta\, V}{V_1} = \frac{3\, (\, k - 1\,)}{5} = 1{,}8\,.$$

Следует отметить, что в данной задаче нельзя пользоваться уравнением адиабаты, поскольку рассматриваемый процесс является необратимым. Вычислим конечную температуру газа T_2, следуя этому уравнению:

$$P\, V^{\,\gamma} = \text{const}\,, \qquad \frac{T^{\,\gamma}}{P^{\,\gamma - 1}} = \text{const}\,, \qquad \frac{T}{P^{\,\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \text{const}\,,$$

$$\frac{T_2}{P_0^{\,\frac{\gamma-1}{\gamma}}} = \frac{T_1}{P_1^{\,\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad \longrightarrow \quad T_2 = T_1 \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_1}{k^{\,\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\,.$$

Для одноатомного газа получаем:

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} = \frac{2}{5}\,, \qquad T_2 = \frac{300}{4^{\,2/5}} = 172\ \text{K}\,.$$

Это значение заметно отличается от правильного значения 210 K.

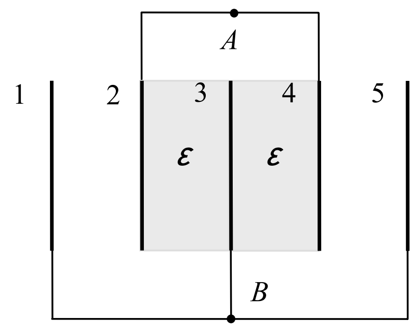
Ответ:

$$T_2 = T_1\, \frac{3\, k + 2}{5\, k} = 210\ \text{K}\,, \qquad \frac{\Delta\, V}{V_1} = \frac{3\, (\, k - 1\,)}{5} = 1{,}8\,.$$

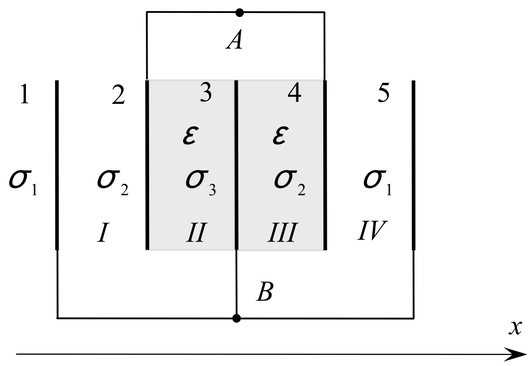
Критерии

1. Правильно записано уравнение первого начала термодинамики для газа (+2 балла).
2. Правильно записано уравнение баланса энергии для поршня (+1 балл).
3. Получена правильная связь работы газа с перемещением поршня (+1 балл).
4. Правильно записано уравнение состояния газа для начального и конечного положений поршня (+1 балл).
5. Получена правильная связь работы газа с начальной и конечной температурами (+2 балла).
6. Получены правильные буквенный и числовой ответы для конечной температуры газа (+1 балл).
7. Получены правильные буквенный и числовой ответы для относительного приращения объёма газа (+2 балла).

Задача 4. Конденсатор состоит из пяти одинаковых тонких металлических пластин, расположенных параллельно друг другу на равных расстояниях. Пластины 2 и 4 соединены тонким проводом и образуют одну из обкладок конденсатора. Другая обкладка — пластины 1, 3 и 5, также соединённые проводом. Всё пространство между пластинами 2, 3 и 4 заполнено твёрдым однородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 4$. Конденсатор подключён к батарее за точки A и B. Найдите отношения q_1 / q_2 и q_3 / q_2, где q_1, q_2 и q_3 — заряды пластин 1, 2 и 3. Краевые эффекты не учитывайте.



Возможное решение



Пусть положительный полюс батареи подключён к точке A, а отрицательный к точке B. Обозначим через q суммарный заряд пластин 2 и 4. Тогда суммарный заряд пластин 1, 3 и 5 равен $-q$. В силу зеркальной симметрии конденсатора относительно пластины 3 заряды пластин 2 и 4 совпадают. Заряды пластин 1 и 5 также одинаковы. Имеем равенства:

$$q_2 = q_4 = \frac{q}{2}, \qquad 2\,q_1 + q_3 = -q\,.$$

Вводя поверхностные плотности заряда на пластинах, получаем:

$$\sigma_2 = \sigma_4 = \frac{\sigma}{2}, \qquad 2\,\sigma_1 + \sigma_3 = -\sigma\,, \qquad \sigma = \frac{q}{S}\,,$$

S — площадь пластин. Обозначим римскими цифрами I — IV области между пластинами. Направим ось x от пластины 1 к пластине 5 и рассмотрим проекцию вектора напряжённости электрического поля на эту ось в четырёх областях:

$$E_I = \frac{1}{2\,\varepsilon_0}\,(\,\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1\,) = -\frac{1}{2\,\varepsilon_0}\,(\,2\,\sigma_2 + \sigma_3\,) = -\frac{1}{2\,\varepsilon_0}\,(\,\sigma + \sigma_3\,)\,,$$

$$E_{II} = \frac{1}{2\,\varepsilon_0\,\varepsilon}\,(\,\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1\,) = -\frac{\sigma_3}{2\,\varepsilon_0\,\varepsilon}\,,$$

$$E_{III} = \frac{1}{2\,\varepsilon_0\,\varepsilon}\,(\,\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1\,) = \frac{\sigma_3}{2\,\varepsilon_0\,\varepsilon}\,,$$

$$E_{IV} = \frac{1}{2\,\varepsilon_0}\,(\,\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_2 - \sigma_1\,) = \frac{1}{2\,\varepsilon_0}\,(\,\sigma + \sigma_3\,)\,,$$

ε_0 — электрическая постоянная.

