Максимальное количество баллов за олимпиаду — 8

Задание 1. Вариант 1. Найдите знаменатель несократимой дроби, равной числу 0.000625.

Задание 1. Вариант 2. Найдите знаменатель несократимой дроби, равной числу 0.00375.

Задание 1. Вариант 3. Найдите знаменатель несократимой дроби, равной числу 0.0064.

Задание 1. Вариант 4. Найдите знаменатель несократимой дроби, равной числу 0.00875.

Задание 2. Вариант 1. По реке от мостика **А** до мостика **Б** мячик плывёт 5 минут. Петя за такое же время проплывает от **Б** до **А**. За сколько секунд Петя проплывёт от **А** до **Б**?

Задание 2. Вариант 2. По реке от мостика **А** до мостика **Б** мячик плывёт 7 минут. Петя проплывает от **Б** до **А** в два раза быстрее. За сколько секунд Петя проплывёт от **А** до **Б**?

Задание 2. Вариант 3. По реке от мостика **А** до мостика **Б** мячик плывёт 6 минут. Петя проплывает от **Б** до **А** в три раза быстрее. За сколько секунд Петя проплывёт от **А** до **Б**?

Задание 2. Вариант 4. По реке от мостика **А** до мостика **Б** мячик плывёт 8 минут. Петя проплывает от **Б** до **А** в четыре раза быстрее. За сколько секунд Петя проплывёт от **А** до **Б**?

Задание 3. Вариант 1. На острове живут аборигены. Любые два из них либо дружат, либо враждуют. Ни один из аборигенов не дружит с врагом своего друга, и каждый абориген имеет ровно трёх врагов. Сколько аборигенов могло жить на острове? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Задание 3. Вариант 2. На острове живут аборигены. Любые два из них либо дружат, либо враждуют. Ни один из аборигенов не дружит с врагом своего друга, и каждый абориген имеет ровно четырёх врагов. Сколько аборигенов могло жить на острове? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Задание 3. Вариант 3. На острове живут аборигены. Любые два из них либо дружат, либо враждуют. Ни один из аборигенов не дружит с врагом своего друга, и каждый абориген имеет ровно пять врагов. Сколько аборигенов могло жить на острове? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Задание 3. Вариант 4. На острове живут аборигены. Любые два из них либо дружат, либо враждуют. Ни один из аборигенов не дружит с врагом своего друга, и каждый абориген имеет ровно семь врагов. Сколько аборигенов могло жить на острове? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

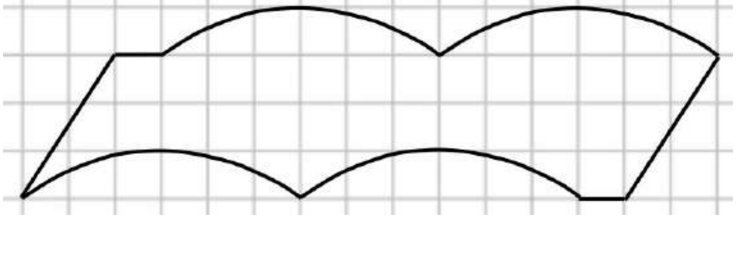
Задание 4. Вариант 1. Длина одной из сторон прямоугольника равна 14. Оказалось, что его можно разрезать на маленькие прямоугольники 3×4. Какую наименьшую площадь может иметь большой прямоугольник?

Задание 4. Вариант 2. Длина одной из сторон прямоугольника равна 10. Оказалось, что его можно разрезать на маленькие прямоугольники 3×4. Какую наименьшую площадь может иметь большой прямоугольник?

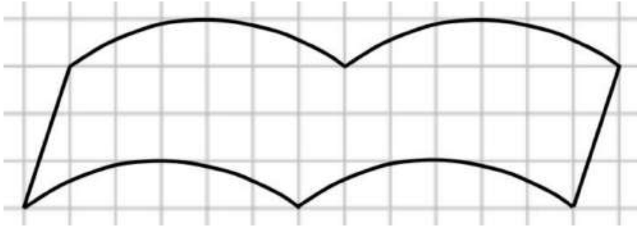
Задание 4. Вариант 3. Длина одной из сторон прямоугольника равна 22. Оказалось, что его можно разрезать на маленькие прямоугольники 3×4. Какую наименьшую площадь может иметь большой прямоугольник?

Задание 4. Вариант 4. Длина одной из сторон прямоугольника равна 26. Оказалось, что его можно разрезать на маленькие прямоугольники 3×4. Какую наименьшую площадь может иметь большой прямоугольник?

