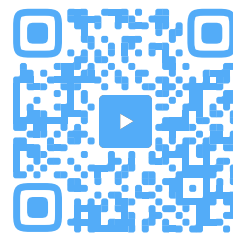
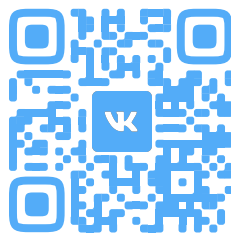
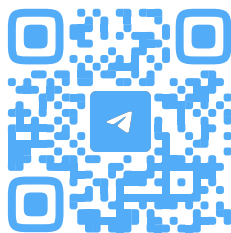
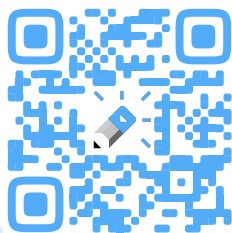


Задачи с дальнего востока. ОГЭ 2025



Содержание

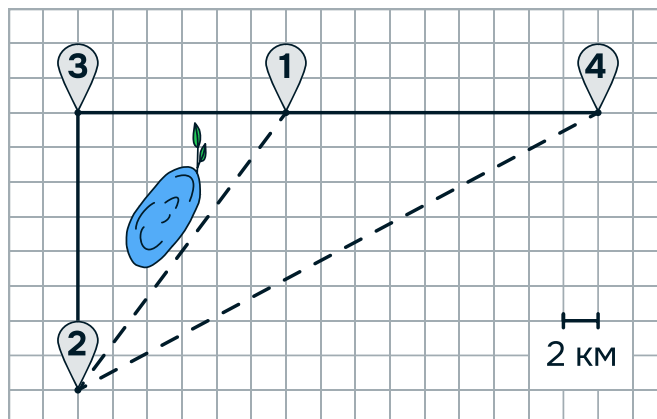
№1. Дороги	2
№2. Мобильный интернет	7
№3. Участки	12
№6. Числа и вычисления	16
№7. Числовые неравенства, координатная прямая	18
№8. Числа, вычисления и алгебраические выражения	20
№9. Уравнения	21
№10. Теория вероятностей	23
№11. Графики функций	24
№12. Расчеты по формулам	26
№13. Неравенства, системы неравенств	27
№14. Прогрессии	28
№15. Треугольники	29
№16. Окружности	31
№17. Четырёхугольники	33
№18. Фигуры на клетчатой плоскости	35
№19. Анализ утверждений	36
№20. Уравнения, неравенства, выражения	38
№21. Текстовые задачи	44
№22. Параметры	45
№23. Геометрия	49
№24. Геометрия на доказательство	53
№25. Сложная геометрия	55



№1. Дороги

Серёжа летом отдыхает с папой в деревне Пирожки. В среду они собираются съездить на машине в село Княжеское. Из деревни Пирожки в село Княжеское можно проехать по прямой грунтовой дороге. Есть более длинный путь: по прямолинейному шоссе через деревню Васильево до деревни Рябиновка, где нужно повернуть под прямым углом налево на другое шоссе, ведущее в село Княжеское. Есть и третий маршрут: в деревне Васильево можно свернуть на прямую грунтовую дорогу в село Княжеское, которая идёт мимо пруда.

Шоссе и грунтовые дороги образуют прямоугольные треугольники.



По шоссе Серёжа с папой едут со скоростью 60 км/ч, а по грунтовой дороге — со скоростью 40 км/ч. На плане изображено взаимное расположение населённых пунктов, длина стороны каждой клетки равна 2 км.

№1 (A07F51)

Пользуясь описанием, определите, какими цифрами на плане обозначены населённые пункты.

Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите последовательность трёх цифр без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Насел. пункты	д. Пирожки	с. Княжеское	д. Рябиновка
Цифры			

Ответ: 423

Решение. Из деревни Пирожки в село Княжеское можно проехать по прямолинейному шоссе через деревню Васильево до деревни Рябиновки, где нужно повернуть под прямым углом налево на другое шоссе.

Вершине прямого угла на картинке соответствует населенный пункт, обозначенный цифрой 3. Так как под прямым углом нужно повернуть в деревне Рябиновка, то деревне Рябиновка соответствует цифра 3. Деревня Пирожки, деревня Васильево и деревня Рябиновка расположены на одной прямой, причем деревня Васильево находится между деревней Пирожки и деревней Рябиновка. Значит, деревня Пирожки, деревня Васильево и деревня Рябиновка обозначены цифрами 4, 1, 3 соответственно. Тогда село Княжеское обозначено цифрой 2.

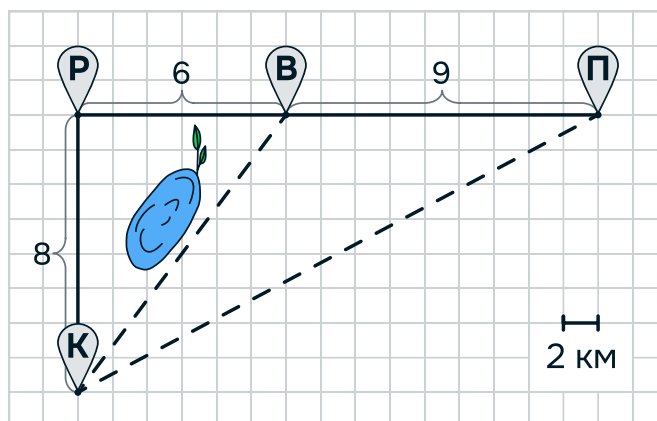
№2 (2E50A9)

Сколько километров проедут Серёжа с папой от деревни Пирожки до села Княжеское, если они поедут по шоссе через деревню Рябиновка?

Ответ: 46



Решение. В первой задаче мы определили, какими цифрами на плане обозначены населенные пункты:



Таким образом, путь по шоссе от деревни Пирожки до села Княжеское через деревню Рябиновка составит

$$9 + 6 + 8 = 23 \text{ клетки.}$$

Так как длина стороны каждой клетки равна 2 км, то весь путь составит

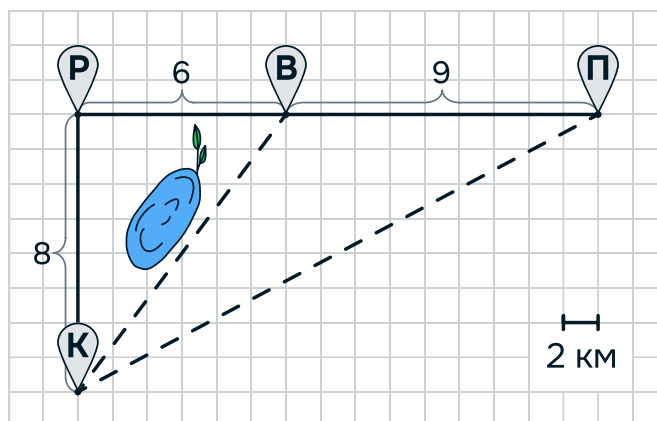
$$23 \cdot 2 \text{ км} = 46 \text{ км.}$$

№3.1 (022D04)

Найдите расстояние от деревни Васильево до села Княжеское по прямой. Ответ дайте в километрах.

Ответ: 20

Решение. В первой задаче мы определили, какими цифрами на плане обозначены населенные пункты:



Нужно найти длину дороги между деревней Васильево и селом Княжеское, то есть длину гипотенузы прямоугольного треугольника, вершинами которого являются деревня Васильево, деревня Рябиновка и село Княжеское.

По теореме Пифагора длина гипотенузы равна

$$\sqrt{8^2 + 6^2} \text{ клеток} = \sqrt{64 + 36} \text{ клеток} = \sqrt{100} \text{ клеток} = 10 \text{ клеток.}$$

Так как длина стороны клетки равна 2 км, то расстояние от деревни Васильево до села Княжеское составляет

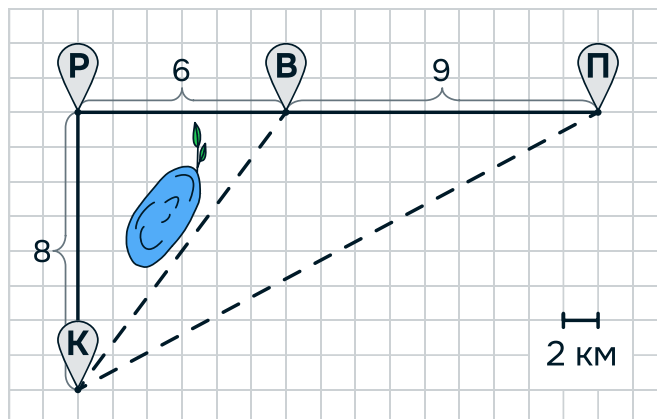
$$10 \cdot 2 \text{ км} = 20 \text{ км.}$$

**№3.2** (5B87BC)

Найдите расстояние от деревни Пирожки до села Княжеское по прямой. Ответ дайте в километрах.

Ответ: 34

Решение. В первой задаче мы определили, какими цифрами на плане обозначены населенные пункты:



Нужно найти длину дороги между деревней Пирожки и селом Княжеское, то есть длину гипотенузы прямоугольного треугольника, вершинами которого являются деревня Пирожки, деревня Рябиновка и село Княжеское.

По теореме Пифагора длина гипотенузы равна

$$\sqrt{8^2 + 15^2} \text{ клеток} = \sqrt{64 + 225} \text{ клеток} = \sqrt{289} \text{ клеток} = 17 \text{ клеток.}$$

Так как длина стороны клетки равна 2 км, то расстояние от деревни Пирожки до села Княжеское составляет

$$17 \cdot 2 \text{ км} = 34 \text{ км.}$$

№4.1 (5FBB18)

Сколько минут затратят на дорогу из деревни Пирожки в село Княжеское Серёжа с папой, если они поедут сначала по шоссе, а затем свернут в деревне Васильево на прямую грунтовую дорогу, которая проходит мимо пруда?

Ответ: 48

Решение. По шоссе Серёжа с папой едут со скоростью 60 км/ч. Значит, участок шоссе между деревней Пирожки и деревней Васильево длиной в $9 \cdot 2 = 18$ км они преодолеют за время, равное

$$\frac{18}{60} \text{ ч.} = \frac{18}{60} \cdot 60 \text{ мин} = 18 \text{ мин.}$$

По прямой грунтовой дороге между деревней Васильево и селом Княжеское Серёжа с папой едут со скоростью 40 км/ч.

Длину дороги между этими населенными пунктами мы нашли в **№3.1**. Она равна 20 км. Значит, время, которое Серёжа с папой затратят на дорогу из деревни Васильево в село Княжеское, равно

$$\frac{20}{40} \text{ ч.} = \frac{1}{2} \cdot 60 \text{ мин} = 30 \text{ мин.}$$

Следовательно, суммарное время в пути будет равно

$$18 + 30 = 48 \text{ мин.}$$

№4.2 (8692FC)

Сколько минут затратят на дорогу из деревни Пирожки в село Княжеское Серёжа с папой, если они поедут по прямой грунтовой дороге?

Ответ: 51

Решение. Сереза с папой едут по прямой грунтовой дороге между деревней Пирожки и селом Княжеское. Значит, скорость, с которой они едут, равна 40 км/ч.

Длину дороги между этими населенными пунктами мы нашли в **№3.2**. Она равна 34 км.

Время движения — это отношение пройденного пути к скорости. Значит, время, которое Сереза с папой затратят на дорогу из деревни Пирожки в село Княжеское, равно

$$\frac{34}{40} \text{ ч.} = \frac{34}{40} \cdot 60 \text{ мин} = \frac{34 \cdot 6}{4} \text{ мин} = 17 \cdot 3 \text{ мин} = 51 \text{ мин.}$$

№5 (48DF60)

В таблице указана стоимость (в рублях) некоторых продуктов в четырёх магазинах, расположенных в деревне Пирожки, селе Княжеском, деревне Васильево и деревне Рябиновке.

Наименование продукта	д. Пирожки	с. Княжеское	д. Васильево	д. Рябиновка
Молоко (1 л)	48	45	50	52
Хлеб (1 батон)	34	32	33	28
Сыр «Российский» (1 кг)	240	280	270	260
Говядина (1 кг)	370	400	380	420
Картофель (1 кг)	22	16	28	30

Серёжа с папой хотят купить 2 л молока, 3 батона хлеба и 1 кг сыра «Российский». В каком магазине такой набор продуктов будет стоить дешевле всего? В ответ запишите стоимость данного набора в этом магазине.

Ответ: 438

Решение. В деревне Пирожки набор из 2 л молока, 3 батончиков хлеба и 1 кг сыра будет стоить

$$48 \cdot 2 + 3 \cdot 34 + 240 \text{ руб.} = 96 + 102 + 240 \text{ руб.} = 438 \text{ руб.}$$

Покажем, что в остальных магазинах цена за набор будет больше.

