Максимальное количество баллов за олимпиаду — 8

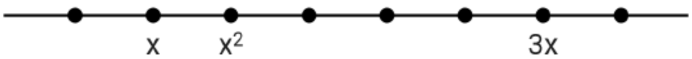
Задание 1. Вариант 1. На прямой отмечены точки, расстояния между любыми двумя соседними отмеченными точками равны. Известно, что три из этих точек имеют координаты x, x^2 и $3x$, как показано на рисунке.

Чему равно расстояние между двумя соседними отмеченными точками?

Задание 1. Вариант 2. На прямой отмечены точки, расстояния между любыми двумя соседними отмеченными точками равны. Известно, что три из этих точек имеют координаты x, x^2 и $4x$, как показано на рисунке.

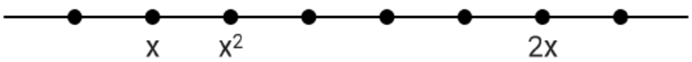
Чему равно расстояние между двумя соседними отмеченными точками?

Задание 1. Вариант 3. На прямой отмечены точки, расстояния между любыми двумя соседними отмеченными точками равны. Известно, что три из этих точек имеют координаты x, x^2 и $3x$, как показано на рисунке.



Чему равно расстояние между двумя соседними отмеченными точками?

Задание 1. Вариант 4. На прямой отмечены точки, расстояния между любыми двумя соседними отмеченными точками равны. Известно, что три из этих точек имеют координаты x, x^2 и $2x$, как показано на рисунке.



Чему равно расстояние между двумя соседними отмеченными точками?

Задание 2. Вариант 1. Три ёжика переносят на себе заготовки на зиму. Первый ёжик может нести максимум 50 г, второй — максимум 40 г, третий — максимум 80 г. Вчера ёжики несли на себе суммарно 150 г. А сегодня первый ёжик несёт столько же, сколько вчера, второй — в два раза больше, чем вчера, третий — в 4 раза меньше, чем вчера. Какова суммарная масса груза, который несут на себе сегодня ёжики? Ответ выразите в граммах.

Задание 2. Вариант 2. Три ёжика переносят на себе заготовки на зиму. Первый ёжик может нести максимум 40 г, второй — максимум 50 г, третий — максимум 120 г. Вчера ёжики несли на себе суммарно 185 г. А сегодня первый ёжик несёт столько же, сколько вчера, второй — в два раза больше, чем вчера, третий — в 3 раза меньше, чем вчера. Какова суммарная масса груза, который несут на себе сегодня ёжики? Ответ выразите в граммах.

Задание 2. Вариант 3. Три ёжика переносят на себе заготовки на зиму. Первый ёжик может нести максимум 60 г, второй — максимум 100 г, третий — максимум 90 г. Вчера ёжики несли на себе суммарно 200 г. А сегодня первый ёжик несёт столько же, сколько вчера, второй — в два раза больше, чем вчера, третий — в 3 раза меньше, чем вчера. Какова суммарная масса груза, который несут на себе сегодня ёжики? Ответ выразите в граммах.

Задание 2. Вариант 4. Три ёжика переносят на себе заготовки на зиму. Первый ёжик может нести максимум 50 г, второй — максимум 60 г, третий — максимум 90 г. Вчера ёжики несли на себе суммарно 160 г. А сегодня первый ёжик несёт столько же, сколько вчера, второй — в три раза больше, чем вчера, третий — в 3 раза меньше, чем вчера. Какова суммарная масса груза, который несут на себе сегодня ёжики? Ответ выразите в граммах.

Задание 3. Вариант 1. Команды «Зенит», «Динамо» и «Локомотив» играли в волейбол. В каждом матче участвовали две из этих команд, в волейболе не бывает ничьих. Команда «Зенит» выиграла 10 матчей и проиграла 7 матчей. Команда «Динамо» выиграла 8 матчей и проиграла 17 матчей. Команда «Локомотив» проиграла 9 матчей. Сколько матчей выиграла команда «Локомотив»?

Задание 3. Вариант 2. Команды «Зенит», «Динамо» и «Локомотив» играли в волейбол. В каждом матче участвовали две из этих команд, в волейболе не бывает ничьих. Команда «Зенит» выиграла 10 матчей и проиграла 17 матчей. Команда «Динамо» выиграла 19 матчей и проиграла 4 матча. Команда «Локомотив» выиграла 3 матча. Сколько матчей проиграла команда «Локомотив»?

Задание 3. Вариант 3. Команды «Зенит», «Динамо» и «Локомотив» играли в волейбол. В каждом матче участвовали две из этих команд, в волейболе не бывает ничьих. Команда «Зенит» выиграла 9 матчей и проиграла 20 матчей. Команда «Динамо» выиграла 18 матчей и проиграла 6 матчей. Команда «Локомотив» выиграла 7 матчей. Сколько матчей проиграла команда «Локомотив»?

Задание 3. Вариант 4. Команды «Зенит», «Динамо» и «Локомотив» играли в волейбол. В каждом матче участвовали две из этих команд, в волейболе не бывает ничьих. Команда «Зенит» выиграла 2 матчей и проиграла 10 матчей. Команда «Динамо» выиграла 13 матчей и проиграла 6 матчей. Команда «Локомотив» проиграла 9 матчей. Сколько матчей выиграла команда «Локомотив»?

Задание 4. Вариант 1.

Четыре действительных числа a, b, c и d удовлетворяют условиям

$$a < b < c < d \text{ и } \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{d} < \frac{1}{c}.$$

Какие из следующих выражений обязательно положительны?