Пластины 2 и 4 образуют положительную обкладку конденсатора. Поэтому разность потенциалов между ними должна равняться нулю. Это условие автоматически выполняется в силу равенства $E_{II} = -E_{III}$:

$$\varphi_2 - \varphi_4 = E_{II}\, d + E_{III}\, d = 0\,,$$

d — расстояние между пластинами. Рассмотрим разность потенциалов между пластинами 1 и 3. Она также должна равняться нулю, так как эти пластины являются частями отрицательной обкладки. Имеем:

$$\varphi_1 - \varphi_3 = E_I\, d + E_{II}\, d = 0 \quad\longrightarrow\quad E_I + E_{II} = 0\,, \qquad -\sigma - \sigma_3 - \frac{\sigma_3}{\varepsilon} = 0\,, \qquad \sigma_3 = -\frac{\sigma\,\varepsilon}{\varepsilon + 1}\,.$$

Для плотности σ_1 получаем:

$$2\,\sigma_1 + \sigma_3 = -\sigma \quad\longrightarrow\quad \sigma_1 = -\frac{\sigma + \sigma_3}{2} = -\frac{\sigma}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}\right) = -\frac{\sigma}{2\,(\,\varepsilon + 1\,)}\,.$$

Отношения зарядов пластин равны:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = -\frac{1}{\varepsilon + 1} = -0{,}2\,, \qquad \frac{q_3}{q_2} = \frac{\sigma_3}{\sigma_2} = -\frac{2\,\varepsilon}{\varepsilon + 1} = -1{,}6\,.$$

Ответ:

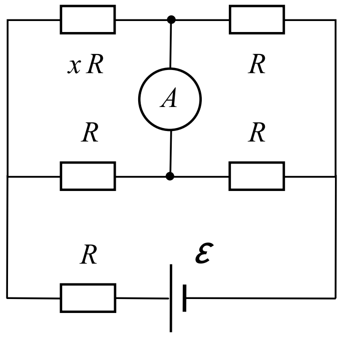
$$\frac{q_1}{q_2} = -\frac{1}{\varepsilon + 1} = -0{,}2\,, \qquad \frac{q_3}{q_2} = -\frac{2\,\varepsilon}{\varepsilon + 1} = -1{,}6\,.$$

Критерии

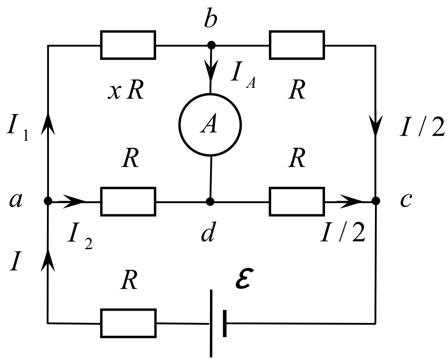
1. На основе симметрии конденсатора получены правильные уравнения для зарядовых плотностей (+2 балла).
2. Правильно записаны напряжённости электрического поля в областях между пластинами (+3 балла).
3. Указано, что разность потенциалов между пластинами 1 и 3 равна нулю (+1 балл).
4. Правильно вычислена разность потенциалов между пластинами 1 и 3 и получено дополнительное уравнение для зарядовых плотностей (+2 балла).
5. Получены правильные буквенные и числовые ответы для зарядовых плотностей и отношений зарядов пластин (+2 балла).

Задача 5. Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС $\varepsilon = 12$ В, идеального амперметра, четырёх одинаковых сопротивлений $R = 40$ Ом и переменного сопротивления $x\,R$. Пренебрегая внутренним сопротивлением батареи, найдите следующие величины:

1. Значение x, при котором тепловая мощность, выделяющаяся на сопротивлении $x\,R$, максимальна.
2. Максимальную тепловую мощность P_m, выделяющуюся на сопротивлении $x\,R$.
3. Силу тока I_A, текущего через амперметр при найденном значении x. Числовое значение силы тока выразите в миллиамперах.



Возможное решение



1. Обозначим узлы схемы буквами a, b, c и d. Так как сопротивление амперметра равно нулю, потенциалы точек b и d совпадают. Поэтому эти точки можно стянуть в одну. Тогда общее сопротиление цепи равно:

$$R_0 = R + \frac{x\,R \cdot R}{x\,R + R} + \frac{R \cdot R}{R + R} = R + \frac{x\,R}{x+1} + \frac{R}{2} = R\left(\frac{3}{2} + \frac{x}{x+1}\right) = R\,\frac{5\,x+3}{2\,(\,x+1\,)}\,.$$

Для силы тока I, текущего через батарею, получаем:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_0} = \frac{\varepsilon}{R} \cdot \frac{2\,(\,x+1\,)}{5\,x+3}\,.$$

Обозначим через I_1 и I_2 силы токов на участках ab и ad. В узле a имеем:

$$I_1 + I_2 = I\,.$$

Приравнивая напряжения на этих участках, получаем:

$$I_1\,x\,R = I_2\,R\,.$$

Отсюда находим силу тока I_1:

$$I_2 = x\,I_1\,, \qquad I_1 + x\,I_1 = I \quad \longrightarrow \quad I_1 = \frac{I}{x+1} = \frac{2\,\varepsilon}{R\,(\,5\,x+3\,)}\,.$$

Тепловая мощность, выделяющаяся на сопротивлении xR, равна:

$$P = I_1^2\, xR = \frac{4\,\varepsilon^2\, x}{R\,(\,5\,x+3\,)^2}\,.$$

2. Для того чтобы найти максимальную мощность, преобразуем последнее выражение:

$$P = \frac{4\,\varepsilon^2}{5\,R}\cdot\frac{5\,x+3-3}{(\,5\,x+3\,)^2} = \frac{4\,\varepsilon^2}{5\,R}\left(\frac{1}{5\,x+3} - \frac{3}{(\,5\,x+3\,)^2}\right).$$

Введём новую переменную y:

$$y = \frac{1}{5\,x+3}\,.$$

Мощность представляется квадратным трёхчленом относительно этой переменной:

$$P = \frac{4\,\varepsilon^2}{5\,R}\cdot(\,y - 3\,y^2\,)$$

Максимум мощности достигается при $y = 1/6$. Найдём соответствующее значение x:

$$\frac{1}{5\,x+3} = \frac{1}{6}\,,\qquad 5\,x+3 = 6\,,\qquad x = \frac{3}{5}\,.$$

Максимальная мощность равна:

$$P_m = \frac{4\,\varepsilon^2}{5\,R}\left(\frac{1}{6} - \frac{3}{36}\right) = \frac{\varepsilon^2}{15\,R} = 0{,}24\ \text{Вт}\,.$$

3. Найдём теперь силу тока I_A, текущего через амперметр. При $x = 3/5$ имеем:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\cdot\frac{2\,(\,x+1\,)}{5\,x+3} = \frac{8\,\varepsilon}{15\,R}\,,\qquad I_1 = \frac{I}{x+1} = \frac{\varepsilon}{3\,R}\,.$$

Так как напряжения на участках bc и dc совпадают, по этим участкам текут одинаковые токи $I/2$. В узле b имеем:

$$I_1 = I_A + \frac{I}{2}\quad\longrightarrow\quad I_A = I_1 - \frac{I}{2} = \frac{\varepsilon}{3\,R} - \frac{4\,\varepsilon}{15\,R} = \frac{\varepsilon}{15\,R} = 20\ \text{мА}\,.$$

Ток через амперметр течёт в направлении от узла b к узлу d.