В селе Княжеское 1 кг сыра на 40 рублей дороже, литр молока на 3 рубля дешевле, 1 батон на 2 рубля дешевле. Тогда 1 кг сыра на 40 рублей дороже, 2 л молока на 6 рублей дешевле, 3 батона на 6 рублей дешевле. Значит, весь набор будет дороже на

$$40 - 6 - 6 \text{ руб.} = 28 \text{ руб.}$$

В деревне Васильево 1 кг сыра на 30 рублей дороже, литр молока на 2 рубля дороже, 1 батон на 1 рубль дешевле. Тогда 1 кг сыра на 30 рублей дороже, 2 л молока на 4 рубля дороже, 3 батона на 3 рубля дешевле. Значит, весь набор будет дороже на

$$30 + 4 - 3 \text{ руб.} = 31 \text{ руб.}$$

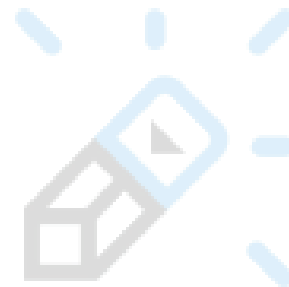
В деревне Рябиновка 1 кг сыра на 20 рублей дороже, литр молока на 4 рубля дороже, 1 батон на 6 рублей дешевле. Тогда 1 кг сыра на 20 рублей дороже, 2 л молока на 8 рублей дороже, 3 батона на 18 рублей



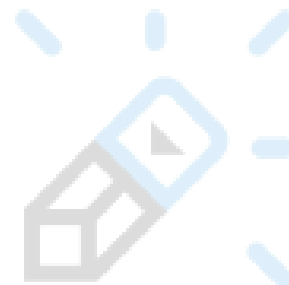
дешевле. Значит, весь набор будет дороже на

$$20 + 8 - 18 \text{ руб.} = 10 \text{ руб.}$$

Получили, что наименьшая стоимость набора в деревне Пирожки и она составляет 438 руб.

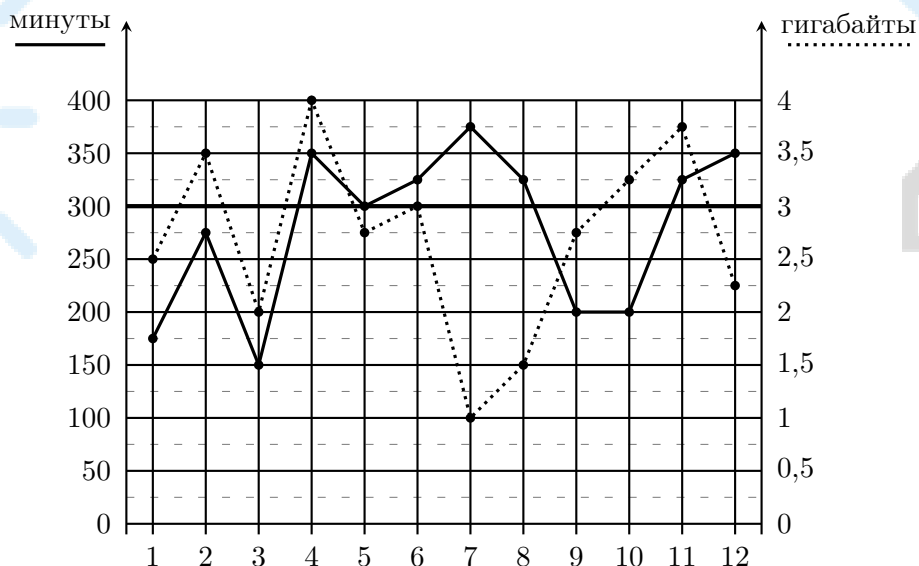


ШКОЛКОВО



№2. Мобильный интернет

На рисунке точками показано количество минут исходящих вызовов и трафик мобильного интернета в гигабайтах, израсходованных абонентом в процессе пользования смартфоном, за каждый месяц 2019 года. Для удобства точки, соответствующие минутам и гигабайтам, соединены сплошными и пунктирными линиями соответственно.



В течение года абонент пользовался тарифом «Стандартный», абонентская плата по которому составляла 350 рублей в месяц. При условии нахождения абонента на территории РФ в абонентскую плату тарифа «Стандартный» входит:

- пакет минут, включающий 300 минут исходящих вызовов на номера, зарегистрированные на территории РФ;
- пакет интернета, включающий 3 гигабайта мобильного интернета;
- пакет SMS, включающий 120 SMS в месяц;
- безлимитные бесплатные входящие вызовы.

Стоимость минут, интернета и SMS сверх пакета тарифа указана в таблице.

Исходящие вызовы	3 руб./мин
Мобильный интернет (пакет)	90 руб. за 0,5 ГБ
SMS	2 руб./шт.

Абонент не пользовался услугами связи в роуминге. За весь год абонент отправил 110 SMS.

№1.1 (061534)

Определите, какие месяцы соответствуют указанному в таблице трафику мобильного интернета. Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите числа, соответствующие номерам месяцев, без пробелов, запятых и других дополнительных символов (например, для месяцев май, январь, ноябрь, август в ответ нужно записать число 51118).

Мобильный интернет	1 ГБ	3 ГБ	3,25 ГБ	1,5 ГБ
Номер месяца				

Ответ: 76108



Решение. Информация о трафике мобильного интернета указана на графике пунктирными линиями, ось гигабайтов находится справа.

1 ГБ интернета был израсходован в 7 месяце.

3 ГБ интернета было израсходовано в 6 месяце.

3,25 ГБ интернета было израсходовано в 10 месяце.

1,5 ГБ интернета было израсходовано в 8 месяце.

Таким образом, ответ 76108.

№1.2 (9CC7A4)

Определите, какие месяцы соответствуют указанному в таблице количеству минут исходящих вызовов.

Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите числа, соответствующие номерам месяцев, без пробелов, запятых и других дополнительных символов (например, для месяцев май, январь, ноябрь, август в ответ нужно записать число 51118).

Исходящие вызовы	175 мин	300 мин	275 мин	150 мин
Номер месяца				

Ответ: 1523

Решение. Так как абонент не пользовался услугами связи в роуминге, воспользуемся рисунком из условия, конкретнее, посмотрим на график зависимости количества минут исходящих вызовов от месяца. По этому графику видно, что 175 мин было израсходовано в 1-ом месяце, 300 мин – в 5-ом месяце, 275 мин – во 2-ом месяце, 150 мин – в 3-ем месяце.

№2 (1A9F7F)

Сколько рублей потратил абонент на услуги связи в апреле?

Ответ: 680

Решение. Апрель – 4 по счету месяц. По графику видно, что в этом месяце абонент потратил 4 ГБ интернета и 350 минут на исходящие вызовы.

По условию абонент не пользовался услугами связи в роуминге. В абонентскую плату тарифа «Стандартный» входит 3 ГБ интернета и 300 минут исходящих вызовов на российские номера.

Тогда абонент превысил и количество используемого интернета, и количество минут исходящих вызовов. За каждые 0,5 ГБ сверх пакета абонент платит 90 рублей, то есть он заплатил

$$\frac{4 - 3}{0,5} \cdot 90 = 2 \cdot 90 = 180 \text{ руб.}$$

За каждую минуту сверх пакета абонент платит 3 рубля, то есть он заплатил еще

$$(350 - 300) \cdot 3 = 50 \cdot 3 = 150 \text{ руб.}$$

Таким образом, всего в апреле абонент заплатил за услуги связи 350 рублей за тариф «Стандартный», 180 рублей за интернет сверх пакета и 150 рублей за минуты исходящих вызовов сверх пакета, итого

$$350 + 180 + 150 = 680 \text{ руб.}$$

№3.1 (5BD1CC)

Сколько месяцев в 2019 году абонент превысил лимит по пакету мобильного интернета?

Ответ: 4

Решение. Лимит по пакету интернета – 3 ГБ. Опираясь на рисунок, можно выделить месяцы, в которых лимит по пакету интернета был превышен. Это месяцы под номерами 2, 4, 10 и 11.



Значит, всего таких месяцев 4.

№3.2 (2C48EC)

Сколько месяцев в 2019 году расходы по тарифу составили ровно 350 рублей?

Ответ: 4

Решение. Если расходы по тарифу в какой-то месяц составили 350, то это значит, что в этот месяц абонент не превышал ни одного лимита.

Лимит по пакету минут — 300 мин. Опираясь на рисунок, можно выделить месяцы, в которых лимит по пакету минут не был превышен. Это месяцы под номерами 1, 2, 3, 5, 9, 10.

Лимит по пакету мобильного интернета — 3 ГБ. Также опираясь на рисунок, выделим номера месяцев, в которые лимит не был превышен: 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 12.

Тогда абонент не превышал лимит ни по пакету минут, ни по пакету мобильного интернета в месяцы под номерами 1, 3, 5, 9.

Всего таких месяцев 4.

№4.1 (0563D8)

Какой наименьший трафик мобильного интернета в гигабайтах за месяц был в 2019 году?

Ответ: 1

Решение. По графику видно, что наименьший трафик мобильного интернета был в 7 месяце и равнялся 1 ГБ.

№4.2 (001035)

На сколько процентов увеличился трафик мобильного интернета в феврале по сравнению с январём 2019 года?

Ответ: 40

Решение. Февраль — 2 по счету месяц, а январь — 1. По графику видно, что в феврале было израсходовано 3,5 ГБ мобильного интернета, а в январе — 2,5 ГБ.

Пусть 2,5 ГБ — это 100%, 3,5 гигабайта — $x\%$. Тогда

$$\frac{x}{100} = \frac{3,5}{2,5} = \frac{7}{5}.$$

Значит,

$$x = \frac{7 \cdot 100}{5} = 7 \cdot 20 = 140.$$

Таким образом, трафик мобильного интернета в указанный период увеличился на $140 - 100 = 40\%$.

№4.3 (E3AFA5)

В январе 2020 года абонентская плата по тарифу «Стандартный» повысилась и составила 490 рублей. На сколько процентов повысилась абонентская плата?

Ответ: 40

Решение. Изначально абонентская плата составляла 350 рублей. Тогда стоимость повысилась на $490 - 350 = 140$ рублей.

$$\frac{140}{350} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Следовательно, абонентская плата повысилась на 40%.

№4.4 (1CDEF9)

Известно, что в 2019 году абонентская плата по тарифу «Стандартный» выросла на 75% по сравнению с 2018 годом. Сколько рублей составляла абонентская плата в 2018 году?

Ответ: 200

Решение. Пусть в 2018 году абонентская плата составляла x рублей. Тогда в 2019 году она составила $1,75x$ рублей, так как она выросла на 75%. Тогда имеем:

$$1,75x = 350$$

$$7x = 1400$$

$$x = 200$$

Значит, абонентская плата в 2018 году составляла 200 рублей.

№5.1 (800087)

В конце 2019 года оператор связи предложил абоненту перейти на новый тариф, условия которого приведены в таблице.

Стоимость перехода на тариф	0 руб.
Абонентская плата в месяц	460 руб.
В абонентскую плату включены пакеты:	
пакет исходящих вызовов	400 минут
пакет мобильного интернета	4 ГБ
пакет SMS	130 SMS
После расходования пакетов:	
входящие вызовы	0 руб./мин
исходящие вызовы*	4 руб./мин
мобильный интернет (пакет)	160 руб. за 0,5 ГБ
SMS	2 руб./шт.

*исходящие вызовы на номера, зарегистрированные на территории РФ

Абонент решает, перейти ли ему на новый тариф, посчитав, сколько бы он потратил на услуги связи за 2019 г., если бы пользовался им. Если получится меньше, чем он потратил фактически за 2019 г., то абонент примет решение сменить тариф.

Перейдёт ли абонент на новый тариф? В ответе запишите ежемесячную абонентскую плату по тарифу, который выберет абонент на 2020 год.

Ответ: 350

Решение. Абонентская плата по новому тарифу превышает стоимость абонентской платы по старому тарифу на $460 - 350 = 110$ рублей.

По графику видно, что абонент в 2019 году не тратил больше 400 минут и 4 гигабайт мобильного интернета в месяц. То есть по новому тарифу он платил бы только абонентскую плату. Тогда по оплате абонентской платы он потратил бы на $110 \cdot 12 = 1320$ рублей за год больше.

Но по нынешнему тарифу абонент платил не только абонентскую плату, но и оплачивал услуги сверх пакета.

Посчитаем, сколько дополнительных минут за год израсходовал абонент: 50 минут в 4 месяце, 25 минут в 6 месяце, 75 минут в 7 месяце, 25 минут в 8 и 11 месяцах, 50 минут в 12 месяце. Итого всего дополнительных минут было потрачено

$$50 + 25 + 75 + 25 + 25 + 50 = 250$$

Каждая дополнительная минута стоит 3 рубля, посчитаем, сколько всего абонент заплатил за дополнительные минуты

$$250 \cdot 3 = 750$$

Теперь посчитаем, сколько дополнительных гигабайтов израсходовал абонент в 2019 году:



- 0,5 ГБ во 2 месяце, то есть купил один дополнительный пакет;
- 1 ГБ в 4 месяце, то есть купил два дополнительных пакета;
- 0,25 ГБ в 10 месяце, то есть купил один дополнительный пакет;
- 0,75 ГБ в 11 месяце, то есть купил два дополнительных пакета.

Итого всего было куплено 6 дополнительных пакетов интернета.

Посчитаем, сколько абонент заплатил за интернет сверх пакета в 2019 году

$$6 \cdot 90 = 540$$

Тогда помимо абонентской платы по своему тарифу абонент заплатил еще $750 + 540 = 1290$ рублей за услуги сверх пакета.

Если бы абонент перешел на новый тариф, то в 2019 году он заплатил бы всего на 1320 рублей больше, чем абонентская плата по старому тарифу. Таким образом, старый тариф оказался выгоднее нового, поэтому абонент останется на нем.