Ответ:

- $a + b + c + d$
- $-a - b + c + d$
- $-a - b - c + d$
- $a - b + c - d$
- $-a + b + c - d$

Задание 4. Вариант 2.

Четыре действительных числа a, b, c и d удовлетворяют условиям

$$a < b < c < d \text{ и } \frac{1}{a} < \frac{1}{d} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b}.$$

Какие из следующих выражений обязательно положительны?

Ответ:

- $a - b + c + d$
- $-a + b + c + d$
- $-a + b - c + d$
- $a + b + c - d$
- $-a - b + c - d$

Задание 4. Вариант 3.

Четыре действительных числа a, b, c и d удовлетворяют условиям

$$a < b < c < d \text{ и } \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{d}.$$

Какие из следующих выражений обязательно положительны?

Ответ:

- $-a + b - c + d$
- $-a - b - c + d$
- $-a - b + c + d$
- $a - b - c - d$
- $-a + b - c - d$

Задание 4. Вариант 4.

Четыре действительных числа a, b, c и d удовлетворяют условиям

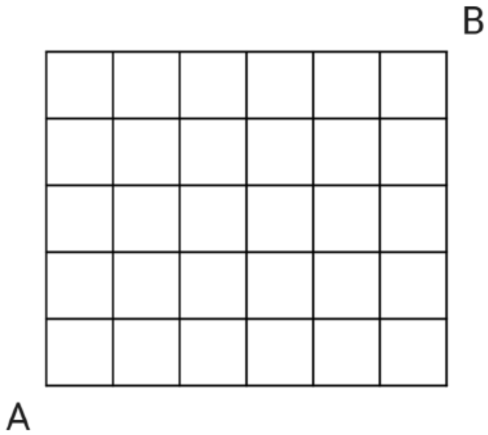
$$a < b < c < d \text{ и } \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{d} < \frac{1}{c}.$$

Какие из следующих выражений обязательно положительны?

Ответ:

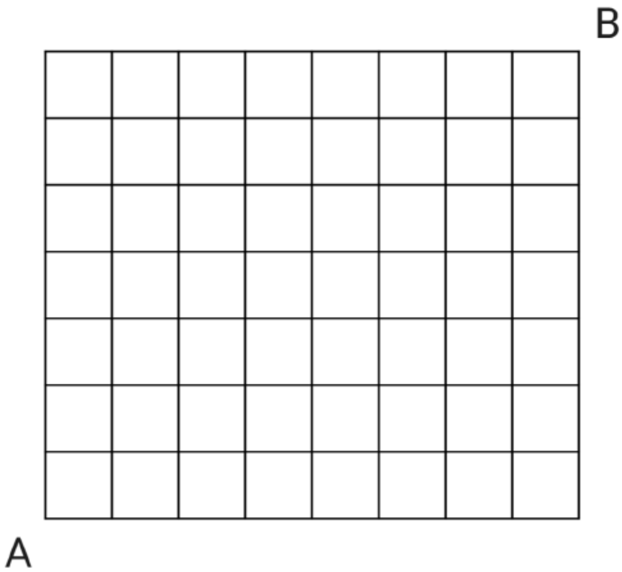
- $-a + b - c + d$
- $-a - b + c + d$
- $-a + b + c + d$
- $a + b + c - d$
- $-a + b + c - d$

Задание 5. Вариант 1. Две черепахи движутся по линиям сетки прямоугольника 5×6 со стороной 1, стартуя одновременно: одна из точки A, другая — из B.



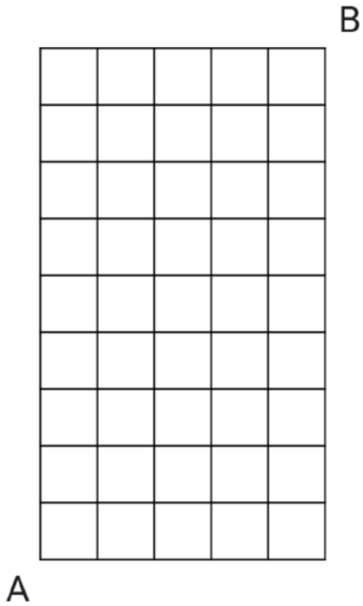
Черепаха, стартующая из A, всегда движется вправо или вверх, а черепаха, стартующая из B, всегда движется влево или вниз. Скорость черепахи, стартующей из A, составляет две трети скорости другой черепахи. Сколько существует единичных отрезков сетки, на которых черепахи могут встретиться?

Задание 5. Вариант 2. Две черепахи движутся по линиям сетки прямоугольника 7×8 со стороной 1, стартуя одновременно: одна из точки A, другая — из B.



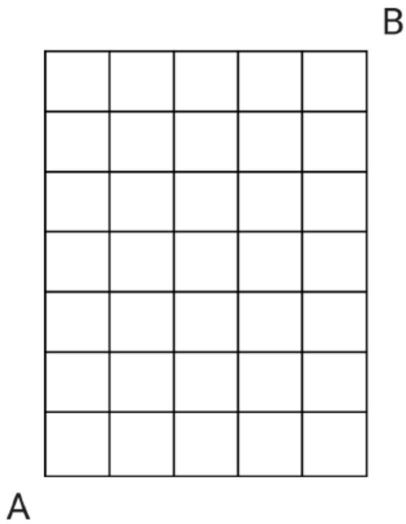
Черепаха, стартующая из A, всегда движется вправо или вверх, а черепаха, стартующая из B, всегда движется влево или вниз. Скорость черепахи, стартующей из A, составляет три четверти скорости другой черепахи. Сколько существует единичных отрезков сетки, на которых черепахи могут встретиться?