Ответ:

$$x = \frac{3}{5}\,,\qquad P_m = \frac{\varepsilon^2}{15\,R} = 0{,}24\ \text{Вт}\,,\qquad I_A = \frac{\varepsilon}{15\,R} = 20\ \text{мА}\,.$$

Критерии

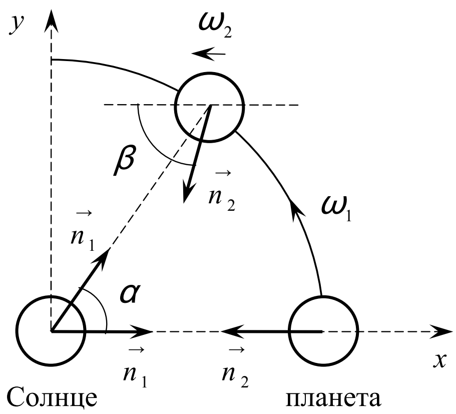
1. Указано, что точки, между которыми включён амперметр, можно стянуть в одну точку (+2 балла).
2. Правильно вычислено общее сопротивление цепи (+1 балл).
3. Правильно найдена сила тока, текущего через батарею (+1 балл).
4. Правильно найдена сила тока, текущего через сопротивление $x\,R$ (+1 балл).
5. Правильно найдена тепловая мощность, выделяющаяся на сопротивлении $x\,R$ (+1 балл).
6. Правильно найдено значение x, при котором тепловая мощность максимальна (+2 балла).
7. Получены правильные буквенный и числовой ответы для максимальной мощности (+1 балл).
8. Получены правильные буквенный и числовой ответы для силы тока, текущего через амперметр (+1 балл).

Задача 1. Вокруг некоторой звезды, которую для удобства будем называть Солнцем, по круговой орбите движется планета. Период обращения равен $T_1 = 110$ земных суток. Планета также вращается вокруг собственной оси, перпендикулярной плоскости орбиты. Период осевого вращения относительно далёких звёзд равен $T_2 = 80$ земных суток; направления орбитального и осевого вращений совпадают. Найдите следующие величины:

1. Продолжительность T солнечных суток на планете (время между двумя последовательными полуднями). Числовой ответ выразите в земных сутках и округлите до целого значения.
2. Количества оборотов N_1 и N_2, которые планета совершает за время T при орбитальном и осевом вращениях. Числовые значения округлите до десятых.

Подсказка: для наблюдателя на экваторе планеты в полдень Солнце находится в зените.

Возможное решение



Поместим начало координат в центр Солнца и введём вектор $\overrightarrow{n_1}$, направленный вдоль отрезка, соединяющего центры Солнца и планеты. Введём также вектор $\overrightarrow{n_2}$, жёстко связанный с планетой и направленный от её центра к произвольной точке на экваторе. Этот вектор участвует в осевом вращении вместе с планетой и определяет положение наблюдателя на экваторе. В дальнейшем нас будут интересовать толко направления введённых векторов. Поэтому будем считать их единичными.

Предположим, что в некоторый момент для наблюдателя наступил полдень, то есть Солнце оказалось в зените. В этом случае векторы $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ направлены противоположно друг другу. Примем этот момент за начало отсчёта времени, ось x системы координат направим вдоль вектора $\overrightarrow{n_1}$, ось y — в сторону орбитального движения планеты. За время t векторы $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ повернутся относительно своих начальных положений на углы α и β:

$$\alpha = \omega_1 t\,, \qquad \beta = \omega_2 t\,,$$

ω_1 и ω_2 — угловые скорости орбитального и осевого вращений:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}\,, \qquad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}\,.$$

Координаты векторов равны:

$$\overrightarrow{n_1} = (\cos\alpha\,, \sin\alpha)\,, \qquad \overrightarrow{n_2} = (-\cos\beta\,, -\sin\beta)\,.$$

Следующий полдень наступит в момент, когда векторы $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ снова окажутся направленными противоположно. Это условие удобно записать через скалярное произведение:

$$\overrightarrow{n_1}\,\overrightarrow{n_2} = -1\,.$$

Переходя к координатам, получаем:

$$-\cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta = -1\,, \qquad \cos(\alpha-\beta) = 1\,, \qquad \alpha - \beta = 2\pi n\,, \qquad \omega_1 t - \omega_2 t = 2\pi n$$

$$t\left(\frac{2\pi}{T_1}-\frac{2\pi}{T_2}\right)=2\pi n\,,\qquad t\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)=n\quad\longrightarrow\quad t=\frac{T_1T_2}{T_2-T_1}\,n\,.$$

Здесь n — целое число. Продолжительность солнечных суток является наименьшим положительным значением t. При $T_1\neq T_2$ оно получается при $n=\pm1$ в зависимости от знака разности T_2-T_1. Обе возможности можно учесть, взяв модуль разности. Окончательно получаем:

$$T=\frac{T_1T_2}{|\,T_1-T_2\,|}=293\text{ суток}\,.$$

Количества оборотов N_1 и N_2 определяются значениями углов поворота α и β за время T:

$$N_1=\frac{\alpha}{2\pi}=\frac{T}{T_1}=\frac{T_2}{|\,T_1-T_2\,|}=2{,}7\,,\qquad N_2=\frac{\beta}{2\pi}=\frac{T}{T_2}=\frac{T_1}{|\,T_1-T_2\,|}=3{,}7\,.$$

Как видно, разность N_2-N_1 равна единице. Если подумать, то до этого можно догадаться. Тогда решение запишется в одну строчку.