№5.2 (9A1C92)

Помимо мобильного интернета, абонент использует домашний интернет от провайдера «Омега». Этот интернет-провайдер предлагает три тарифных плана. Условия приведены в таблице.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
«0»	Нет	1,1 руб. за 1 Мб
«300»	290 руб. за 300 Мб трафика в месяц	1,2 руб. за 1 Мб сверх 300 Мб
«800»	930 руб. за 800 Мб трафика в месяц	0,5 руб. за 1 Мб сверх 800 Мб

Абонент предполагает, что трафик составит 800 Мб в месяц, и выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей должен будет заплатить абонент за месяц, если трафик действительно будет равен 800 Мб?

Ответ: 880

Решение. Вычислим, сколько абонент должен будет заплатить по каждому тарифному плану, если его трафик составит 800 Мб.

План «0»:

$$0 + 800 \cdot 1,1 = 880 \text{ руб.}$$

План «300»:

$$290 + 1,2 \cdot 500 = 290 + 600 = 890 \text{ руб.}$$

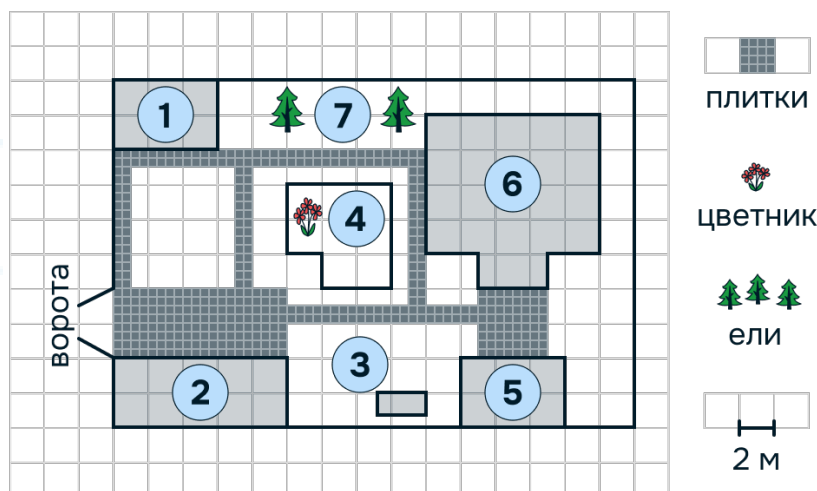
План «800»:

$$930 + 0 = 930 \text{ руб.}$$

Значит, самым выгодным тарифным планом для абонента будет план «0» и за месяц абонент заплатит 880 рублей.



№3. Участки



На плане изображено домохозяйство по адресу: СНТ «Прибор», 2-я Линия, д. 26 (сторона каждой клетки на плане равна 2 м). Участок имеет прямоугольную форму. Выезд и въезд осуществляются через единственные ворота.

При входе на участок справа от ворот находится гараж, а слева в углу участка расположен сарай, отмеченный на плане цифрой 1. Площадь, занятая сараем, равна 24 кв. м.

Жилой дом находится в глубине территории и обозначен на плане цифрой 6. Помимо гаража, жилого дома и сарая, на участке имеется летняя беседка, расположенная напротив входа в дом, и мангал рядом с ней. На участке также растут ели. В центре участка расположен цветник.

Все дорожки внутри участка имеют ширину 1 м и вымощены тротуарной плиткой размером 50 см × 50 см. Перед гаражом и между домом и беседкой имеются площадки площадью 40 и 16 кв. м соответственно, вымощенные такой же плиткой.

К домохозяйству подведено электричество. Имеется магистральное газоснабжение.

№1 (D9D19B)

Для объектов, указанных в таблице, определите, какими цифрами они обозначены на плане. Заполните таблицу, в бланк ответов перенесите последовательность четырёх цифр без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Объекты	цветник	гараж	мангал	беседка
Цифры				

Ответ: 4235

Решение. По условию при входе на участок справа от ворот находится гараж. Так как выезд и въезд осуществляются через ворота, и объект, находящийся справа от ворот, обозначен цифрой 2, то гараж на плане под цифрой 2.

По условию объект, расположенный напротив входа в жилой дом (цифра 6 на плане), это летняя беседка. Значит, летняя беседка обозначена цифрой 5. Рядом с беседкой находится мангал, значит, он обозначен цифрой 3.

В центре участка расположен цветник, он обозначен цифрой 4, ели на плане под цифрой 7. Оставшийся объект под номером 1 – это сарай по условию.

Таким образом, ответ 4235.



№2 (37804F)

Найдите площадь, которую занимает цветник. Ответ дайте в квадратных метрах.

Ответ: 32

Решение. Площадь, занимаемая цветником, состоит из двух прямоугольников: из прямоугольника со сторонами 1 и 2 клетки и прямоугольника со сторонами 3 и 2 клетки. Так как каждая клетка имеет ширину 2 метра, то стороны первого прямоугольника равны 2 м и 4 м, стороны второго прямоугольника равны 6 м и 4 м. Значит, площадь, которую занимает цветник, равна

$$S = (2 \cdot 4 + 6 \cdot 4) \text{ м}^2 = 32 \text{ м}^2.$$

№3 (A62909)

Тротуарная плитка продается в упаковках, рассчитанных на 3,5 кв. м. Сколько упаковок такой плитки понадобилось, чтобы выложить все дорожки и обе площадки?

Ответ: 31

Решение. По условию ширина всех дорожек равна 1 м. Найдём суммарную длину всех дорожек. Длина горизонтальных дорожек (в клетках), считая сверху вниз, равна

$$(9 + 5,5) \text{ кл.} = 14,5 \text{ кл.}$$

Каждая клетка на плане имеет ширину 2 м, значит, длина горизонтальных дорожек равна:

$$14,5 \cdot 2 \text{ м} = 29 \text{ м.}$$

Аналогично найдем длину всех вертикальных дорожек (слева направо):

$$(3,5 + 3,5 + 4) \text{ кл.} = 11 \text{ кл.} = 11 \cdot 2 \text{ м} = 22 \text{ м.}$$

Тогда суммарная длина всех дорожек равна $29 + 22 = 51$ м.

Найдём площадь, которую занимают дорожки:

$$S_{\text{дор.}} = 51 \text{ м} \cdot 1 \text{ м} = 51 \text{ м}^2.$$

По условию площади площадок равны 40 м^2 и 16 м^2 . Найдём суммарную площадь, занимаемую двумя площадками:

$$S_{\text{пл.}} = (40 + 16) \text{ м}^2 = 56 \text{ м}^2.$$

Тогда все дорожки и обе площадки занимают площадь:

$$S_{\text{дор.}} + S_{\text{пл.}} = 51 \text{ м}^2 + 56 \text{ м}^2 = 107 \text{ м}^2.$$

Значит, для того, чтобы выложить все дорожки и обе площадки, нужно хотя бы

$$\frac{107}{3,5} \text{ уп.} = \frac{214}{7} \text{ уп.} = 30\frac{4}{7} \text{ уп.}$$

Количество упаковок – это целое число, значит, понадобилась 31 упаковка.

№4.1 (E5CF7F)

Сколько процентов площади всего участка занимает сарай?

Ответ: 4

Решение. По условию площадь, которую занимает сарай, равна 24 м^2 .



Площадь, которую занимает участок, представляет собой прямоугольник со сторонами 15 клеток и 10 клеток. Так как каждая клетка имеет ширину 2 метра, то стороны прямоугольника равны 30 м и 20 м. Значит, площадь, которую занимает весь участок, равна

$$S = 30 \text{ м} \cdot 20 \text{ м} = 600 \text{ м}^2.$$

Найдём, сколько процентов площади всего участка занимает сарай:

$$\frac{24}{600} \cdot 100\% = \frac{4}{100} \cdot 100\% = 4\%.$$

№4.2 (BA4CA1)

Найдите расстояние от гаража до жилого дома (расстояние между двумя ближайшими точками по прямой) в метрах.

Ответ: 10

Решение. Гараж — объект под номером 2, жилой дом — объект под номером 6.

Расстояние между двумя ближайшими точками гаража и жилого дома является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4 клетки. Поскольку одна клетка соответствует 2 метрам, длины катетов составляют:

$$3 \cdot 2 = 6 \text{ м}, \quad 4 \cdot 2 = 8 \text{ м}.$$

Применяя теорему Пифагора, получаем искомое расстояние:

$$\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ м}.$$

Таким образом, расстояние между гаражом и жилым домом равно 10 метров.

№5 (DB97BA)

Хозяин участка планирует установить в жилом доме систему отопления. Он рассматривает два варианта: электрическое или газовое отопление. Цены на оборудование и стоимость его установки, данные о расходе газа, электроэнергии и их стоимости даны в таблице.

	Нагреватель (котёл)	Прочее оборудование и монтаж	Средн. расход газа/средн. потребл. мощность	Стоимость газа/электроэнергии
Газовое отопление	28000 руб.	16540 руб.	1,1 куб. м/ч	4,8 руб./куб. м
Электр. отопление	22000 руб.	14444 руб.	5,8 кВт	4,4 руб./(кВт · ч)

Обдумав оба варианта, хозяин решил установить газовое отопление. Через сколько часов непрерывной работы отопления экономия от использования газа вместо электричества компенсирует разницу в стоимости покупки и установки газового и электрического оборудования?

Ответ: 400

Решение. Для того, чтобы установить газовое отопление, потребуется

$$28000 + 16540 = 44540 \text{ руб.}$$

Для того, чтобы установить электрическое отопление, потребуется

$$22000 + 14444 = 36444 \text{ руб.}$$



Значит, установка газового отопления дороже установки электрического отопления на

$$44540 - 36444 = 8096 \text{ руб.}$$

Стоимость часа работы газового отопления равна произведению среднего расхода газа и стоимости газа. Тогда час работы газового отопления стоит

$$1,1 \cdot 4,8 \text{ руб.} = 5,28 \text{ руб.}$$

Стоимость часа работы электрического отопления равна произведению средней потребляемой мощности и стоимости электроэнергии:

$$5,8 \cdot 4,4 \text{ руб.} = 25,52 \text{ руб.}$$

Тогда один час работы электрического отопления дороже газового на

$$25,52 - 5,28 \text{ руб.} = 20,24 \text{ руб.}$$

Значит, газовое отопление компенсирует разницу в стоимости покупки и установки по сравнению с электрическим отоплением за

$$\frac{8096}{20,24} \text{ ч} = 400 \text{ ч.}$$

ШКОЛКОВО

**№6. Числа и вычисления****№6.1** (EA1574)Найдите значение выражения $\frac{1}{2} + \frac{31}{20}$.**Ответ:** 2,05**Решение.**

$$\frac{1}{2} + \frac{31}{20} = \frac{50}{100} + \frac{31 \cdot 5}{100} = \frac{50 + 155}{100} = \frac{205}{100} = 2,05.$$

№6.2 (ЗСС449)Найдите значение выражения $\frac{1}{4} - \frac{51}{20}$.**Ответ:** -2,3**Решение.**

$$\frac{1}{4} - \frac{51}{20} = \frac{5}{20} - \frac{51}{20} = \frac{5 - 51}{20} = -\frac{46}{20} = -\frac{23}{10} = -2,3.$$

№6.4 (35В3А3)Найдите значение выражения $\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{8}$.**Ответ:** 0,45**Решение.**

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{8} = \frac{2 \cdot 9}{5 \cdot 8} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20} = \frac{45}{100} = 0,45.$$

№6.5 (AA2745)Найдите значение выражения $\frac{14}{5} : \frac{7}{2}$.**Ответ:** 0,8**Решение.**

$$\frac{14}{5} : \frac{7}{2} = \frac{14}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{14 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 1} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

№6.6 (21014E)Найдите значение выражения $6,9 + 7,4$.**Ответ:** 14,3**Решение.**

$$6,9 + 7,4 = \frac{69}{10} + \frac{74}{10} = \frac{143}{10} = 14,3.$$

№6.7 (6В40А0)Найдите значение выражения $3,6 - 4,1$.**Ответ:** -0,5**Решение.**

$$3,6 - 4,1 = \frac{36}{10} - \frac{41}{10} = -\frac{5}{10} = -0,5.$$

№6.8 (003СС0)Найдите значение выражения $7,7 \cdot 5,3$.**Ответ:** 40,81



Решение.

$$7,7 \cdot 5,3 = \frac{77}{10} \cdot \frac{53}{10} = \frac{4081}{100} = 40,81.$$

№6.9 (76122A)

Найдите значение выражения $\frac{6,8}{1,7}$.

Ответ: 4

Решение.

$$\frac{6,8}{1,7} = \frac{68}{17} = 4.$$

ШКОЛКОВО

**№7. Числовые неравенства, координатная прямая****№7.11 (9A90D8)**

Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{5}{13}$?

- 1) $[0,2; 0,3]$
- 2) $[0,3; 0,4]$
- 3) $[0,4; 0,5]$
- 4) $[0,5; 0,6]$

Ответ: 2

Решение. Переведём дробь $\frac{5}{13}$ в бесконечную десятичную дробь, поделив в столбик:

$$\frac{5}{13} = 0,38\dots$$

Тогда $\frac{5}{13}$ лежит в промежутке $[0,3; 0,4]$, и ответ — 2.

№7.13 (BC1F2C)

Между какими числами заключено число $\sqrt{58}$?