Задание 5. Вариант 3. Две черепахи движутся по линиям сетки прямоугольника 9×5 со стороной 1, стартуя одновременно: одна из точки A, другая — из B.



Черепаха, стартующая из A, всегда движется вправо или вверх, а черепаха, стартующая из B, всегда движется влево или вниз. Скорость черепахи, стартующей из A, в полтора раза больше скорости другой черепахи. Сколько существует единичных отрезков сетки, на которых черепахи могут встретиться?

Задание 5. Вариант 4. Две черепахи движутся по линиям сетки прямоугольника 7×5 со стороной 1, стартуя одновременно: одна из точки A, другая —- из B.



Черепаха, стартующая из A, всегда движется вправо или вверх, а черепаха, стартующая из B, всегда движется влево или вниз. Скорость черепахи, стартующей из A, составляет две пятых скорости другой черепахи. Сколько существует единичных отрезков сетки, на которых черепахи могут встретиться?

Задание 6. Вариант 1. Петя написал на доске 7 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, и заметил, что:

- сумма любых трёх из них делится на 3;
- сумма любых четырёх из них делится на 4;
- сумма любых пяти из них делится на 5.

Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из написанных на доске чисел.

Задание 6. Вариант 2. Петя написал на доске 11 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, и заметил, что:

- сумма любых трёх из них делится на 3;
- сумма любых четырёх из них делится на 4;
- сумма любых семи из них делится на 7.

Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из написанных на доске чисел.

Задание 6. Вариант 3. Петя написал на доске 11 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, и заметил, что:

- сумма любых трёх из них делится на 3;
- сумма любых пяти из них делится на 5;
- сумма любых восьми из них делится на 8.

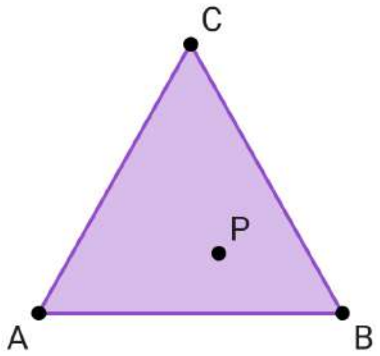
Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из написанных на доске чисел.

Задание 6. Вариант 4. Петя написал на доске 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, и заметил, что:

- сумма любых пяти из них делится на 5;
- сумма любых шести из них делится на 6;
- сумма любых семи из них делится на 7.

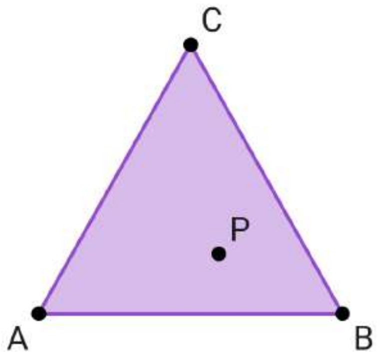
Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из написанных на доске чисел.

Задание 7. Вариант 1. Точка P внутри равностороннего треугольника со стороной $8\sqrt{3}$ такова, что $S_{ABP} + S_{ACP} = 3S_{BCP}$.



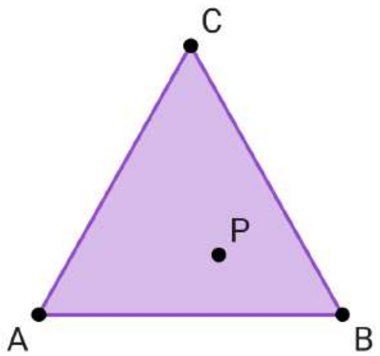
Какую наименьшую длину может иметь отрезок AP? Через S_{XYZ} обозначается площадь треугольника XYZ.

Задание 7. Вариант 2. Точка P внутри равностороннего треугольника со стороной $14\sqrt{3}$ такова, что $S_{ABP} + S_{ACP} = 6S_{BCP}$.



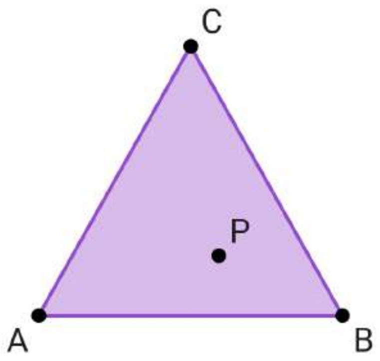
Какую наименьшую длину может иметь отрезок AP? Через S_{XYZ} обозначается площадь треугольника XYZ.

Задание 7. Вариант 3. Точка P внутри равностороннего треугольника со стороной $10\sqrt{3}$ такова, что $S_{ABP} + S_{ACP} = 4S_{BCP}$.



Какую наименьшую длину может иметь отрезок AP? Через S_{XYZ} обозначается площадь треугольника XYZ.

Задание 7. Вариант 4. Точка P внутри равностороннего треугольника со стороной $12\sqrt{3}$ такова, что $S_{ABP} + S_{ACP} = 5S_{BCP}$.



Какую наименьшую длину может иметь отрезок AP? Через S_{XYZ} обозначается площадь треугольника XYZ.

Задание 8. Вариант 1. Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 таковы, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ и $\frac{1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{2}{x_1 + x_3 + x_4} + \frac{3}{x_1 + x_2 + x_4} + \frac{4}{x_1 + x_2 + x_3} = 25$.