Ответ:

1. $T=T_1\,T_2/|\,T_1-T_2\,|=293$ суток.
2. $N_1=T/T_1=2{,}7\,,\qquad N_2=T/T_2=3{,}7\,.$

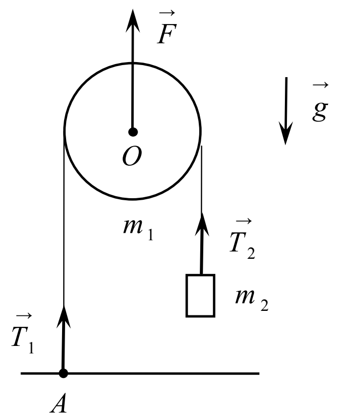
Критерии

1. Введены единичные векторы, связанные с орбитальным и осевым вращениями (+2 балла).
2. Правильно записаны координаты единичных векторов как функции времени (+1 балл).
3. Правильно сформулировано условие наступления полудня (+2 балла).
4. Правильно вычислено скалярное произведение векторов (+1 балл).
5. Получены правильные буквенный и числовой ответы для продолжительности солнечных суток (+2 балла).
6. Получены правильные буквенные и числовые ответы для количества оборотов (+2 балла).

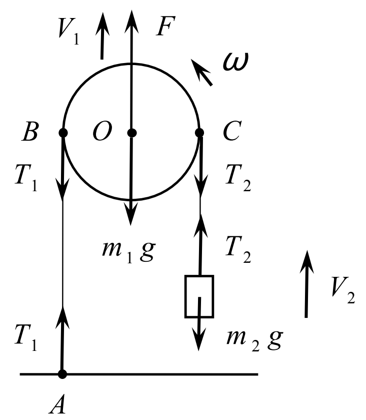
Задача 2. Блок, представляющий собой тонкий обруч с невесомыми спицами, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр O. Масса обруча $m_1 = 50$ г равномерно распределена по его длине. Через блок переброшена невесомая и нерастяжимая нить, к правому концу которой подвешен груз массой $m_2 = 75$ г. Левый вертикальный участок нити закреплён на полу в точке A. Ось блока поднимают вверх, действуя на неё постоянной силой $F = 2{,}2$ Н. Считая, что при движении нить не скользит по блоку, найдите следующие величины:

1. Ускорения оси блока a_1 и груза a_2.
2. Отношение $x = \Delta T/T_1$, где $\Delta T = T_1 - T_2$, T_1 и T_2 — силы натяжения левого и правого вертикальных участков нити. Числовое значение x округлите до сотых.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение



1. Пусть V_1 и V_2 — мгновенные скорости оси блока и груза, ω — мгновенное значение угловой скорости вращения блока вокруг своей оси, r — радиус блока. Рассмотрим мгновенные скорости V_B и V_C точек блока B и C, лежащих на концах его горизонтального диаметра. В точке B блок касается левого вертикального участка нити. Так как нить нерастяжима, скорости всех точек этого участка равны скорости точки A, то есть нулю. Поскольку нить не скользит по блоку, скорость V_B также обрашается в нуль. В точке C блок касается правого вертикального участка нити, скорости всех точек которого равны V_2. Поэтому $V_C = V_2$. Используя закон сложения скоростей, находим связь скоростей V_1 и V_2 и, как следствие, связь ускорений a_1 и a_2:

$$\begin{cases} V_B = V_1 - \omega r \;=\; 0 \\ V_C = V_1 + \omega r \;=\; V_2 \end{cases} \longrightarrow \quad V_2 = 2\,V_1\,, \quad a_2 = 2\,a_1\,.$$

2. Рассмотрим полную механическую энергию E системы, состоящей из блока, нити и груза. Для того чтобы правильно записать кинетическую энергию блока, воспользуемся известным фактом, что если тонкий обруч массой M катится без проскальзывания по столу, то его кинетическая энергия равна $M\,V^2$, где V — скорость центра обруча. В нашем случае роль стола играет левый вертикальный участок нити AB. Блок как бы катится вверх по этому неподвижному участку. Отсутствие проскальзывания соответствует обращению в нуль скорости V_B. Таким образом, в нашей задаче кинетическая энергия обруча равна $m_1 V_1^2$. Учитывая равенство $V_2 = 2\,V_1$, получаем:

$$E = m_1 V_1^2 + \frac{m_2 V_2^2}{2} + m_1\, g\, h_1 + m_2\, g\, h_2 = (\, m_1 + 2\, m_2\,)\, V_1^2 + m_1\, g\, h_1 + m_2\, g\, h_2\,,$$

h_1 и h_2 высоты оси обруча и центра масс груза над полом.

3. Рассмотрим баланс энергии системы за малое время $\Delta\, t$:

$$\Delta\, E = F\, V_1\, \Delta\, t\,.$$

Здесь в левой части стоит приращение энергии $\Delta\, E$, в правой части — работа силы F на перемещении $V_1\, \Delta\, t$. В связи с этим равенством следует отметить два обстоятельства. Во-первых, сила, действующая на нить со стороны пола в точке A, не совершает работу, поскольку скорость точки A равна нулю. Во-вторых, так как нить не скользит по блоку, силы трения, действующие между блоком и верхним участком нити, являются силами трения покоя. Суммарная работа этих сил равна нулю (другими словами, при взаимодействии нити с блоком не выделяется тепло).

Запишем приращение энергии $\Delta\, E$:

$$\Delta\, E = (\, m_1 + 2\, m_2\,)\, \Delta\, (\, V_1^2\,) + m_1\, g\, \Delta\, h_1 + m_2\, g\, \Delta\, h_2\,.$$

Обозначим через $\Delta\, V_1$ приращение скорости оси блока за время $\Delta\, t$. Тогда для приращения квадрата скорости имеем:

$$\Delta\, (\, V_1^2\,) = (\, V_1 + \Delta\, V_1\,)^2 - V_1^2 = 2\, V_1\, \Delta\, V_1 + (\, \Delta\, V_1\,)^2 = 2\, V_1\, \Delta\, V_1 \left(1 + \frac{\Delta\, V_1}{2\, V_1} \right)\,.$$

При уменьшении $\Delta\, t$ отношение $\Delta\, V_1 / V_1$ становится сколь угодно малым и может быть отброшено. Тогда

$$\Delta\, (\, V_1^2\,) = 2\, V_1\, \Delta\, V_1\,.$$

Приращения высот $\Delta\, h_1$ и $\Delta\, h_2$ равны:

$$\Delta\, h_1 = V_1\, \Delta\, t\,, \qquad \Delta\, h_2 = V_2\, \Delta\, t = 2\, V_1\, \Delta\, t\,.$$