- 1) 19 и 21
- 2) 57 и 59
- 3) 3 и 4
- 4) 7 и 8

Ответ: 4

Решение. Заметим, что

$$\sqrt{49} = 7$$

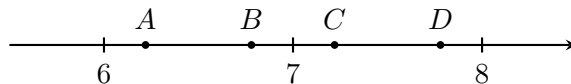
$$\sqrt{64} = 8$$

Заметим, что $49 < 58 < 64$. Значит, $\sqrt{49} < \sqrt{58} < \sqrt{64}$, то есть $7 < \sqrt{58} < 8$.

Таким образом, ответ — 4.

№7.14 (54D6A9)

На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D . Одна из них соответствует числу $\sqrt{53}$. Какая это точка?



- 1) A
- 2) B
- 3) C
- 4) D

Ответ: 3

Решение. Заметим, что

$$\sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt{64} = 8$$

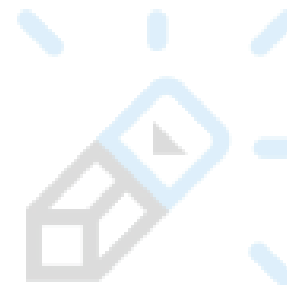
Откуда получаем, что $\sqrt{49} < \sqrt{53} < \sqrt{64}$, то есть $7 < \sqrt{53} < 8$. Так как 53 ближе к 49, чем к 64, то $\sqrt{53}$



ближе к 7, чем к 8. Из этих рассуждений видно, что подходящая точка — C , то есть ответ — 3.



ШКОЛКОВО



**№8. Числа, вычисления и алгебраические выражения****№8.26** (808A59)Найдите значение выражения $(\sqrt{15} - 2)^2 + 4\sqrt{15}$.**Ответ:** 19**Решение.**

$$\begin{aligned} & (\sqrt{15} - 2)^2 + 4\sqrt{15} = \\ & = (\sqrt{15})^2 - 4\sqrt{15} + 4 + 4\sqrt{15} = \\ & = 15 + 4 = 19. \end{aligned}$$

№8.11 (D8EAFA)Найдите значение выражения $\frac{(a^4)^4}{a^{14}}$ при $a = 6$.**Ответ:** 36**Решение.** Упростим выражение:

$$\frac{(a^4)^4}{a^{14}} = \frac{a^{16}}{a^{14}} = a^{16-14} = a^2$$

Подставим $a = 6$:

$$a^2 = 6^2 = 36.$$

№8.24 (2E00AB)Найдите значение выражения $(\sqrt{17} - 3)(\sqrt{17} + 3)$.**Ответ:** 8**Решение.**

$$(\sqrt{17} - 3)(\sqrt{17} + 3) = (\sqrt{17})^2 - 3^2 = 17 - 9 = 8.$$

№8.25 (E8CC7D)Найдите значение выражения $(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})$.**Ответ:** 5**Решение.**

$$(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2}) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2 = 7 - 2 = 5.$$

№8.10 (71C14F)Найдите значение выражения $\frac{a^9 \cdot a^{12}}{a^{18}}$ при $a = 4$.**Ответ:** 64**Решение.**

$$\frac{a^9 \cdot a^{12}}{a^{18}} = a^{(9+12-18)} = a^3$$

Подставим $a = 4$, получим

$$a^3 = 4^3 = 16 \cdot 4 = 64.$$

**№9. Уравнения****№9.8 (EA4046)**

Решите уравнение $x^2 - 9x + 18 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

Ответ: 3**Решение.**

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

Найдем дискриминант:

$$D = 9^2 - 4 \cdot 18 = 81 - 72 = 9 = 3^2$$

Отсюда имеем

$$x = \frac{9 \pm 3}{2}$$

В условии требуется записать меньший корень, поэтому в ответ запишем

$$x = \frac{9 - 3}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

№9.9 (4318F0)

Решите уравнение $x^2 - 11x + 18 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

Ответ: 9**Решение.**

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

Найдем дискриминант:

$$D = 11^2 - 4 \cdot 18 = 121 - 72 = 49 = 7^2$$

Отсюда имеем

$$x = \frac{11 \pm 7}{2}$$

В условии требуется записать больший корень, поэтому в ответ запишем

$$x = \frac{11 + 7}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

№9.10 (B4BCC5)

Решите уравнение $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

Ответ: 0,5**Решение.**

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$$

Таким образом,

$$x = \frac{3 \pm 1}{2 \cdot 2}$$



В ответ записываем меньший корень, то есть

$$x = \frac{3-1}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = 0,5.$$

№9.7 (CA994A)

Решите уравнение $10x^2 = 80x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

Ответ: 0

Решение.

$$10x^2 = 80x$$

$$10x^2 - 80x = 0$$

$$10x(x - 8) = 0$$

$$\begin{cases} 10x = 0 \\ x - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$$

Тогда меньший из корней равен 0.

ШКОЛКОВО

№10. Теория вероятностей

№10.2 (CE37E1)

В среднем из 100 карманных фонариков, поступивших в продажу, пять неисправных. Найдите вероятность того, что выбранный наудачу в магазине фонарик окажется исправен.

Ответ: 0,95

Решение. Вероятность события равна отношению числа благоприятных исходов к числу всех исходов. Благоприятные исходы — те, в которых случайно выбранный в магазине фонарик окажется исправен. Их количество равно разности общего числа фонариков и количества неисправных, то есть $100 - 5 = 95$. Число всех исходов равно количеству всех фонариков, поступивших в продажу, то есть 100. Найдём вероятность:

$$P = \frac{95}{100} = 0,95.$$

№10.7 (ABV466)

В магазине канцтоваров продаётся 112 ручек: 17 красных, 44 зелёных, 29 фиолетовых, остальные синие и чёрные, их поровну. Найдите вероятность того, что случайно выбранная в этом магазине ручка будет красной или чёрной.

Ответ: 0,25

Решение. Найдём количество красных, зелёных и фиолетовых ручек:

$$17 + 44 + 29 = 90.$$

Тогда количество синих и чёрных равно:

$$112 - 90 = 22$$

Так как синих и чёрных ручек поровну, то их по

$$\frac{22}{2} = 11$$

Вероятность события равна отношению числа благоприятных исходов к числу всех исходов.

Благоприятные исходы — это те, при которых случайно выбранная ручка красного или чёрного цвета. Их число равно $17 + 11 = 28$.

Число всех исходов равно общему количеству ручек, то есть 112.

Найдём вероятность:

$$\frac{28}{112} = \frac{1}{4} = 0,25$$

№10.5 (57DE2A)

Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо (или не пишет), равна 0,26. Покупатель в магазине выбирает одну шариковую ручку. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет хорошо.

Ответ: 0,74

Решение. Так как события всего два: ручка пишет хорошо и ручка пишет плохо, то сумма их вероятностей равна 1.

Так как вероятность того, что ручка пишет плохо, равна 0,26, то вероятность того, что ручка пишет хорошо, равна

$$p = 1 - 0,26 = 0,74$$

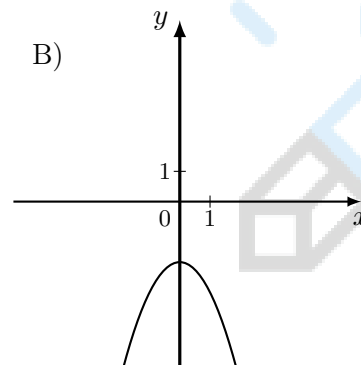
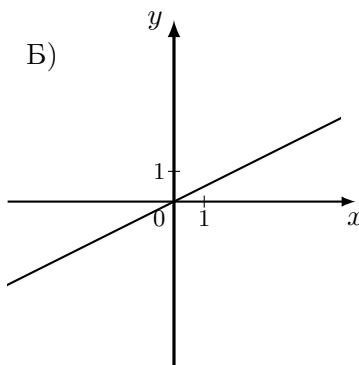
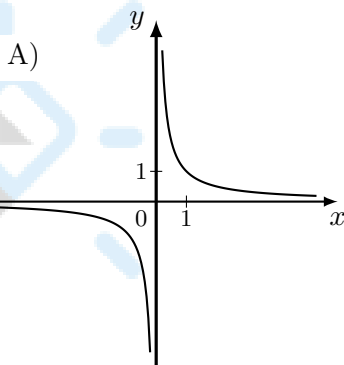


№11. Графики функций

№11.7 (240003)

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y = \frac{1}{x}$

2) $y = -x^2 - 2$

3) $y = \frac{1}{2}x$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В

Ответ: 132

Решение. На графике А изображена гипербола, то есть А — это график функции 1.

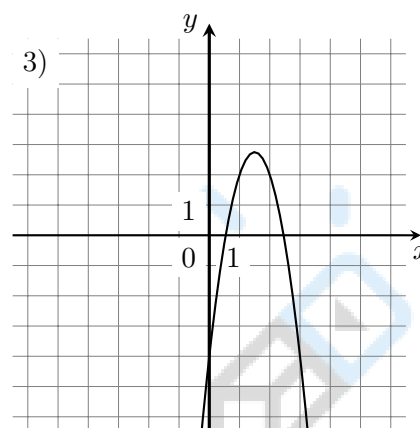
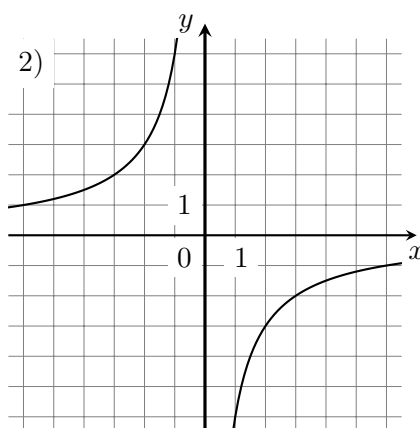
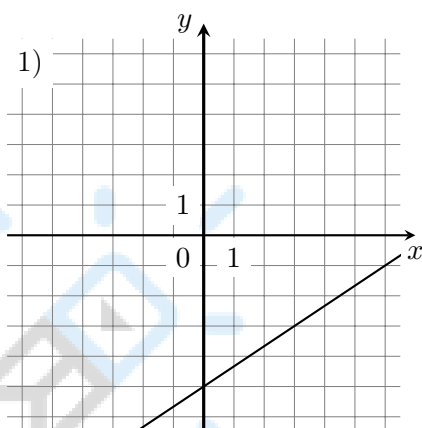
На графике Б изображена прямая, то есть Б — это график линейной функции 3.

На графике В изображена парабола, то есть В — это график квадратичной функции 2.

№11.8 (8F1404)

Установите соответствие между формулами, которыми заданы функции, и графиками этих функций.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

А) $y = -3x^2 + 9x - 4$

Б) $y = -\frac{6}{x}$

В) $y = \frac{2}{3}x - 5$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В

Ответ: 321



Решение. График функции А) — парабола. Среди графиков только одна парабола, под номером 3. Значит, функции А соответствует график 3.

График функции Б) — гипербола. Среди графиков только одна гипербола, под номером 2. Значит, функции Б соответствует график 2.

Тогда функции В соответствует график 1.



ШКОЛКОВО





№12. Расчеты по формулам

№12.1 (0A4D44)

В фирме «Родник» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле $C = 6000 + 4100n$, где n – число колец, установленных в колодце. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из 20 колец. Ответ дайте в рублях.

Ответ: 88000

Решение. В нашем случае $n = 20$, подставим это значение в формулу из условия:

$$C = 6000 + 4100 \cdot 20 = 2000 \cdot (3 + 41) = 20000 \cdot 44 = 88000.$$

№12.5 (F4529D)

Перевести значение температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$, где t_C – температура в градусах Цельсия, t_F – температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 185 градусов по шкале Фаренгейта?

Ответ: 85

Решение. Подставим данные из условия:

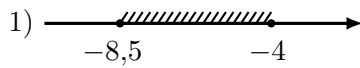
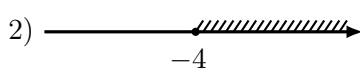
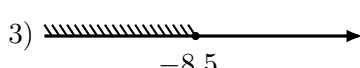
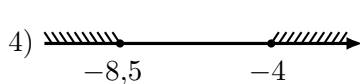
$$t_C = \frac{5}{9} \cdot (185 - 32) = \frac{5}{9} \cdot 153 = \frac{5 \cdot 153}{9} = 5 \cdot 17 = 85$$

ШКОЛКОВО

№13. Неравенства, системы неравенств

№13.3 (B542FA)

Выберите правильный ответ. Укажите решение системы неравенств $\begin{cases} x + 4 \geq -4,5, \\ x + 4 \leq 0. \end{cases}$

- 1) 
- 2) 
- 3) 
- 4) 

Ответ: 1
Решение.

$$\begin{cases} x + 4 \geq -4,5, \\ x + 4 \leq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -8,5, \\ x \leq -4 \\ -8,5 \leq x \leq -4 \end{cases}$$

Таким образом, ответ под цифрой 1.

№13.2 (5A6749)

Выберите правильный ответ. Укажите решение системы неравенств $\begin{cases} x - 2,6 \leq 0, \\ x - 1 \geq 1. \end{cases}$

- 1) $[2; 2,6]$
2) $(-\infty; 2,6]$
3) $(-\infty; 2] \cup [2,6; +\infty)$
4) $[2; +\infty)$

Ответ: 1
Решение. Упростим систему:

$$\begin{cases} x - 2,6 \leq 0, \\ x - 1 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 2,6 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$x \in [2; 2,6]$$

Таким образом, решением исходной системы является промежуток $[2; 2,6]$, то есть ответ – 1.

№14. Прогрессии

№14.3 (A55400)

В амфитеатре 14 рядов, причём в каждом следующем ряду на одно и то же число мест больше, чем в предыдущем. В пятом ряду 27 мест, а в восьмом ряду 36 мест. Сколько мест в последнем ряду амфитеатра?