Чему равно значение выражения $\frac{x_1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{2x_2}{x_1 + x_3 + x_4} + \frac{3x_3}{x_1 + x_2 + x_4} + \frac{4x_4}{x_1 + x_2 + x_3}$?

Задание 8. Вариант 2. Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 таковы, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ и $\frac{1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{2}{x_1 + x_3 + x_4} + \frac{3}{x_1 + x_2 + x_4} + \frac{4}{x_1 + x_2 + x_3} = 24$.

Чему равно значение выражения $\frac{x_1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{2x_2}{x_1 + x_3 + x_4} + \frac{3x_3}{x_1 + x_2 + x_4} + \frac{4x_4}{x_1 + x_2 + x_3}$?

Задание 8. Вариант 3. Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 таковы, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ и $\frac{1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{2}{x_1 + x_3 + x_4} + \frac{3}{x_1 + x_2 + x_4} + \frac{4}{x_1 + x_2 + x_3} = 15$.

Чему равно значение выражения $\frac{x_1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{2x_2}{x_1 + x_3 + x_4} + \frac{3x_3}{x_1 + x_2 + x_4} + \frac{4x_4}{x_1 + x_2 + x_3}$?

Задание 8. Вариант 4. Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 таковы, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ и $\frac{1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{2}{x_1 + x_3 + x_4} + \frac{3}{x_1 + x_2 + x_4} + \frac{4}{x_1 + x_2 + x_3} = 13$.

Чему равно значение выражения $\frac{x_1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{2x_2}{x_1 + x_3 + x_4} + \frac{3x_3}{x_1 + x_2 + x_4} + \frac{4x_4}{x_1 + x_2 + x_3}$?

Максимальное количество баллов за олимпиаду — 8

Задание 1. Вариант 1. На прямой отмечены точки, расстояния между любыми двумя соседними отмеченными точками равны. Известно, что три из этих точек имеют координаты x, x^2 и $3x$, как показано на рисунке.

Чему равно расстояние между двумя соседними отмеченными точками?

Ответ: $\frac{3}{4}$

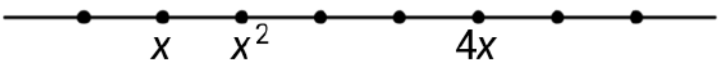
Решение.

Расстояние между $3x$ и x^2, равное $3x - x^2$, в три раза больше расстояния между x^2 и x, которое равно $x^2 - x$. Отсюда получаем уравнение

$$3(x^2 - x) = 3x - x^2.$$

Его корни — $x = 0$ и $x = \frac{3}{2}$. Случай $x = 0$ невозможен, так как тогда все три точки x, x^2 и $3x$ совпали. Во втором случае расстояние между отмеченными точками равно $x^2 - x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

Задание 1. Вариант 2. На прямой отмечены точки, расстояния между любыми двумя соседними отмеченными точками равны. Известно, что три из этих точек имеют координаты x, x^2 и $4x$, как показано на рисунке.

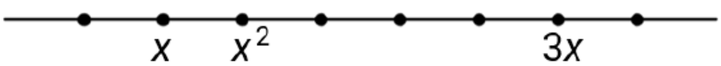


Чему равно расстояние между двумя соседними отмеченными точками?

Ответ: $\frac{21}{16}$

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 1. Вариант 3. На прямой отмечены точки, расстояния между любыми двумя соседними отмеченными точками равны. Известно, что три из этих точек имеют координаты x, x^2 и $3x$, как показано на рисунке.



Чему равно расстояние между двумя соседними отмеченными точками?

Ответ: $\frac{14}{25}$

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 1. Вариант 4. На прямой отмечены точки, расстояния между любыми двумя соседними отмеченными точками равны. Известно, что три из этих точек имеют координаты x, x^2 и $2x$, как показано на рисунке.

Чему равно расстояние между двумя соседними отмеченными точками?

Ответ: $\frac{6}{25}$

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 2. Вариант 1. Три ёжика переносят на себе заготовки на зиму. Первый ёжик может нести максимум 50 г, второй — максимум 40 г, третий — максимум 80 г. Вчера ёжики несли на себе суммарно 150 г. А сегодня первый ёжик несёт столько же, сколько вчера, второй — в два раза больше, чем вчера, третий — в 4 раза меньше, чем вчера. Какова суммарная масса груза, который несут на себе сегодня ёжики? Ответ выразите в граммах.

Ответ: 110

Решение.

Вчера второй ёжик нёс на себе не более 20 г, первый — не более 50 г, третий — не более 80 г, то есть всего они переносили не более 150 г. Но по условию они переносили ровно 150 г, что возможно только в случае, когда первый нёс на себе 50 г, второй — 20 г, третий — 80 г. Поэтому сегодня они переносят $50 + 2 \cdot 20 + \frac{80}{4} = 110$ г.

Задание 2. Вариант 2. Три ёжика переносят на себе заготовки на зиму. Первый ёжик может нести максимум 40 г, второй — максимум 50 г, третий — максимум 120 г. Вчера ёжики несли на себе суммарно 185 г. А сегодня первый ёжик несёт столько же, сколько вчера, второй — в два раза больше, чем вчера, третий — в 3 раза меньше, чем вчера. Какова суммарная масса груза, который несут на себе сегодня ёжики? Ответ выразите в граммах.