Собирая всё вместе, получаем:

$$\Delta\, E = (\, m_1 + 2\, m_2\,) \cdot 2\, V_1\, \Delta\, V_1 + m_1\, g \cdot V_1\, \Delta\, t + m_2\, g \cdot 2\, V_1\, \Delta\, t\,.$$

Введём ускорение оси блока a_1:

$$a_1 = \frac{\Delta\, V_1}{\Delta\, t}\,.$$

Тогда $\Delta\, V_1 = a_1\, \Delta\, t$ и выражение для $\Delta\, E$ принимает вид:

$$\Delta\, E = (\, m_1 + 2\, m_2\,)\, (\, 2\, a_1 + g\,)\, V_1\, \Delta\, t\,.$$

Подставляя этот результат в уравнение баланса энергии, находим ускорение a_1:

$$a_1 = \frac{F}{2\, (\, m_1 + 2\, m_2\,)} - \frac{g}{2} = 0{,}5\ \text{м/с}^2\,.$$

Ускорение груза в два раза больше:

$$a_2 = 2\, a_1 = 1\ \text{м/с}^2\,.$$

4. Для того чтобы найти силы натяжения T_1 и T_2, запишем второй закон Ньютона для системы, состоящей из блока и верхнего участка нити. Внешними силами, действующими на эту систему, являются сила F, сила тяжести $m_1\, g$ и направленные вниз силы натяжения, действующие со стороны вертикальных участков нити. Так как нить невесома, эти силы равны T_1 и T_2. Получаем:

$$m_1\, a_1 = F - m_1\, g - T_1 - T_2$$

Запишем также второй закон Ньютона для груза:

$$m_2\,a_2 = T_2 - m_2\,g\,.$$

Используя полученное выше выражение для ускорения a_1 и равенство $a_2 = 2\,a_1$, после некоторых алгебраических преобразований находим силы натяжения и их разность:

$$T_1 = \frac{F - m_1\,g}{2}\,, \qquad T_2 = \frac{F\,m_2}{m_1 + 2\,m_2}\,, \qquad \Delta\,T = T_1 - T_2 = m_1\,a_1\,.$$

Отношение $\Delta\,T/T_1$ равно:

$$x = \frac{\Delta\,T}{T_1} = \frac{2\,m_1\,a_1}{F - m_1\,g} = 0{,}03\,.$$

Ответ:

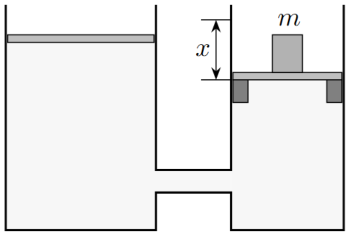
$$a_1 = \frac{F}{2\,(\,m_1 + 2\,m_2\,)} - \frac{g}{2} = 0{,}5\ \text{м/с}^2\,, \qquad a_2 = 2\,a_1 = 1\ \text{м/с}^2\,, \qquad x = \frac{2\,m_1 a_1}{F - m_1 g} = 0{,}03\,.$$

Критерии

1. Правильно найдены связи скоростей и ускорений блока и груза (+1 балл).
2. Правильно записана кинетическая энергия блока (+1 балл).
3. Правильно записано уравнение баланса энергии системы (+2 балла).
4. Получены правильные буквенный и числовой ответы для ускорения блока (+1 балл).
5. Правильно указаны силы, действующие на блок и верхний участок нити (+1 балл).
6. Правильно записано уравнение второго закона Ньютона для блока (+1 балл).
7. Правильно указаны силы, действующие на груз (+1 балл).
8. Правильно записано уравнение второго закона Ньютона для груза (+1 балл).
9. Получены правильные буквенные и числовые ответы для сил натяжения нити (+1 балл).

Задача 3. Правое колено пневматического пресса диаметром $d = 5{,}0$ см перекрыто легким плотно пригнанным поршнем, лежащим на упорах. На поршень положили груз массой $m = 5{,}0$ кг. После этого левое колено закрывали легким поршнем, так, что давление воздуха в цилиндрах осталось равным нормальному атмосферному давлению $p_0 = 100$ кПа, а его объем равным $V_0 = 22$ л. Какую минимальную работу A_{min} необходимо совершить, чтобы двигая левый поршень, поднять груз в правом колене на высоту $x = 10{,}0$ см?

Утечкой газа, трением поршней о стенки цилиндров и теплоемкостью пресса можно пренебречь. Считать, что воздух в прессе теплоизолирован. Уравнение адиабатного процесса для воздуха имеет вид $PV^{7/5} = const$.



Возможное решение

Для того, чтобы поднять груз, первоначально необходимо довести давление газа до величины:

$$P_1 = P_0 + \frac{4mg}{\pi d^2},$$

где $\frac{\pi d^2}{4}$ - площадь поршня в правом колене пресса. Работа, которая будет совершена при этом равна изменению внутренней энергии газа, так как при адиабатном процессе теплообмен отсутствует. Используя заданное уравнение процесса и уравнение состояния идеального газа, запишем уравнение адиабатного процесса «в координатах TP»:

$$PV^\gamma = \text{ const}; \quad \frac{PV}{T} = \text{ const}; \Rightarrow TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{ const}$$

Вычислим изменение температуры газа:

$$\Delta T = T_0 \left[\left(1 + \frac{4mg}{\pi d^2 P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

Работа совершенная над газом на этом этапе равна изменению внутренней энергии и вычисляется по формуле:

$$A_l = \Delta U = \frac{5}{2} \nu R \Delta T$$

После того, как давление газа достигло значения P_1, груз начнет подниматься, при этом давление, объем и температура газа изменяться не будут, поэтому совершенная работа будет равна изменению потенциальной энергии груза $A_2 = mgx$. Таким образом полная работа по поднятию груза в правом колене рассчитывается по формуле:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{5}{2} \nu R T_0 \left[\left(1 + \frac{4mg}{\pi d^2 P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + mgx =$$

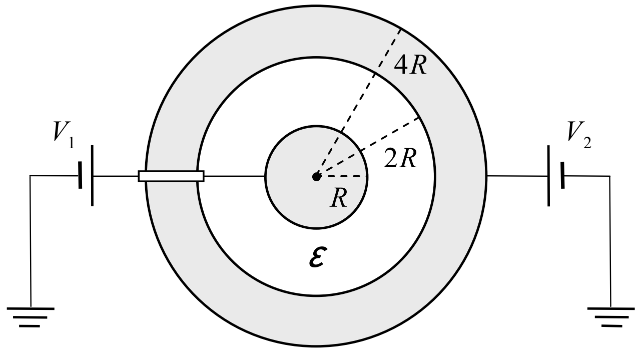
$$= \frac{5}{2} P_0 V_0 \left[\left(1 + \frac{4mg}{\pi d^2 P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + mgx \approx 360 \text{ Дж}$$

Заметим, что основной вклад дает первое слагаемое, то есть работа, совершенная при неподвижном грузе.