Ответ: 54

Решение. Так как в каждом следующем ряду на одно и то же число мест больше, чем в предыдущем, то количества мест в каждом ряду составляют арифметическую прогрессию с разностью d . По условию $a_5 = 27$, $a_8 = 36$.

Тогда

$$a_5 + 3d = a_8$$

$$27 + 3d = 36$$

$$3d = 9$$

$$d = 3$$

По формуле n -го члена арифметической прогрессии

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$27 = a_1 + 4 \cdot 3$$

$$27 = a_1 + 12$$

$$a_1 = 15$$

Найдём количество мест в последнем ряду:

$$\begin{aligned} a_{14} &= a_1 + (14 - 1)d = a_1 + 13d = \\ &= 15 + 13 \cdot 3 = 15 + 39 = 54. \end{aligned}$$

№14.1 (1F7343)

В амфитеатре 10 рядов. В первом ряду 25 мест, а в каждом следующем на 3 места больше, чем в предыдущем. Сколько мест в восьмом ряду амфитеатра?

Ответ: 46

Решение. Так как в каждом ряду на два места больше, чем в предыдущем, мы имеем дело с арифметической прогрессией. Нам известно, что

$$a_1 = 25, d = 3, n = 10, a_8 = ?$$

Вспользуемся формулой n -ого члена арифметической прогрессии:

$$a_k = a_1 + (k - 1) \cdot d$$

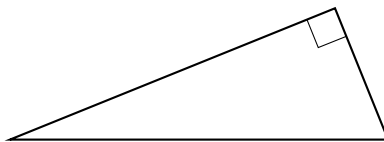
$$a_8 = 25 + (8 - 1) \cdot 3 = 46$$



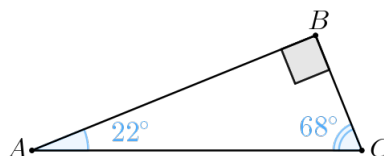
№15. Треугольники

№15.2 (595130)

Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 68° . Найдите его другой острый угол. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 22
Решение.



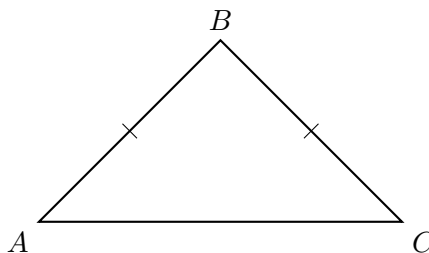
Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC , где угол B прямой, то есть $\angle B = 90^\circ$, а угол C равен 68° . Согласно свойству прямоугольных треугольников, сумма острых углов равна 90° , то есть

$$\angle A + \angle C = 90^\circ \Rightarrow \angle A = 90^\circ - \angle C = 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ$$

Таким образом, второй острый угол равен 22° .

№15.3 (64AC4E)

В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = 108^\circ$. Найдите угол BCA . Ответ дайте в градусах.



Ответ: 36

Решение. Так как $AB = BC$, треугольник ABC равнобедренный с основанием AC , а значит $\angle BCA = \angle BAC$. Сумма углов треугольника равна 180° :

$$\angle ABC + \angle CAB + \angle BCA = 180^\circ.$$

Тогда

$$180^\circ = \angle ABC + 2\angle BCA$$

Значит,

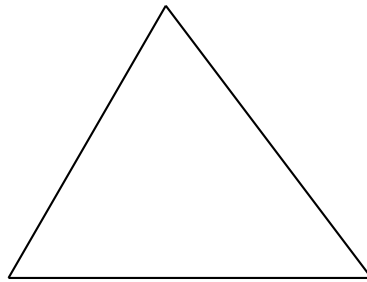
$$\angle BCA = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ.$$

Таким образом, угол BCA равен 36° .



№15.1 (32B7F7)

В треугольнике два угла равны 54° и 58° . Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.



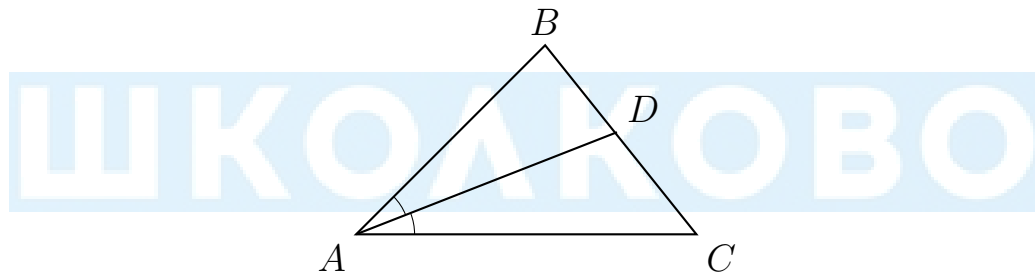
Ответ: 68

Решение. Так как сумма углов треугольника равна 180° , то третий угол равен

$$180^\circ - 54^\circ - 58^\circ = 68^\circ.$$

№15.7 (39A249)

В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 48^\circ$, AD — биссектриса. Найдите угол BAD . Ответ дайте в градусах.



Ответ: 24

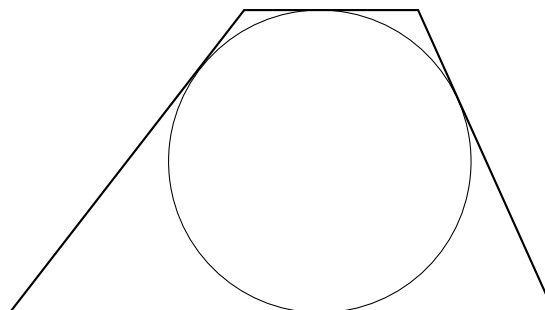
Решение. Так как AD — биссектриса, то

$$\angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 48^\circ = 24^\circ.$$

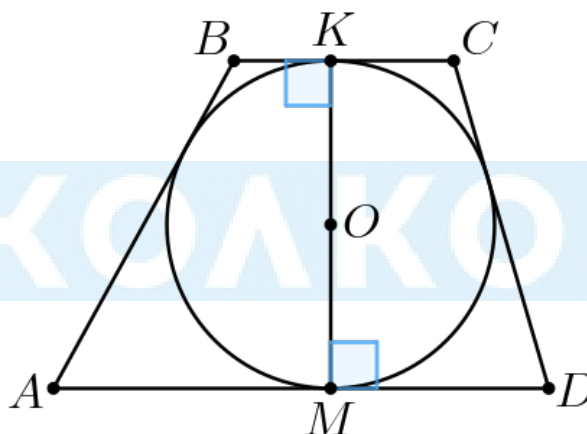
№16. Окружности

№16.24 (E5AF5A)

Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен 26. Найдите высоту этой трапеции.



Ответ: 52
Решение.



Пусть точки K и M — точки касания BC и AD с окружностью. Так как касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, то

$$OK \perp BC$$

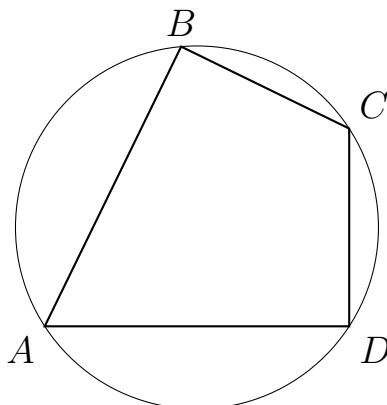
$$OM \perp AD \Rightarrow OM \perp BC$$

Значит, точки O , M и K лежат на одной прямой, так как прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны. Тогда KM — высота. Так как OM и OK — радиусы, то

$$KM = OM + OK = 26 + 26 = 52.$$

№16.13 (2FF9D2)

Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 62° . Найдите угол C этого четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 118

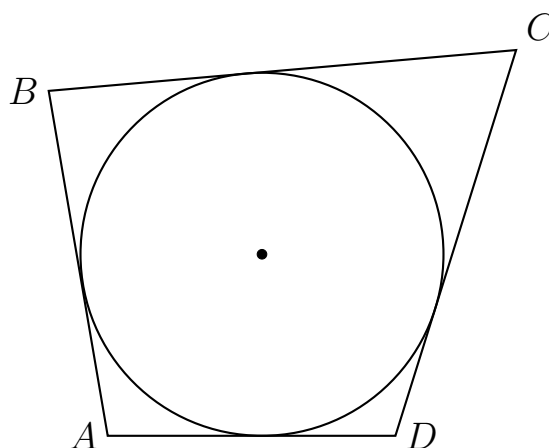
Решение. Заметим, что $\angle BAD$ опирается на меньшую дугу BD , а $\angle BCD$ — на большую дугу BD . Тогда сумма этих углов равна 180° . Таким образом,

$$\begin{aligned}\angle BAD + \angle BCD &= 180^\circ \\ \angle BCD &= 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ\end{aligned}$$

Значит, $\angle C = 118^\circ$.

№16.22 (385365)

Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности, $AB = 8$, $BC = 20$, $CD = 17$. Найдите AD .



Ответ: 5

Решение. У описанного четырёхугольника суммы противоположных сторон равны. Используя данный факт, имеем:

$$AB + CD = BC + AD,$$

откуда

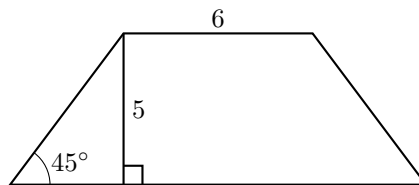
$$AD = AB + CD - BC = 8 + 17 - 20 = 5.$$



№17. Четырёхугольники

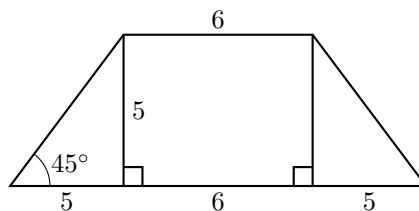
№17.29 (D5D947)

В равнобедренной трапеции известны высота, меньшее основание и угол при основании (см. рисунок). Найдите большее основание.



Ответ: 16

Решение. Проведём вторую высоту в трапеции. Получим прямоугольник и два равнобедренных прямоугольных треугольника.

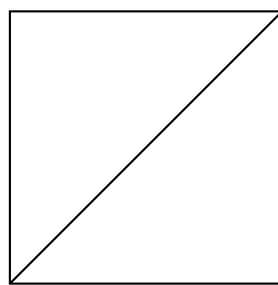


Таким образом, большее основание равно

$$b = 5 + 6 + 5 = 16.$$

№17.17 (8C5C72)

Сторона квадрата равна $3\sqrt{2}$. Найдите диагональ этого квадрата.



Ответ: 6

Решение. Пусть сторона квадрата равна a . Тогда диагональ как гипотенуза прямоугольного треугольника по теореме Пифагора равна:

$$\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

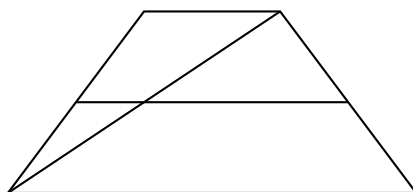
Таким образом, диагональ квадрата со стороной a равна $a\sqrt{2}$, т.е. при $a = 3\sqrt{2}$ диагональ равна

$$3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6.$$



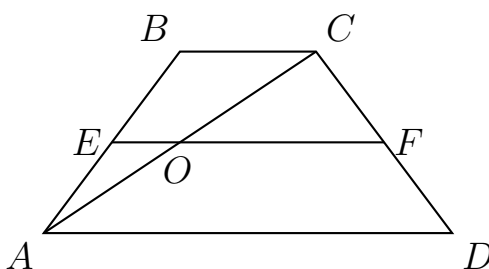
№17.25 (146E47)

Основания трапеции равны 1 и 19. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.



Ответ: 9,5

Решение. Пусть $AB = 19$, $DC = 1$.

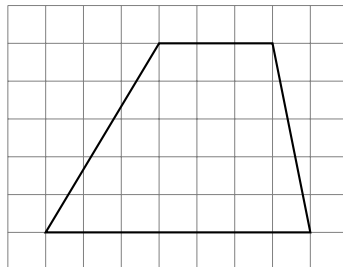


Так как EF — средняя линия трапеции, то EO и OF — средние линии треугольников ADC и ACB соответственно. Тогда имеем:

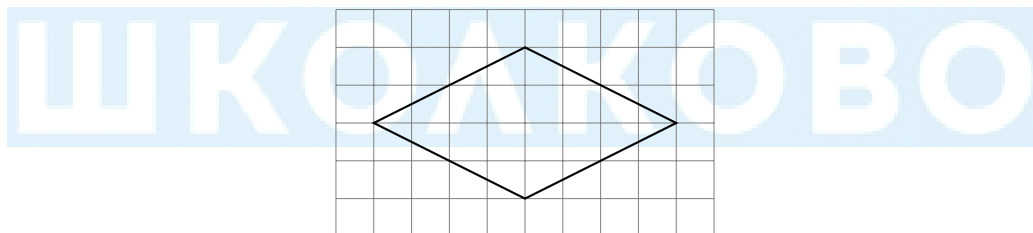
$$EO = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2} \cdot 1 = 0,5$$

$$OF = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 19 = 9,5$$

Больший из этих отрезков равен 9,5.