Ответ: 130

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 2. Вариант 3. Три ёжика переносят на себе заготовки на зиму. Первый ёжик может нести максимум 60 г, второй — максимум 100 г, третий — максимум 90 г. Вчера ёжики несли на себе суммарно 200 г. А сегодня первый ёжик несёт столько же, сколько вчера, второй — в два раза больше, чем вчера, третий — в 3 раза меньше, чем вчера. Какова суммарная масса груза, который несут на себе сегодня ёжики? Ответ выразите в граммах.

Ответ: 190

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 2. Вариант 4. Три ёжика переносят на себе заготовки на зиму. Первый ёжик может нести максимум 50 г, второй — максимум 60 г, третий — максимум 90 г. Вчера ёжики несли на себе суммарно 160 г. А сегодня первый ёжик несёт столько же, сколько вчера, второй — в три раза больше, чем вчера, третий — в 3 раза меньше, чем вчера. Какова суммарная масса груза, который несут на себе сегодня ёжики? Ответ выразите в граммах.

Ответ: 140

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 1. Команды «Зенит», «Динамо» и «Локомотив» играли в волейбол. В каждом матче участвовали две из этих команд, в волейболе не бывает ничьих. Команда «Зенит» выиграла 10 матчей и проиграла 7 матчей. Команда «Динамо» выиграла 8 матчей и проиграла 17 матчей. Команда «Локомотив» проиграла 9 матчей. Сколько матчей выиграла команда «Локомотив»?

Ответ: 15

Решение.

Заметим, что суммарное количество выигранных матчей равно суммарному количеству проигранных матчей, так как каждый матч по одному разу засчитывается и в выигранные, и в проигранные. Если обозначить за x количество выигранных «Локомотивом» матчей, то получаем уравнение

$$10 + 8 + x = 7 + 17 + 9,$$

откуда $x = 15$.

Задание 3. Вариант 2. Команды «Зенит», «Динамо» и «Локомотив» играли в волейбол. В каждом матче участвовали две из этих команд, в волейболе не бывает ничьих. Команда «Зенит» выиграла 10 матчей и проиграла 17 матчей. Команда «Динамо» выиграла 19 матчей и проиграла 4 матча. Команда «Локомотив» выиграла 3 матча. Сколько матчей проиграла команда «Локомотив»?

Ответ: 11

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 3. Команды «Зенит», «Динамо» и «Локомотив» играли в волейбол. В каждом матче участвовали две из этих команд, в волейболе не бывает ничьих. Команда «Зенит» выиграла 9 матчей и проиграла 20 матчей. Команда «Динамо» выиграла 18 матчей и проиграла 6 матчей. Команда «Локомотив» выиграла 7 матчей. Сколько матчей проиграла команда «Локомотив»?

Ответ: 8

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 4. Команды «Зенит», «Динамо» и «Локомотив» играли в волейбол. В каждом матче участвовали две из этих команд, в волейболе не бывает ничьих. Команда «Зенит» выиграла 2 матчей и проиграла 10 матчей. Команда «Динамо» выиграла 13 матчей и проиграла 6 матчей. Команда «Локомотив» проиграла 9 матчей. Сколько матчей выиграла команда «Локомотив»?

Ответ: 10

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 1.

Четыре действительных числа a, b, c и d удовлетворяют условиям

$$a < b < c < d \text{ и } \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{d} < \frac{1}{c}.$$

Какие из следующих выражений обязательно положительны?

Ответ:

- $a + b + c + d$
- ✓ $-a - b + c + d$
- ✓ $-a - b - c + d$
- $a - b + c - d$
- $-a + b + c - d$

Решение.

По условию $b < c$ и $\frac{1}{b} < \frac{1}{c}$. Если бы b и c были одного знака (оба положительные или оба отрицательные), то из $b < c$ следовало бы, что $\frac{1}{b} > \frac{1}{c}$. Значит, b и c — разных знаков, т.е.

$$a < b < 0 < c < d.$$

Посмотрим теперь на каждый вариант:

(a) можно подобрать контрпример: $a = -101, b = -100, c = 1, d = 2$;

(b) здесь каждое слагаемое $(-a)$, $(-b)$, c и d —положительно, поэтому сумма точно положительна;

(c) здесь каждое слагаемое $(-a)$, $(-b)$, и $d-c$ (последнее положительно, т.к. $c < d$) — положительно, поэтому сумма точно положительна;

(d) можно подобрать контрпример: $a = -2, b = -1, c = 1, d = 2$ (вообще это выражение точно отрицательно: $a-b < 0$ и $c - d < 0$);

(e) можно подобрать контрпример: $a = -2, b = -1, c = 1, d = 100$.

Задание 4. Вариант 2.

Четыре действительных числа a, b, c и d удовлетворяют условиям

$$a < b < c < d \text{ и } \frac{1}{a} < \frac{1}{d} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b}.$$

Какие из следующих выражений обязательно положительны?

Ответ:

- $a - b + c + d$
- ✓ $-a + b + c + d$
- ✓ $-a + b - c + d$
- $a + b + c - d$
- $-a - b + c - d$

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 3.

Четыре действительных числа a, b, c и d удовлетворяют условиям

$$a < b < c < d \text{ и } \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{d}.$$

Какие из следующих выражений обязательно положительны?

Ответ:

- ✓ $-a + b - c + d$
- ✓ $-a - b - c + d$
- ✓ $-a - b + c + d$
- $a - b - c - d$
- $-a + b - c - d$

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 4.