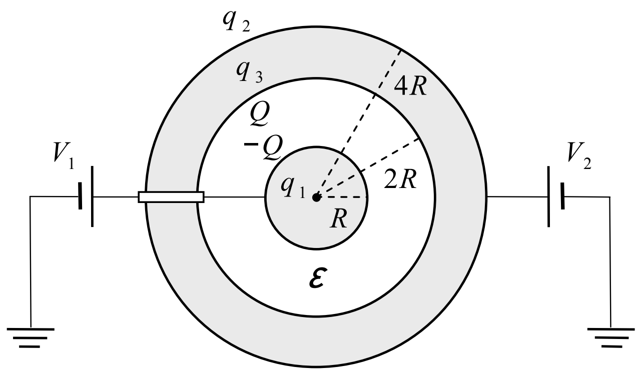
1. Правильно расчитано давление для начала подъёма груза (+1 балл).
2. Правильно рассчитано изменение темпераутры газа на первом этапе (+2 балла).
3. Получено правильное выражение для работы газа на первом этапе. (+2 балла).
4. Указано, что дальнейший подъем происходит без изменения макропараметров газа (+2 балла).
5. Указано, что работа на втором этапе расходуется на изменение потенциальной энергии груза (+2 балла).
6. Получено правильное выражение для работы при подъеме груза, рассчитано верное численное значение работы (+1 балл).

Задача 4. Металлический шар радиуса R окружён металлическим сферическим слоем. Центры шара и слоя совпадают; внутренний радиус слоя равен $2R$, внешний — $4R$. Всё пространство между шаром и слоем заполнено твёрдым однородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 2{,}5$. Шар и слой заземляют через батареи с ЭДС $V_1 = 4{,}5$ В и $V_2 = 9$ В (провод, заземляющий шар, не касается слоя). Найдите следующие величины:

1. Отношеие x_1 заряда Q, индуцированного на внешней границе диэлектрика, к заряду шара q_1: $x_1 = Q/q_1$.
2. Отношение x_2 заряда q_2 внешней поверхности металлического слоя к заряду шара q_1: $x_2 = q_2/q_1$.



Возможное решение



1. Пусть q_1 — заряд шара, q_2 — заряд внешней поверхности металлического слоя, q_3 — заряд его внутренней поверхности. Заряд на внешней границе диэлектрика обозначим через Q. Так как диэлектрик электронейтрален, заряд его внутренней границы равен $-Q$. Для того чтобы найти Q, рассмотрим в диэлектрике некоторую точку A, лежащую на расстоянии r_A от центра шара. Напряжённость электрического поля в этой точке равна:

$$E_A = \frac{k\,q_1}{\varepsilon\, r_A^2}\,, \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,.$$

Физической причиной ослабления поля в диэлектрике является наличие поляризационных зарядов, действие которых частично компенсирует электрическое поле шара. Поэтому заменим диэлектрический слой двумя сферами, совпадающими с границами диэлектрика. Внутренняя сфера имеет радиус R и несёт заряд $-Q$, внешняя — радиус $2R$ и заряд Q. Тогда для напряжённости поля в точке A имеем:

$$E_A = \frac{k\,q_1}{r_A^2} - \frac{k\,Q}{r_A^2} = \frac{k\,(\,q_1 - Q\,)}{r_A^2}\,.$$

Приравнивая выражения для E_A, получаем:

$$\frac{k\,q_1}{\varepsilon\, r_A^2} = \frac{k\,(\,q_1 - Q\,)}{r_A^2}\,, \qquad \frac{q_1}{\varepsilon} = q_1 - Q\,, \qquad Q = \frac{q_1\,(\,\varepsilon - 1\,)}{\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad x_1 = \frac{Q}{q_1} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 0{,}6\,.$$

2. Рассмотрим теперь заряды на границах металлического слоя. Возьмём в этом слое некоторую точку B, лежащую на расстоянии r_B от центра шара. Напряжённость электрического поля в этой точке равна нулю. Выражая её через заряды, получаем:

$$E_B = k\,\frac{q_1 - Q + Q + q_3}{r_B^2} = k\,\frac{q_1 + q_3}{r_B^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad q_3 = -q_1\,.$$

Используя найденные значения Q и q_3, запишем потенциал шара φ_1 в его центре и потенциал металлического слоя φ_2 в точке B:

$$\varphi_1 = k\,\left(\frac{q_1 - Q}{R} + \frac{Q - q_1}{2\,R} + \frac{q_2}{4\,R}\right) = k\,\left(\frac{q_1 - Q}{2R} + \frac{q_2}{4\,R}\right) = \frac{k}{2\,R}\,\left(\frac{q_1}{\varepsilon} + \frac{q_2}{2}\right)\,,$$

$$\varphi_2 = k\,\left(\frac{q_1 - Q + Q - q_1}{r_B} + \frac{q_2}{4\,R}\right) = \frac{k\,q_2}{4\,R}\,.$$

Полагая $\varphi_1 = V_1$ и $\varphi_2 = V_2$, получаем два уравнения для определения зарядов q_1 и q_2:

$$\frac{k}{2\,R}\,\left(\frac{q_1}{\varepsilon} + \frac{q_2}{2}\right) = V_1\,, \qquad \frac{k\,q_2}{4\,R} = V_2\,.$$

Из второго уравнения сразу находим q_2:

$$q_2 = \frac{4\,R\,V_2}{k}\,.$$

Для q_1 получаем:

$$\frac{q_1}{\varepsilon} + \frac{2\,R\,V_2}{k} = \frac{2\,R\,V_1}{k} \quad \longrightarrow \quad q_1 = \frac{2\,R\,\varepsilon\,(\,V_1 - V_2\,)}{k}\,.$$

Отношение зарядов q_2 и q_1 равно:

$$x_2 = \frac{q_2}{q_1} = \frac{2\,V_2}{\varepsilon\,(\,V_1 - V_2\,)} = -1{,}6\,.$$

Так как разность $V_1 - V_2 < 0$, заряд шара q_1 оказывается отрицательным, хотя шар присоединён к положительному полюсу батареи V_1.