**№18. Фигуры на клетчатой плоскости****№18.8** (867701)На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.**Ответ:** 25**Решение.** Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту. Основания трапеции равны 3 и 7, высота равна 5. Найдём площадь:

$$S = \frac{3+7}{2} \cdot 5 = 25$$

№18.6 (33E327)На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён ромб. Найдите площадь этого ромба.**Ответ:** 16**Решение.** Так как площадь ромба равна половине произведения диагоналей, то

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16.$$

№19. Анализ утверждений

№19.1 (99076)

Какое из следующих утверждений верно?

1. Смежные углы всегда равны.
2. Каждая из биссектрис равнобедренного треугольника является его высотой.
3. Существует прямоугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

В ответ запишите номер выбранного утверждения.

Ответ: 3

Решение.

1. Неверно, потому что смежные углы дают в сумме 180° , но равны не всегда.
2. Неверно, у равнобедренного неравностороннего треугольника биссектриса из вершины у основания — не высота.
3. Верно. Квадрат — прямоугольник, его диагонали перпендикулярны.

№19.2 (48400)

Какое из следующих утверждений верно?

1. Площадь квадрата равна произведению двух его смежных сторон.
2. Диагональ трапеции делит её на два равных треугольника.
3. Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

В ответ запишите номер выбранного утверждения.

Ответ: 1

Решение.

1. Площадь квадрата равна произведению двух его смежных сторон, поэтому это утверждение верно.
2. Данное утверждение неверно для произвольной трапеции.
3. Верно следующее утверждение: если две стороны одного треугольника и угол между ними соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны. В данном случае не хватает равенства углов между равными сторонами, поэтому это утверждение неверно.

**№19.3** (100348)

Какие из следующих утверждений верны?

- 1) Длина гипотенузы прямоугольного треугольника меньше суммы длин его катетов.
- 2) Если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от сторон этого угла.
- 3) Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм является ромбом.

В ответ запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 12

Решение. 1) По неравенству треугольника, сумма двух сторон всегда больше третьей, в том числе и сумма двух катетов больше гипотенузы.

2) Да, это известное свойство биссектрисы.

3) Нет, например, прямоугольник — параллелограмм с равными диагоналями, но не ромб.

Таким образом, ответ — 12 или 21.

№19.4 (48621)

Какие из следующих утверждений верны?

1. Для точки, лежащей на окружности, расстояние до центра окружности равно радиусу.
2. Площадь трапеции равна произведению основания трапеции на высоту.
3. Треугольника со сторонами 1, 2, 4 не существует.

В ответ запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 13

Решение.

1. Радиус — отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой, лежащей на окружности. По определению радиуса данное утверждение верно.
2. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту. Значит, это утверждение неверно.
3. Так как $1 + 2 < 4$, то по неравенству треугольника такого треугольника не существует. Значит, это утверждение верно.

Таким образом, ответ — 13 или 31.

№20. Уравнения, неравенства, выражения

№20.8 (154A3F)

Решите уравнение $(x - 2)^4 - (x - 2)^2 - 6 = 0$.

Ответ: $2 - \sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3}$

Решение. Сделаем замену $t = (x - 2)^2 \geq 0$. Тогда $(x - 2)^4 = ((x - 2)^2)^2 = t^2$. Решим новое уравнение:

$$\begin{aligned} t^2 - t - 6 &= 0 \\ D &= (-1)^2 - 4 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 = 5^2 \\ t &= \frac{1 \pm 5}{2} \\ \begin{cases} t = 3 \\ t = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} (x - 2)^2 = 3 \\ (x - 2)^2 = -2 \end{cases}$$

Так как для любого x верно, что $(x - 2)^2 \geq 0$, то второе уравнение полученной совокупности не имеет решений.

Решим первое уравнение:

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 &= 3 \\ (x - 2)^2 - 3 &= 0 \\ (x - 2)^2 - (\sqrt{3})^2 &= 0 \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 - (\sqrt{3})^2 &= 0 \\ (x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3}) &= 0 \end{aligned}$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, поэтому полученное уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x - 2 - \sqrt{3} = 0 \\ x - 2 + \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

№20.14 (41D970)

Решите неравенство $\frac{-14}{(x-5)^2-2} \geq 0$.

Ответ: $(5 - \sqrt{2}; 5 + \sqrt{2})$

Решение.

$$\frac{-14}{(x-5)^2-2} \geq 0$$

Разделим обе части неравенства на -14 . Тогда неравенство поменяет знак на противоположный:

$$\frac{1}{(x-5)^2-2} \leq 0$$

$$\frac{1}{(x-5)^2 - (\sqrt{2})^2} \leq 0$$

$$\frac{1}{(x-5-\sqrt{2})(x-5+\sqrt{2})} \leq 0$$

Решим неравенство методом интервалов. Для этого найдём нули знаменателя, решив сопутствующее уравнение:

$$(x-5-\sqrt{2})(x-5+\sqrt{2}) = 0.$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, поэтому уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x-5-\sqrt{2} = 0 \\ x-5+\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5+\sqrt{2} \\ x = 5-\sqrt{2} \end{cases}$$

Рисуем ось, отмечаем на ней найденные корни, выкалываем нули знаменателя, расставляем знаки на промежутках:



Таким образом, $x \in (5 - \sqrt{2}; 5 + \sqrt{2})$.



№20.4 (4FB09D)

Решите уравнение $x^4 = (2x - 8)^2$.

Ответ: -4; 2

Решение. Заметим, что $x^4 = (x^2)^2$. Тогда

$$\begin{aligned}x^4 &= (2x - 8)^2 \\(x^2)^2 &= (2x - 8)^2 \\(x^2)^2 - (2x - 8)^2 &= 0\end{aligned}$$

Преобразуем левую часть полученного уравнения, воспользовавшись формулой разности квадратов:

$$\begin{aligned}(x^2 - (2x - 8))(x^2 + (2x - 8)) &= 0 \\(x^2 - 2x + 8)(x^2 + 2x - 8) &= 0\end{aligned}$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, поэтому полученное уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{cases}x^2 - 2x + 8 = 0 \\x^2 + 2x - 8 = 0\end{cases}$$

Решим первое уравнение совокупности:

$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 8 &= 0 \\D &= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4 - 32 = -28 < 0\end{aligned}$$

Следовательно, первое уравнение совокупности не имеет решений.

Решим второе уравнение совокупности:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 8 &= 0 \\D &= 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 = 6^2 \\x &= \frac{-2 \pm 6}{2} \\ \begin{cases}x = 2 \\x = -4\end{cases}\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{cases}x^2 - 2x + 8 = 0 \\x^2 + 2x - 8 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 2 \\x = -4\end{cases}$$



№20.11 (50АС99)

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2x^2 + 4y^2 = 24, \\ 4x^2 + 8y^2 = 24x. \end{cases}$$

Ответ: (2; -2); (2; 2)

Решение. Домножим первое уравнение системы на 2:

$$\begin{cases} 4x^2 + 8y^2 = 24 \cdot 2 \\ 4x^2 + 8y^2 = 24x \end{cases}$$

Левые части равны, следовательно, равны и правые части. Тогда

$$\begin{cases} 24x = 24 \cdot 2 \\ 4x^2 + 8y^2 = 24 \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2x^2 + 4y^2 = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2 \cdot 4 + 4y^2 = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ 4y^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \end{cases}$$



№20.1 (F4C4E0)

Решите уравнение $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$.

Ответ: -4 ; -2 ; 2

Решение. Преобразуем уравнение:

$$x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$x^2(x + 4) - 4(x + 4) = 0$$

$$(x + 4)(x^2 - 4) = 0$$

Преобразуем левую часть полученного уравнения, воспользовавшись формулой разности квадратов:

$$(x + 4)(x - 2)(x + 2) = 0$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, поэтому полученное уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x + 4 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

ШКОЛКОВО



№20.3 (984D22)

Решите уравнение $x(x^2 + 4x + 4) = 3(x + 2)$.

Ответ: -3; -2; 1

Решение. Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned}x(x^2 + 4x + 4) &= 3(x + 2) \\x(x^2 + 4x + 4) - 3(x + 2) &= 0\end{aligned}$$

По формуле сокращённого умножения

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 = (x + 2)^2$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}x(x + 2)^2 - 3(x + 2) &= 0 \\x(x + 2)(x + 2) - 3(x + 2) &= 0 \\(x + 2)(x(x + 2) - 3) &= 0 \\(x + 2)(x^2 + 2x - 3) &= 0\end{aligned}$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, поэтому полученное уравнение равносильно совокупности

$$\begin{cases}x + 2 = 0 \\x^2 + 2x - 3 = 0\end{cases}$$

Решим второе уравнение совокупности:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$D = 2^2 + 4 \cdot 3 = 16 = 4^2$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$\begin{cases}x = 1 \\x = -3\end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases}x + 2 = 0 \\x^2 + 2x - 3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -2 \\x = 1 \\x = -3\end{cases}$$

**№21. Текстовые задачи****№21.13 (217BDE)**

Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 75 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего по платформе параллельно путям со скоростью 3 км/ч навстречу поезду, за 30 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Ответ: 650 м

Решение. Пусть длина поезда равна x км.

Поскольку пешеход идет навстречу поезду, скорость сближения конца поезда и пешехода равна сумме их скоростей, то есть $75 + 3 = 78$ км/ч.

Тогда пешеход и конец поезда со скоростью 78 км/ч сближаются на расстояние, равное длине поезда, за 30 секунд.

Переведём 30 секунд в часы. 30 секунд — это $\frac{30}{60} = 0,5$ минуты, то есть $\frac{0,5}{60} = \frac{1}{120}$ часа.

Тогда

$$x = 78 \cdot \frac{1}{120} = \frac{13}{20} = 0,65 \text{ км}$$

Значит, длина поезда равна 0,65 км, то есть 650 м.

ШКОЛКОВО



№22. Параметры

№22.6 (2939С4)

Постройте график функции

$$y = \frac{4x - 5}{4x^2 - 5x}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $k \in \left\{ \frac{16}{25} \right\}$

Решение. Область определения функции:

$$4x^2 - 5x \neq 0$$

$$x(4x - 5) \neq 0$$

$$x \neq 0; x \neq \frac{5}{4}$$

Преобразуем уравнение, задающее функцию:

$$y = \frac{4x - 5}{4x^2 - 5x} = \frac{4x - 5}{x(4x - 5)} = \frac{1}{x}.$$

Тогда график исходной функции — это гипербола с выколотой точкой.

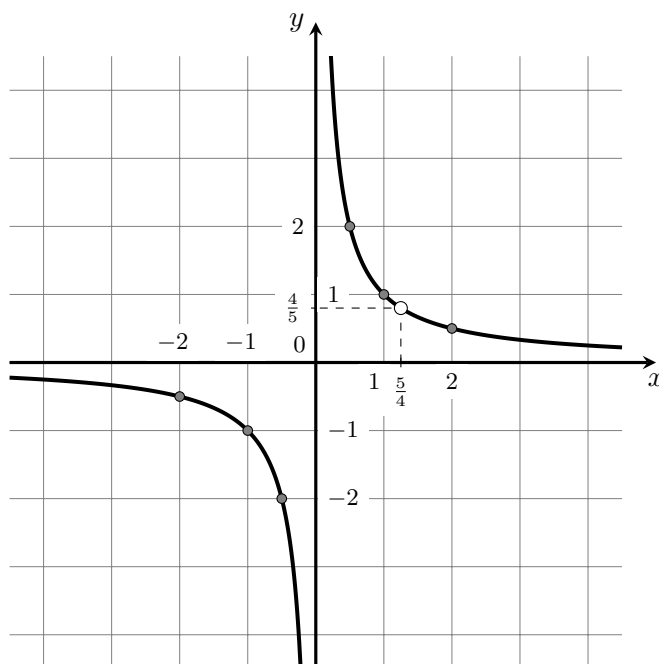
Построим таблицу значений для гиперболы:

x	-2	-1	-0,5	0,5	1	2
y	-0,5	-1	-2	2	1	0,5

Найдем координаты выколотой точки гиперболы:

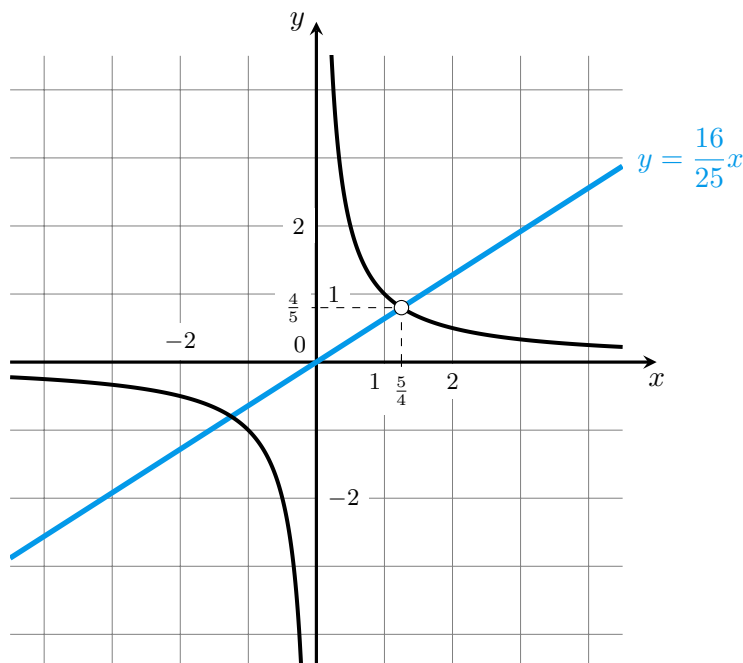
$$x = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}.$$

Отмечаем полученные точки на координатной плоскости и строим график функции.