Четыре действительных числа a, b, c и d удовлетворяют условиям

$$a < b < c < d \text{ и } \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < \frac{1}{d} < \frac{1}{c}.$$

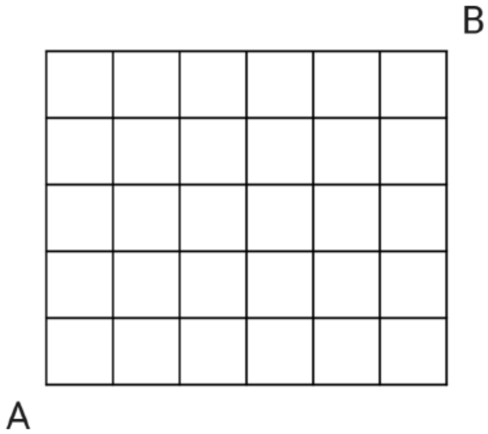
Какие из следующих выражений обязательно положительны?

Ответ:

✓ $-a + b - c + d$
✓ $-a - b + c + d$
✓ $-a + b + c + d$
- $a + b + c - d$
- $-a + b + c - d$

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 5. Вариант 1. Две черепахи движутся по линиям сетки прямоугольника 5×6 со стороной 1, стартуя одновременно: одна из точки A, другая — из B.



Черепаха, стартующая из A, всегда движется вправо или вверх, а черепаха, стартующая из B, всегда движется влево или вниз. Скорость черепахи, стартующей из A, составляет две трети скорости другой черепахи. Сколько существует единичных отрезков сетки, на которых черепахи могут встретиться?

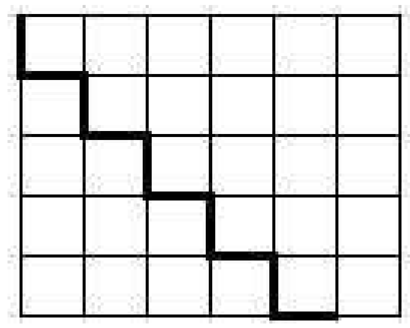
Ответ: 10

Решение.

Посмотрим на точку встречи. Объединённые пути черепашек образуют путь из точки A в точку B, который всегда идёт вправо или вверх. Поэтому суммарно черепашки пройдут путь из 11 отрезков: 6 вправо и 5 вверх.

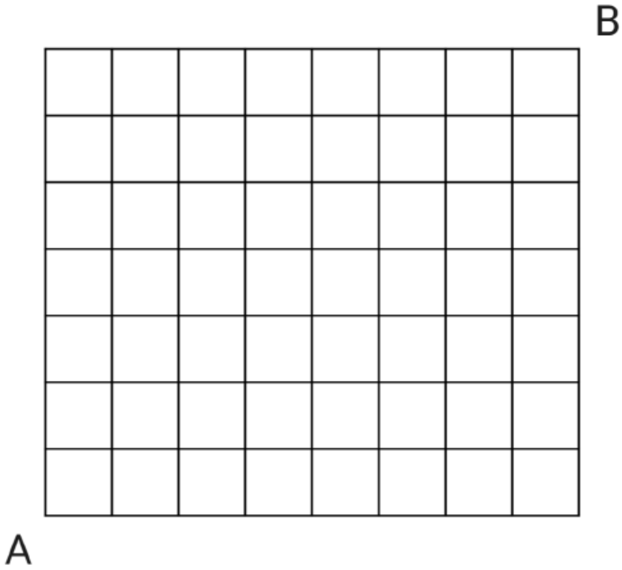
Пусть скорость черепашки A равна $2x$ отрезков в минуту, тогда скорость черепашки B равна $3x$. Значит, скорость сближения черепашек равна $5x$, т.е. черепашки встретятся через $\frac{11}{5x}$ минуты. Значит, до встречи черепашка A проползёт $\frac{11}{5x} \cdot 2x = \frac{22}{5}$ длины отрезков.

Посмотрим, на каких отрезках может оказаться черепашка A, если проползёт $\frac{22}{5}$ длины отрезков:



Несложно видеть, что в каждой из точек, где может оказаться A, может оказаться и B. Итого, черепашки могут встретиться на 10 отрезках.

Задание 5. Вариант 2. Две черепахи движутся по линиям сетки прямоугольника 7×8 со стороной 1, стартуя одновременно: одна из точки A, другая — из B.

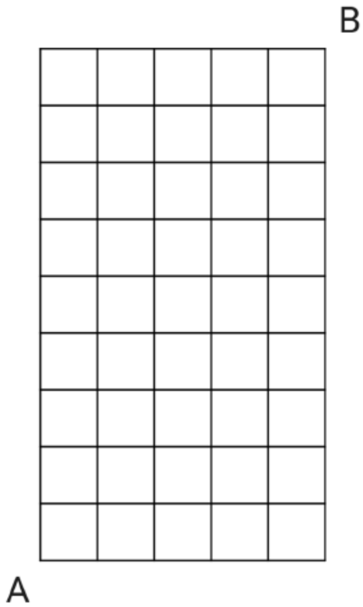


Черепаха, стартующая из A, всегда движется вправо или вверх, а черепаха, стартующая из B, всегда движется влево или вниз. Скорость черепахи, стартующей из A, составляет три четверти скорости другой черепахи. Сколько существует единичных отрезков сетки, на которых черепахи могут встретиться?

Ответ: 14

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 5. Вариант 3. Две черепахи движутся по линиям сетки прямоугольника 9×5 со стороной 1, стартуя одновременно: одна из точки A, другая — из B.