Ответ:

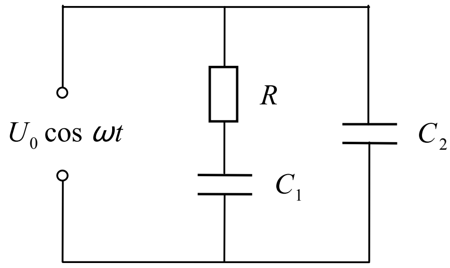
$$x_1 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 0{,}6\,, \qquad x_2 = \frac{2\,V_2}{\varepsilon\,(\,V_1 - V_2\,)} = -1{,}6\,.$$

Критерии

1. Правильно найден заряд на внешней границе диэлектрика (+2 балла).
2. Правильно найден заряд на внутренней поверхности металлического слоя (+2 балла).
3. Правильно записаны потенциалы шара и металлического слоя (+2 балла).
4. Правильно записаны связи потенциалов с ЭДС батарей (+1 балл).
5. Правильно найден заряд на внешней поверхности металлического слоя (+1 балл).
6. Правильно найден заряд шара (+1 балл).
7. Получены правильные буквенный и числовой ответы для отношений зарядов (+1 балл).

Задача 5. Цепь переменного тока состоит из двух параллельных ветвей. Левая ветвь — сопротивление $R = 2$ кОм и конденсатор ёмкостью $C_1 = 2{,}5$ мкФ, правая ветвь — конденсатор ёмкостью $C_2 = 1{,}5$ мкФ. На вход цепи подаётся напряжение $U_0 \cos\omega t$ с амплитудой $U_0 = 36$ В и круговой частотой $\omega = 400$ с$^{-1}$. В установившемся режиме сила тока в правой ветви периодически обращается в нуль. Для этого случая найдите следующие величины:

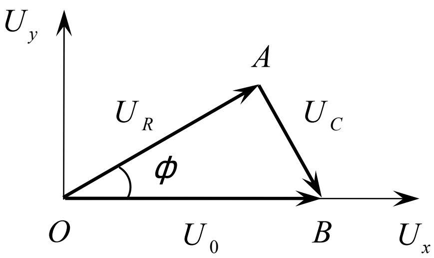
1. Абсолютную величину силы тока I в левой ветви. Числовой ответ выразите в миллиамперах.
2. Заряды конденсаторов q_1 и q_2. Числовые значения выразите в микрокулонах.



Возможное решение

Напряжение на конденсаторе C_2 равно напряжению источника. В момент времени, когда сила тока в правой ветви обращается в нуль, заряд конденсатора q_2 максимален. Это означает, что в этот момент напряжение источника также максимально и равно U_0. Отсюда сразу находим заряд q_2:

$$q_2 = U_0\,C_2 = 54\ \text{мкКл}\,.$$



Рассмотрим векторную диаграмму напряжений для левой ветви. Пусть U_0 — вектор напряжения источника, U_R и U_C — векторы напряжений на сопротивлении R и конденсаторе C_1. Длины этих векторов равны амплитудам напряжений на соответсвующих элементах. Вектор U_C повёрнут вправо на угол $90°$ по отношению к вектору U_R (напряжение на конденсаторе отстаёт по фазе от напряжения на сопротивлении на $90°$). Сумма векторов U_R и U_C равна вектору U_0. Диаграмма как целое равномерно вращается относительно неподвижных осей против часовой стрелки с угловой скоростью ω. Поскольку приложенное напряжение зависит от времени по закону $\cos\omega t$, напряжения на отдельных элементах получаются проецированием соответствующих векторов на горизонтальную ось U_x.

Представленная на рисунке диаграмма соответствует моменту времени, когда сила тока в правой ветви обращается в нуль. В этом случае напряжение источника максимально и вектор U_0 лежит на горизонтальной оси. В результате имеем треугольник OAB с прямым углом при вершине A. По теореме Пифагора:

$$U_R^2 + U_C^2 = U_0^2\,.$$

Введем вектор I_A, представляющий собой амплитуду силы тока в левой ветви. Этот вектор сонаправлен вектору U_R. Амплитуды напряжений связаны с амплитудой силы тока следующими соотношениями:

$$U_R = I_A\,R\,, \qquad U_C = \frac{I_A}{\omega\,C_1}\,,$$

$1/(\omega\,C_1)$ — ёмкостное сопротивление. Выразим U_R и U_C через U_0:

$$\frac{U_C}{U_R} = \frac{1}{\omega\,R\,C_1}\,, \qquad U_C = \frac{U_R}{\omega\,R\,C_1}\,, \qquad U_R^2 + \frac{U_R^2}{(\omega\,R\,C_1)^2} = U_0^2\,,$$

$$U_R = \frac{U_0 \cdot \omega R C_1}{\sqrt{1+(\omega R C_1)^2}}\,, \qquad U_C = \frac{U_0}{\sqrt{1+(\omega R C_1)^2}}\,.$$

В треугольнике OAB введём угол φ между векторами U_0 и U_R. Имеем:

$$\cos\varphi = \frac{U_R}{U_0}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{U_C}{U_0}\,.$$

Напряжения на сопротивлении R и конденсаторе C_1 равны проекциям векторов U_R и U_C на горизонтальную ось U_x, то есть произведениям $U_R \cos\varphi$ и $U_C \sin\varphi$. Для силы тока I в левой ветви и заряда q_1 конденсатора C_1 получаем:

$$I = \frac{U_R \cos\varphi}{R} = \frac{U_R^2}{R U_0} = \frac{U_0}{R} \cdot \frac{(\omega R C_1)^2}{1+(\omega R C_1)^2}\,, \qquad q_1 = C_1 U_C \sin\varphi = \frac{C_1 U_C^2}{U_0} = \frac{C_1 U_0}{1+(\omega R C_1)^2}\,.$$