$y = kx$ — пучок прямых, проходящих через точку $(0; 0)$.

Изобразим положения прямой $y = kx$, при которых она имеет с графиком функции ровно одну общую точку.



Нам подходит только одно положение прямой $y = kx$, при котором она проходит через выколотую точку $(\frac{5}{4}; \frac{4}{5})$. Найдем, чему равно k :

$$\frac{4}{5} = k \cdot \frac{5}{4}$$

$$k = \frac{16}{25}$$

№22.16 (C0BD4C)

Постройте график функции

$$y = |x^2 + 5x + 6|.$$

Какое наибольшее число общих точек может иметь график данной функции с прямой, параллельной оси абсцисс?

Ответ: 4

Решение. Графиком квадратичной функции $y = x^2 + 5x + 6$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем вершину параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-5}{2} = -2,5$$

$$y_0 = y(-2,5) = (-2,5)^2 + 5 \cdot (-2,5) + 6 = -0,25$$

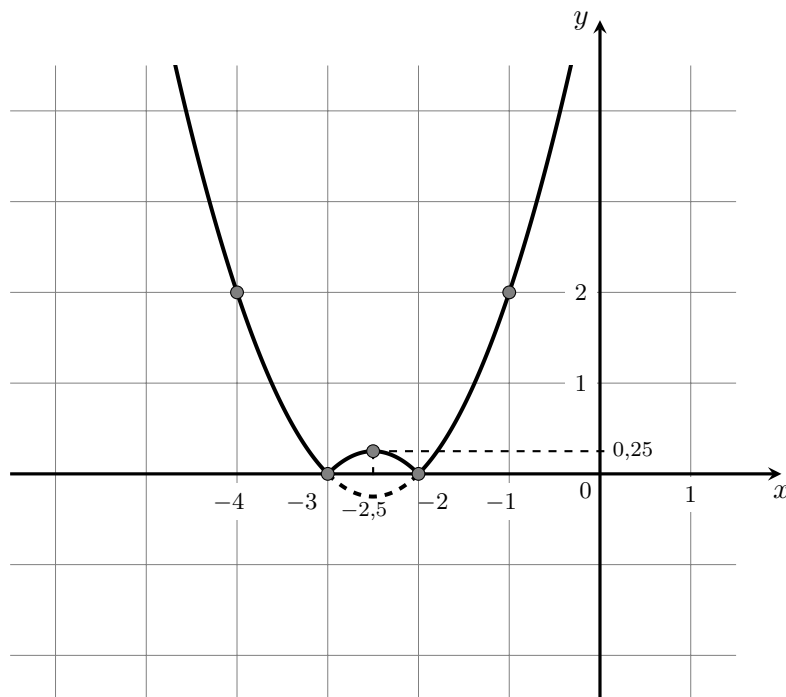
Следовательно, $(-2,5; -0,25)$ — вершина параболы. Составим таблицу:

x	-4	-3	-2,5	-2	-1
y	2	0	-0,25	0	2

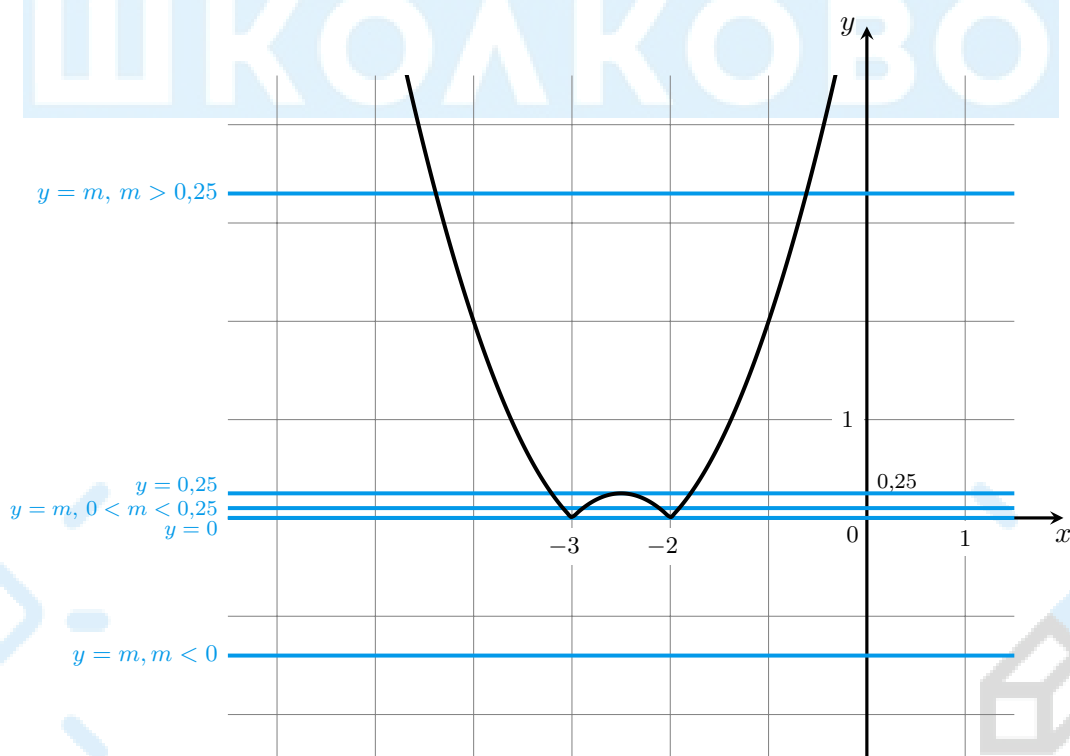
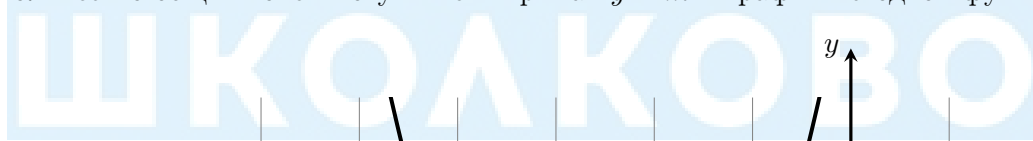
Построим сначала график $y = x^2 + 5x + 6$, затем все участки, находящиеся не ниже оси абсцисс, оставим без изменения, а участки, находящиеся ниже оси абсцисс, отобразим наверх симметрично относительно



оси абсцисс.



Прямые, параллельные оси абсцисс или совпадающие с ней, задаются уравнением $y = m$. Найдём, какое наибольшее количество общих точек могут иметь прямая $y = m$ и график исходной функции.



- Если $m < 0$, то прямая $y = m$ не имеет общих точек с графиком.
- Если $m = 0$, то прямая $y = m$ имеет ровно 2 общие точки с графиком.
- Если $0 < m < 0,25$, то прямая $y = m$ имеет ровно 4 общие точки с графиком.
- Если $m = 0,25$, то прямая $y = m$ имеет ровно 3 общие точки с графиком.



- Если $m > 0,25$, то прямая $y = m$ имеет ровно 2 общие точки с графиком.

Таким образом, наибольшее число общих точек, которое может иметь график данной функции с прямой, параллельной оси абсцисс, равно 4.



ШКОЛКОВО



№23. Геометрия

№23.14 (CFEE3D)

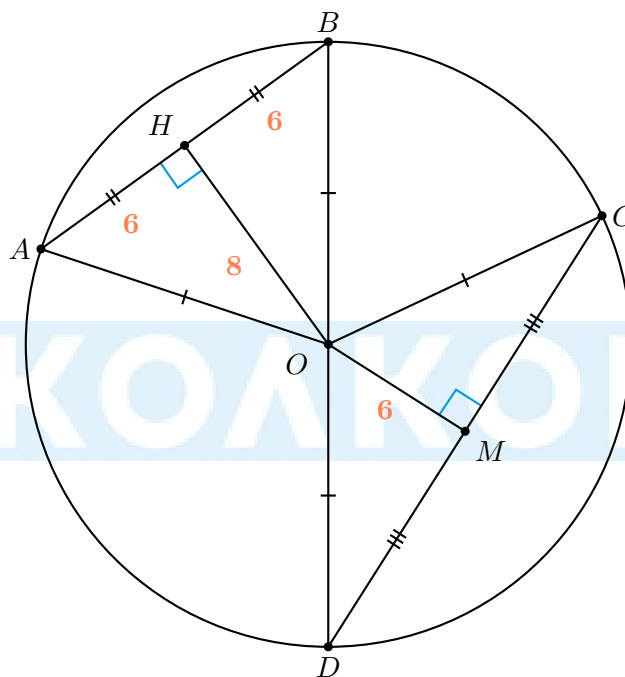
Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD , если $AB = 12$, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 8 и 6.

Ответ: 16

Решение. Пусть O — центр окружности. Проведём $OH \perp AB$ и $OM \perp CD$. По условию $OH = 8$ и $OM = 6$. Также проведём радиусы OA , OB , OC и OD .

Рассмотрим треугольник AOB . В нём $OA = OB$ как радиусы окружности, поэтому $\triangle AOB$ — равнобедренный. OH — его высота, а значит и медиана. Тогда

$$AH = HB = \frac{AB}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$



Рассмотрим прямоугольный треугольник AHO . По теореме Пифагора

$$\begin{aligned} OA^2 &= AH^2 + OH^2 = 6^2 + 8^2 = \\ &= 2^2 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 4^2 = 2^2 \cdot (3^2 + 4^2) = 2^2 \cdot 5^2 \end{aligned}$$

Тогда

$$OB = OC = OD = OA = 2 \cdot 5 = 10.$$

Рассмотрим треугольник COD . В нём $OC = OD$ как радиусы окружности, поэтому $\triangle COD$ — равнобедренный. OM — его высота, а значит и медиана. Тогда $CD = 2CM$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник COM . По теореме Пифагора

$$OC^2 = CM^2 + OM^2.$$

Значит,

$$\begin{aligned} CM^2 &= OC^2 - OM^2 = 10^2 - 6^2 = \\ &= 2^2 \cdot 5^2 - 2^2 \cdot 3^2 = 2^2 \cdot (5^2 - 3^2) = 2^2 \cdot 4^2 \end{aligned}$$

Тогда

$$CM = 2 \cdot 4 = 8.$$

Следовательно,

$$CD = 2CM = 2 \cdot 8 = 16.$$

№23.9 (ЕЕФЗС)

Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 19, а одна из диагоналей ромба равна 76. Найдите углы ромба.

Ответ: 60° ; 120° ; 60° ; 120°

Решение. Пусть дан ромб $ABCD$, а его диагонали $AC = 76$ и BD пересекаются в точке O . Опустим из точки O перпендикуляр OH на сторону AB . По условию $OH = 19$.

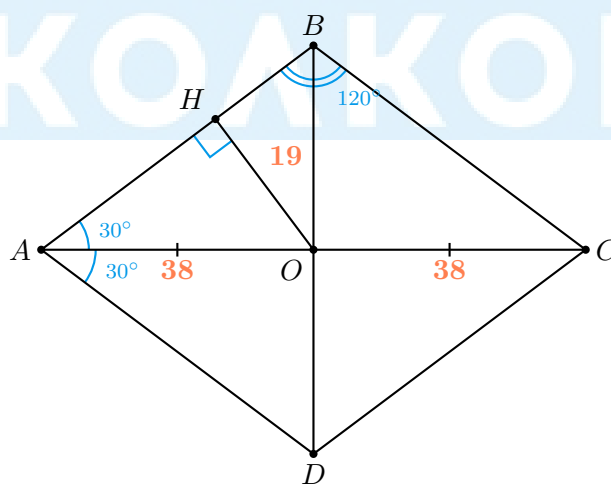
Ромб является параллелограммом, поэтому его диагонали точкой пересечения делятся пополам, следовательно,

$$AO = OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 76 = 38.$$

Треугольник AHO — прямоугольный, так как $OH \perp AB$. Заметим, что в нём

$$\frac{OH}{AO} = \frac{19}{38} = \frac{1}{2}.$$

Если в прямоугольном треугольнике катет равен половине гипотенузы, то он лежит против угла в 30° , следовательно, $\angle HAO = 30^\circ$.



Диагонали ромба являются биссектрисами его углов, поэтому AC — биссектриса $\angle BAD$, следовательно,

$$\angle BAD = 2\angle HAO = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ.$$

Противоположные углы ромба равны, поэтому $\angle BCD = \angle BAD = 60^\circ$.

$ABCD$ — ромб, следовательно, $AD \parallel BC$. Тогда сумма углов BAD и ABC равна 180° как сумма односторонних углов, образованных параллельными прямыми AD и BC и секущей AB , поэтому

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Противоположные углы ромба равны, поэтому

$$\angle ADC = \angle ABC = 120^\circ.$$



№23.7 (351F19)

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K . Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 8$, $CK = 13$.