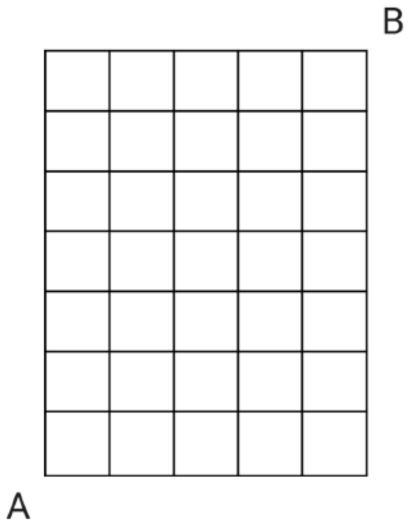


Черепаха, стартующая из A, всегда движется вправо или вверх, а черепаха, стартующая из B, всегда движется влево или вниз. Скорость черепахи, стартующей из A, в полтора раза больше скорости другой черепахи. Сколько существует единичных отрезков сетки, на которых черепахи могут встретиться?

Ответ: 11

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 5. Вариант 4. Две черепахи движутся по линиям сетки прямоугольника 7×5 со стороной 1, стартуя одновременно: одна из точки A, другая —- из B.



Черепаха, стартующая из A, всегда движется вправо или вверх, а черепаха, стартующая из B, всегда движется влево или вниз. Скорость черепахи, стартующей из A, составляет две пятых скорости другой черепахи. Сколько существует единичных отрезков сетки, на которых черепахи могут встретиться?

Ответ: 8

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 6. Вариант 1. Петя написал на доске 7 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, и заметил, что:

- сумма любых трёх из них делится на 3;
- сумма любых четырёх из них делится на 4;
- сумма любых пяти из них делится на 5.

Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из написанных на доске чисел.

Ответ: 361

Решение.

Докажем, что все числа дают одинаковые остатки при делении на 3, 4 и 5.

Обозначим через s сумму трёх чисел, отличных от каких-то двух a и b. Тогда $s + a$ и $s + b$ делятся на 3, откуда получаем, что $a-b$ делится на 3, это и значит, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на 3. Аналогично доказывается, что любые два числа дают одинаковые остатки при делении на 3, на 4 и на 5.

Значит, разность любых двух чисел делится на НОК$(3,\ 4,\ 5) = 60$, т.е. разность любых двух чисел не меньше 60. Тогда наибольшее число не меньше $1 + 60 \cdot 6 = 361$.

При этом числа 1, 61, 121, 181, 241, 301, 361 подходят под условие, так как все они дают остатки 1 при делении на каждое из чисел 3, 4, 5.

Задание 6. Вариант 2. Петя написал на доске 11 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, и заметил, что:

- сумма любых трёх из них делится на 3;
- сумма любых четырёх из них делится на 4;
- сумма любых семи из них делится на 7.

Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из написанных на доске чисел.

Ответ: 841

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 6. Вариант 3. Петя написал на доске 11 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, и заметил, что:

- сумма любых трёх из них делится на 3;
- сумма любых пяти из них делится на 5;
- сумма любых восьми из них делится на 8.

Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из написанных на доске чисел.

Ответ: 1201

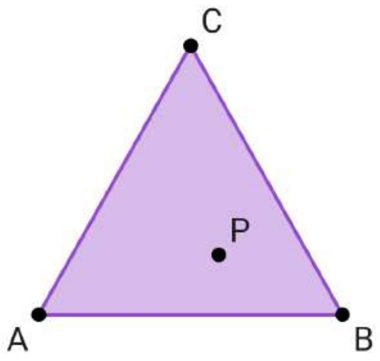
Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 6. Вариант 4. Петя написал на доске 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых, и заметил, что:

- сумма любых пяти из них делится на 5;
- сумма любых шести из них делится на 6;
- сумма любых семи из них делится на 7.

Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из написанных на доске чисел.
Ответ: 1891
Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 1. Точка P внутри равностороннего треугольника со стороной $8\sqrt{3}$ такова, что $S_{ABP} + S_{ACP} = 3S_{BCP}$.

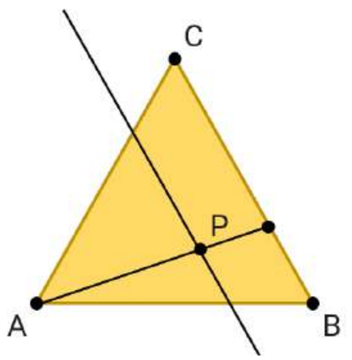


Какую наименьшую длину может иметь отрезок AP? Через S_{XYZ} обозначается площадь треугольника XYZ.
Ответ: 9
Решение.
Заметим, что

$$S_{ABC} = S_{ABP} + S_{ACP} + S_{BCP} = 4S_{BCP}.$$

У треугольников PBC и ABC общее основание BC, поэтому высота из точки P на сторону BC в четыре раза меньше, чем высота из A.

Значит, условие равносильно тому, что P лежит на прямой, на расстоянии $1/4$ высоты из точки A. Ближайшая к A точка на этой прямой — основание высоты из точки A, т.е. на расстоянии $3/4$ от высоты треугольника (см. чертёж)



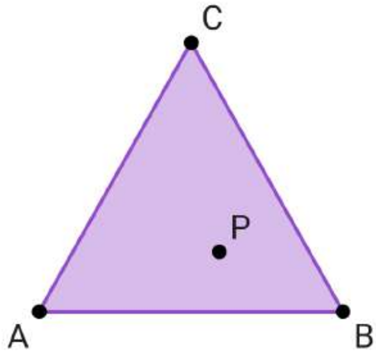
Осталось посчитать длину высоты в равностороннем треугольнике со стороной $8\sqrt{3}$ Это можно сделать многими способами, мы воспользуемся теоремой Пифагора:

$$\sqrt{(8\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{3})^2} = 12,$$

откуда ответ $\dfrac{3}{4} \cdot 12 = 9$.