Подстановка числовых значений даёт:

$$\omega R C_1 = 2\,, \qquad I = 14{,}4 \text{ мА}\,, \qquad q_1 = 18 \text{ мкКл}\,.$$

Ответ:

$$I = \frac{U_0}{R} \cdot \frac{(\omega R C_1)^2}{1+(\omega R C_1)^2} = 14{,}4 \text{ мА}\,, \qquad q_1 = \frac{U_0 C_1}{1+(\omega R C_1)^2} = 18 \text{ мкКл}\,, \qquad q_2 = U_0 C_2 = 54 \text{ мкКл}\,.$$

Критерии

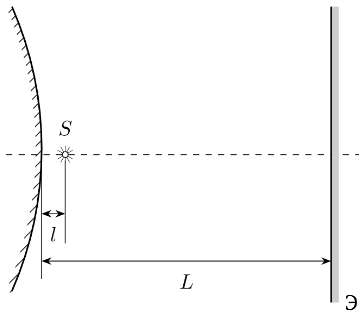
1. Указано, что при обращении в нуль силы тока в правой ветви заряд второго конденсатора и напряжение источника максимальны (+1 балл).
2. Получены правильные буквенный и числовой ответы для заряда второго конденсатора (+1 балл).
3. Правильно нарисована векторная диаграмма для левой ветви (+3 балла).
4. Правильно найдены амплитуды напряжений на сопротивлении и первом конденсаторе (+2 балла).
5. Правильно найдена разность фаз между напряжением на сопротивлении и напряжением источника (+1 балл).
6. Получены правильные буквенный и числовой ответы для силы тока в левой ветви (+1 балл).
7. Получены правильные буквенный и числовой ответы для заряда первого конденсатора (+1 балл).

Задача 6. Точечный источник S монохроматического света с длиной волны $\lambda = 550$ нм расположен на расстоянии $l = 1{,}0$ мм от выпуклого сферического зеркала с радиусом кривизны $R = 20$ см. На расстоянии $L = 5{,}0$ м от зеркала расположен плоский экран.

1. Опишите интерференционную картину на экране, найдите положения максимумов интенсивности света на экране.

2. Сколько интерференционных максимумов можно наблюдать в такой схеме? На каком минимальном расстоянии от центра экрана можно наблюдать интерференционную картину, если минимальная толщина наблюдаемой интерференционной полосы не превышает $\Delta x = 1{,}0$ мм?

Указание: при решении воспользуйтесь приближённым равенством $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm x/2$, справедливом при малых $|x| \ll 1$.



Возможное решение

Интерферировать будут волны, идущие непосредственно от источника и отраженные от зеркала. Расчет интерференционной картины можно провести как сложение волн от двух источников: S и его изображения в зеркале S', расстояние между которыми приблизительно равно $2l$. Изображение S' находится на расстоянии $f = RL/(2l + R) \approx l$, т.к. $R \gg l$. Понятно, что интерференционные полосы будут представлять собой концентрические кольца.

Рассмотрим разность хода волн от источников до некоторой точки на экране, находящейся на расстоянии r от центра экрана. Используя теорему Пифагора и малость параметра l, напишем:

$$L_{1.2} = \sqrt{r^2 + (L \pm l)^2} \approx \sqrt{r^2 + L^2 \pm 2Ll} = \sqrt{r^2 + L^2} \cdot \sqrt{1 \pm \frac{2Ll}{r^2 + L^2}}$$

$$\approx \sqrt{r^2 + L^2}\left(1 \pm \frac{Ll}{r^2 + L^2}\right)$$

Напишем условие максимума интерференции: разность хода равна целому числу длин волн

$$\frac{2Ll}{\sqrt{r^2 + L^2}} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda.$$

Второе слагаемое учитывает изменение фазы волны при отражении от оптически более плотной среды. Из этого выражения найдем радиусы интерференционных полос, соответствующие k-ому порядку интерференции:

$$r_k = L\sqrt{\left(\frac{2l}{(k - 1/2)\lambda}\right)^2 - 1}$$

Из полученного выражения следует:

1. С увеличением порядка интерференции радиус кольца уменьшается, максимальному порядку интерференции соответствует центральное пятно, где разность хода максимальна и примерно равна $2l$;

2. Число интерференционных полос ограничено, их число можно подсчитать из условия неотрицательности подкоренного выражения $k_{\max} \approx \frac{2l}{\lambda} \approx 3600$.

Так как $l \gg \lambda$, то в середине интерференционной картины, где порядок интерференции велик, выражение для радиуса колец можно упростить:

$$r_k = L\sqrt{\left(\frac{2l}{(k - 1/2)\lambda}\right)^2 - 1} \approx L\frac{2l}{k\lambda}$$

следовательно, ширина полосы зависит от ее номера по закону:

$$\Delta r_k \approx L\frac{2l}{k^2\lambda}$$

и убывает с ростом порядка интерференции. Подставляя в формулу минимальную наблюдаемую ширину полосы, определим максимальный порядок интерференции:

$$k = \sqrt{\frac{2lL}{\Delta x\lambda}} \approx 2000,$$

что соответствует радиусу интерференционного кольца $r_{2000} \approx 10$ м. Таким образом, интерференционную картину можно наблюдать на расстояниях превышающих 10 м от центра экрана.

Критерии

1. Обосовано, что интерференционная картина имеет вид концентрических колец. (+1 балл)
2. Правильно определено положение изображения в сферическом зеркале. (+1 балл)
3. Указано, что при заданых в условии численных значениях зеркало можно считать плоским. (+1 балл)
4. Правильно рассчитаны оптические пути волн от источника и изображения. (+1 балл)
5. Преобразовано выражение для разности хода с учетом малости расстояния от источника до зеркала. (+1 балл)
6. Правильно записано условие интерференционных максимумов, получено выражение для радиусов светлых колец. (+2 балла)
7. Правильно получено (строго или с учетом приближений) выражение для ширины интерференционного кольца в зависимости от его номера. (+1 балл)
8. Правильно определен максимальный наблюдаемый порядок интерференции. (+1 балл)
9. Правильно определено минимальное расстояние для наблюдения интерференции на экране. (+1 балл)