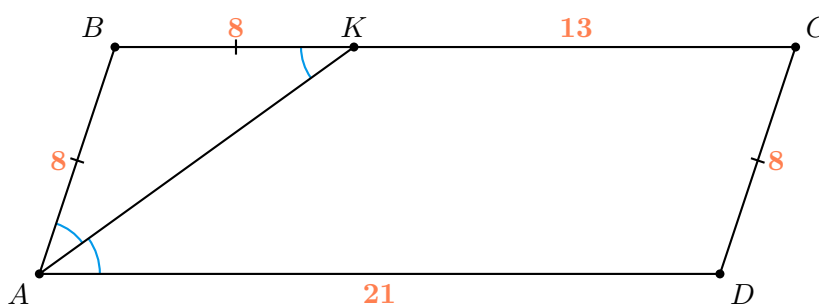
Ответ: 58

Решение. По условию $ABCD$ — параллелограмм, поэтому $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$. Тогда $\angle BKA = \angle KAD$ как накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми BC и AD и секущей AK . $\angle BAK = \angle KAD$, так как AK — биссектриса угла BAD . Тогда

$$\angle BAK = \angle KAD = \angle BKA.$$

Значит, треугольник ABK — равнобедренный, поэтому

$$AB = BK = 8.$$



В параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому $CD = AB = 8$ и

$$AD = BC = BK + KC = 8 + 13 = 21.$$

Найдём периметр параллелограмма:

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= AB + BC + CD + DA = \\ &= 8 + 21 + 8 + 21 = 29 + 29 = 58. \end{aligned}$$



№23.1 (FDCAEE)

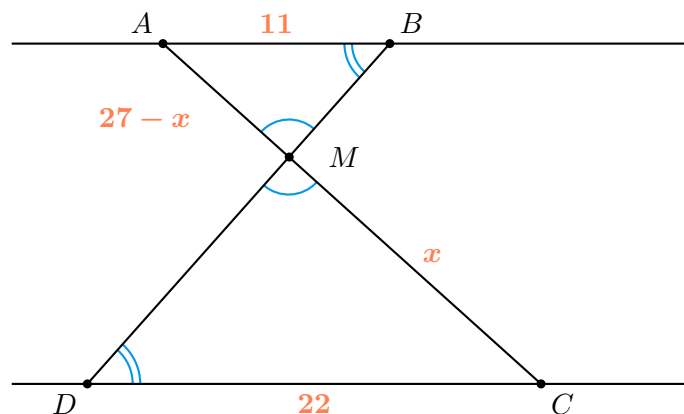
Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M . Найдите MC , если $AB = 11$, $DC = 22$, $AC = 27$.

Ответ: 18

Решение. Рассмотрим треугольники ABM и CDM . В них $\angle AMB = \angle CMD$ как вертикальные углы, а $\angle ABD = \angle CDB$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и DC и секущей BD .

Тогда треугольники ABM и CDM подобны по двум углам. Запишем отношение подобия:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AM}{CM} = \frac{BM}{DM}.$$



Пусть $CM = x$. Так как $AC = 27$ по условию, то

$$AM = AC - CM = 27 - x.$$

Тогда из отношения $\frac{AB}{CD} = \frac{AM}{CM}$ получаем уравнение:

$$\frac{11}{22} = \frac{27 - x}{x}$$

$$11x = 22 \cdot (27 - x)$$

$$x = 2 \cdot (27 - x)$$

$$x = 54 - 2x$$

$$3x = 54$$

$$x = 18$$

Значит, $CM = 18$.



№24. Геометрия на доказательство

№24.4 (FA5D37)

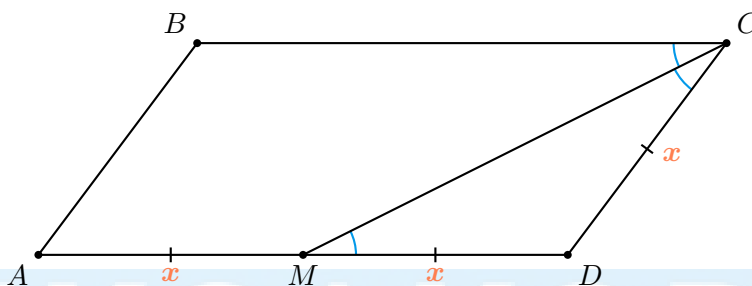
Сторона AD параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны CD . Точка M — середина стороны AD . Докажите, что CM — биссектриса угла BCD .

Ответ:

Решение. Пусть $CD = x$. Тогда $AD = 2CD = 2x$, так как AD по условию в 2 раза больше, чем CD . Так как по условию M — середина AD , то $AM = MD = x$. Значит,

$$MD = AM = \frac{1}{2}AD = CD = x.$$

Рассмотрим треугольник DCM . В нем стороны DC и DM равны x , следовательно, треугольник DCM равнобедренный с основанием CM . В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, поэтому $\angle DCM = \angle DMC$.



Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, поэтому его противоположные стороны параллельны. В частности, $BC \parallel AD$. Тогда $\angle DMC = \angle MCB$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей CM .

Таким образом,

$$\angle DCM = \angle DMC = \angle BCM.$$

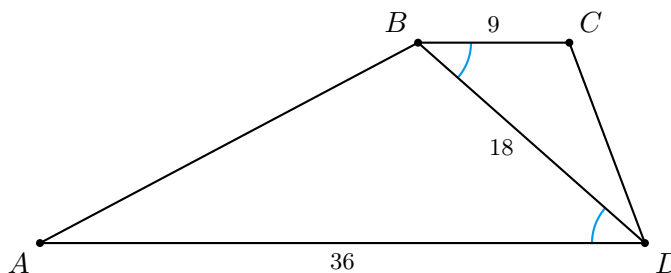
Значит, CM — биссектриса угла BCD .

№24.1 (F149FA)

Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 9 и 36, $BD = 18$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Ответ:

Решение. По условию BC и AD — основания трапеции $ABCD$. Тогда $BC \parallel AD$.



Рассмотрим треугольники CBD и BDA . В них:

1. $\angle CBD = \angle BDA$ как внутренние накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми BC и AD и секущей BD .

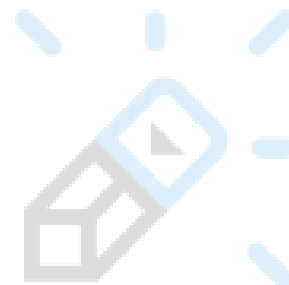


$$2. \frac{BC}{BD} = \frac{9}{18} = \frac{18}{36} = \frac{BD}{AD}.$$

Следовательно, треугольники CBD и BDA подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.



ШКОЛКОВО



№25. Сложная геометрия

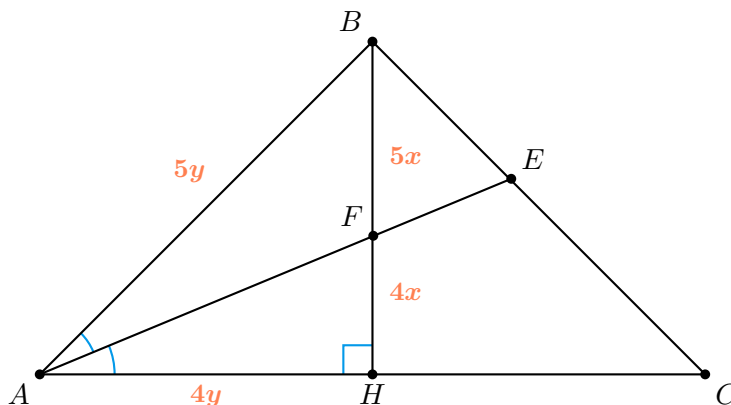
№25.13 (022418)

В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B , в отношении $5 : 4$, считая от точки B . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $BC = 12$.

Ответ: 10

Решение. Пусть AE — биссектриса $\angle BAC$.

Пусть BH — высота $\triangle ABC$. Пусть $AE \cap BH = F$.



AF — биссектриса в треугольнике ABH . По свойству биссектрисы:

$$\frac{AH}{AB} = \frac{HF}{FB} = \frac{4}{5}$$

Пусть $AH = 4y$, тогда $AB = \frac{5 \cdot AH}{4} = \frac{5 \cdot 4y}{4} = 5y$.

BH — высота в треугольнике ABC , следовательно, треугольник ABH — прямоугольный. Значит

$$\cos \angle A = \frac{AH}{AB} = \frac{4y}{5y} = \frac{4}{5}$$

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sin \angle A &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle A} = \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Заметим, что $\sin \angle A = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A}$, а не $\sin \angle A = -\sqrt{1 - \cos^2 \angle A}$, так как $0 < \angle A < 180^\circ$, следовательно, $\sin \angle A > 0$.

По теореме синусов в $\triangle ABC$:

$$R = \frac{BC}{2 \sin \angle A} = \frac{12}{2 \cdot \frac{3}{5}} = 10.$$

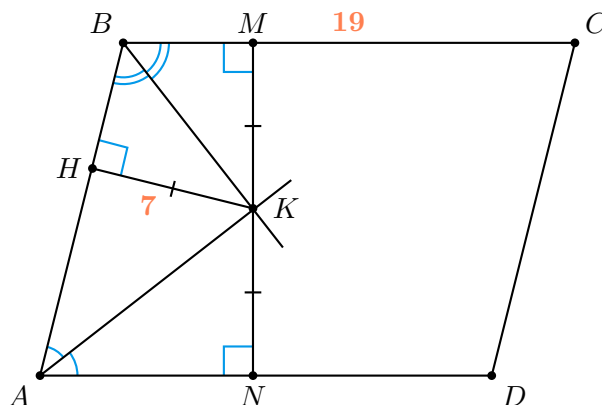
№25.2 (97С87В)

Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K . Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 19$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 7.

Ответ: 266

Решение. Опустим из точки K перпендикуляр KH на сторону AB . По условию расстояние от точки K до стороны AB равно 7, то есть $KH = 7$.

Проведем высоту параллелограмма MN к стороне BC , проходящую через точку K .



Рассмотрим треугольники $\triangle AHK$ и $\triangle ANK$. В них $\angle AHK = 90^\circ = \angle ANK$, так как $KH \perp AB$ и $KN \perp AD$, следовательно, треугольники $\triangle AHK$ и $\triangle ANK$ — прямоугольные.

В прямоугольных треугольниках $\triangle AHK$ и $\triangle ANK$ равны углы $\angle HAK$ и $\angle NAK$, так как AK — биссектриса угла $\angle HAN$, гипотенуза AK — общая. Поэтому прямоугольные треугольники $\triangle AHK$ и $\triangle ANK$ равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $NK = HK = 7$.

Рассмотрим треугольники $\triangle HBK$ и $\triangle MBK$. В них $\angle HBK = 90^\circ = \angle MBK$, так как $KH \perp AB$ и $KM \perp BC$, следовательно, треугольники $\triangle HBK$ и $\triangle MBK$ — прямоугольные.

В прямоугольных треугольниках $\triangle HBK$ и $\triangle MBK$ равны углы $\angle HBK$ и $\angle MBK$, так как BK — биссектриса угла $\angle HBM$, гипотенуза BK — общая. Поэтому прямоугольные треугольники $\triangle HBK$ и $\triangle MBK$ равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $MK = HK = 7$.

Значит,

$$MN = KM + KN = 7 + 7 = 14.$$

Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, проведённую к нему, поэтому

$$S_{ABCD} = BC \cdot MN = 19 \cdot 14 = 266.$$

№25.9 (377F40)

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 16$, $MD = 4$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .

Ответ: 15

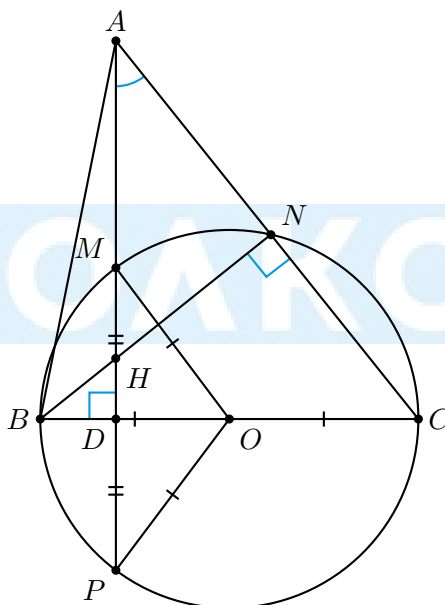
Решение. Построим полуокружность до окружности. Пусть O — центр этой окружности, а N — её точка пересечения со стороной AC . Проведём отрезок BN . Угол $\angle BNC$ — вписанный и опирается на диаметр BC . Следовательно, $\angle BNC = 90^\circ$, то есть BN — высота.

В треугольнике ABC отрезки BN и AD — высоты. Тогда по условию они пересекаются в точке H . Рассмотрим треугольники AHN и ACD . В них $\angle ANH = 90^\circ = \angle ADC$, $\angle A$ — общий. Поэтому треугольники AHN и ACD подобны по двум углам. Запишем отношение подобия:

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AN}{AD}.$$

Следовательно,

$$AH \cdot AD = AN \cdot AC.$$



Продлим AD до пересечения с окружностью в точке P . Проведём OM и OP . Тогда $OM = OP$ как радиусы, следовательно, треугольник MOP — равнобедренный. Значит, в равнобедренном треугольнике MOP высота OD , проведённая к основанию MP , является медианой, поэтому

$$MD = PD = 4.$$

Найдём AM :

$$AM = AD - MD = 16 - 4 = 12.$$

Найдём AP :

$$AP = AD + PD = 16 + 4 = 20.$$

По теореме о двух секущих AC и AP :

$$AN \cdot AC = AM \cdot AP = 12 \cdot 20.$$



По доказанному ранее

$$AH \cdot AD = AN \cdot AC = 12 \cdot 20.$$

Поэтому

$$AH = \frac{12 \cdot 20}{AD} = \frac{12 \cdot 20}{16} = 15.$$



ШКОЛКОВО