–

Задание 7. Вариант 2. Точка P внутри равностороннего треугольника со стороной $14\sqrt{3}$ такова, что $S_{ABP} + S_{ACP} = 6S_{BCP}$.

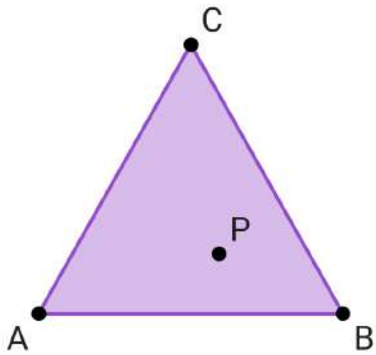


Какую наименьшую длину может иметь отрезок AP? Через S_{XYZ} обозначается площадь треугольника XYZ.

Ответ: 18

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 3. Точка P внутри равностороннего треугольника со стороной $10\sqrt{3}$ такова, что $S_{ABP} + S_{ACP} = 4S_{BCP}$.

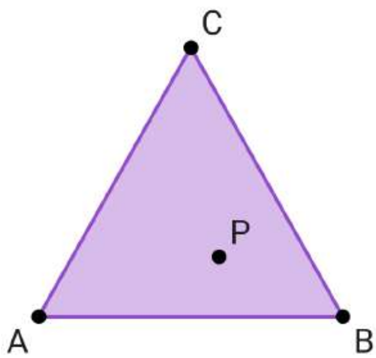


Какую наименьшую длину может иметь отрезок AP? Через S_{XYZ} обозначается площадь треугольника XYZ.

Ответ: 12

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 4. Точка P внутри равностороннего треугольника со стороной $12\sqrt{3}$ такова, что $S_{ABP} + S_{ACP} = 5S_{BCP}$.



Какую наименьшую длину может иметь отрезок AP? Через S_{XYZ} обозначается площадь треугольника XYZ.

Ответ: 15

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 1. Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 таковы, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ и $\frac{1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{2}{x_1 + x_3 + x_4} + \frac{3}{x_1 + x_2 + x_4} + \frac{4}{x_1 + x_2 + x_3} = 25$.

Чему равно значение выражения $\frac{x_1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{2x_2}{x_1 + x_3 + x_4} + \frac{3x_3}{x_1 + x_2 + x_4} + \frac{4x_4}{x_1 + x_2 + x_3}$?

Ответ: 240

Решение.

Решим задачу, когда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a$ и $\frac{1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{2}{x_1 + x_3 + x_4} + \frac{3}{x_1 + x_2 + x_4} + \frac{4}{x_1 + x_2 + x_3} = b$.

Каждое слагаемое из искомой суммы можно представить в виде

$$\frac{kx_k}{a - x_k} = k\left(\frac{a}{a - x_k} - 1\right),$$

где $k = 1, 2, 3, 4$. Следовательно,

$\frac{1x_1}{a - x_1} + \frac{2x_2}{a - x_2} + \frac{3x_3}{a - x_3} + \frac{4x_4}{a - x_4} = a\left(\frac{1}{a - x_1} + \frac{2}{a - x_2} + \frac{3}{a - x_3} + \frac{4}{a - x_4}\right) - (1 + 2 + 3 + 4)$.

Так как по условию $\frac{1}{a - x_1} + \frac{2}{a - x_2} + \frac{3}{a - x_3} + \frac{4}{a - x_4} = b$, и $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, получаем ответ: $ab - 10$.

Задание 8. Вариант 2. Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 таковы, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ и $\frac{1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{2}{x_1 + x_3 + x_4} + \frac{3}{x_1 + x_2 + x_4} + \frac{4}{x_1 + x_2 + x_3} = 24$.

Чему равно значение выражения $\frac{x_1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{2x_2}{x_1 + x_3 + x_4} + \frac{3x_3}{x_1 + x_2 + x_4} + \frac{4x_4}{x_1 + x_2 + x_3}$?

Ответ: 110

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 3. Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 таковы, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ и $\frac{1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{2}{x_1 + x_3 + x_4} + \frac{3}{x_1 + x_2 + x_4} + \frac{4}{x_1 + x_2 + x_3} = 15$.

Чему равно значение выражения $\frac{x_1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{2x_2}{x_1 + x_3 + x_4} + \frac{3x_3}{x_1 + x_2 + x_4} + \frac{4x_4}{x_1 + x_2 + x_3}$?

Ответ: 80

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 4. Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 таковы, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ и $\frac{1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{2}{x_1 + x_3 + x_4} + \frac{3}{x_1 + x_2 + x_4} + \frac{4}{x_1 + x_2 + x_3} = 13$.

Чему равно значение выражения $\frac{x_1}{x_2 + x_3 + x_4} + \frac{2x_2}{x_1 + x_3 + x_4} + \frac{3x_3}{x_1 + x_2 + x_4} + \frac{4x_4}{x_1 + x_2 + x_3}$?

Ответ: 250

Решение по аналогии с вариантом 1