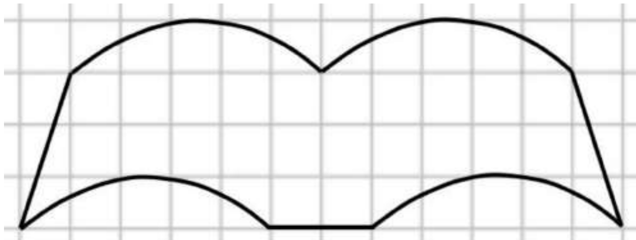
Задание 5. Вариант 1. Примем за единицу измерения площади площадь одного квадратика. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке:



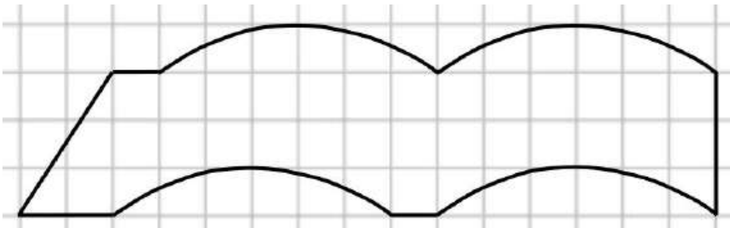
Задание 5. Вариант 2. Примем за единицу измерения площади площадь одного квадратика. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке:



Задание 5. Вариант 3. Примем за единицу измерения площади площадь одного квадратика. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке:



Задание 5. Вариант 4. Примем за единицу измерения площади площадь одного квадратика. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке:



Задание 6. Вариант 1. Вася взял три различных натуральных числа a, b и c и написал на доске семь чисел:

$$a,\ b,\ c,\ a+b,\ b+c,\ c+a,\ a+b+c.$$

Какое наибольшее количество простых чисел могло быть среди них?

Задание 6. Вариант 2. Вася взял четыре различных натуральных числа a, b, c и d и написал на доске десять чисел:

$$a,\ b,\ c,\ d,\ a+b,\ a+c,\ a+d,\ b+c,\ b+d,\ c+d.$$

Какое наибольшее количество простых чисел могло быть среди них?

Задание 6. Вариант 3. Вася взял три различных натуральных числа a, b и c и написал на доске семь чисел:

$$a,\ b,\ c,\ 2a+b+c,\ a+2b+c,\ a+b+2c,\ a+b+c.$$

Какое наибольшее количество простых чисел могло быть среди них?

Задание 6. Вариант 4. Вася взял три различных натуральных числа a, b и c и написал на доске семь чисел:

$$a,\ b,\ c,\ a+3b,\ b+3c,\ c+3a,\ a+b+c.$$

Какое наибольшее количество простых чисел могло быть среди них?

Задание 7. Вариант 1. Оля решала на доске уравнение, и ответ оказался целым числом. На перемене дежурный случайно стёр всё решение, а в записи условия — две цифры (далее они обозначены звёздочками):

$$37\cdot(72+3x)=14{*}{*}45.$$

Помогите Оле восстановить ответ.

Задание 7. Вариант 2. Оля решала на доске уравнение, и ответ оказался целым числом. На перемене дежурный случайно стёр всё решение, а в записи условия — две цифры (далее они обозначены звёздочками):

$$41\cdot(126+3x)=12{*}{*}45.$$

Помогите Оле восстановить ответ.

Задание 7. Вариант 3. Оля решала на доске уравнение, и ответ оказался целым числом. На перемене дежурный случайно стёр всё решение, а в записи условия — две цифры (далее они обозначены звёздочками):

$$29 \cdot (253 + 11x) = 18{*}{*}15.$$

Помогите Оле восстановить ответ.

Задание 7. Вариант 4. Оля решала на доске уравнение, и ответ оказался целым числом. На перемене дежурный случайно стёр всё решение, а в записи условия — две цифры (далее они обозначены звёздочками):

$$31 \cdot (126 + 7x) = 16{*}{*}65.$$

Помогите Оле восстановить ответ.

Задание 8. Вариант 1. Петя записывал свои оценки за домашние работы. Когда Пете выставляли очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её заурядной, если до того момента хотя бы какая-то оценка встречалась не чаще этой. До конца года Петя успел получить 100 оценок: 25 пятёрок, 25 четвёрок, 25 троек и 25 двоек. Сколько из них было заурядными?

Задание 8. Вариант 2. Петя записывал свои оценки за домашние работы. Когда Пете выставляли очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её заурядной, если до того момента хотя бы какая-то оценка встречалась не чаще этой. До конца года Петя успел получить 80 оценок: 20 пятёрок, 20 четвёрок, 20 троек и 20 двоек. Сколько из них было заурядными?

Задание 8. Вариант 3. Вася записывал свои оценки за домашние работы. Когда Васе выставляли очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её заурядной, если до того момента хотя бы какая-то оценка встречалась не чаще этой. До конца года Вася успел получить 60 оценок: 15 пятёрок, 15 четвёрок, 15 троек и 15 двоек. Сколько из них было заурядными?

Задание 8. Вариант 4. Вася записывал свои оценки за домашние работы. Когда Васе выставляли очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её заурядной, если до того момента хотя бы какая-то оценка встречалась не чаще этой. До конца года Вася успел получить 120 оценок: 30 пятёрок, 30 четвёрок, 30 троек и 30 двоек. Сколько из них было заурядными?

Максимальное количество баллов за олимпиаду — 8

Задание 1. Вариант 1. Найдите знаменатель несократимой дроби, равной числу 0.000625.

Ответ: 1600

Решение.

$$0.000625 = \frac{625}{1000000} = \frac{625}{625 \cdot 1600} = \frac{1}{1600}.$$

Задание 1. Вариант 2. Найдите знаменатель несократимой дроби, равной числу 0.00375.

Ответ: 800

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 1. Вариант 3. Найдите знаменатель несократимой дроби, равной числу 0.0064.

Ответ: 625

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 1. Вариант 4. Найдите знаменатель несократимой дроби, равной числу 0.00875.

Ответ: 800

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 2. Вариант 1. По реке от мостика **А** до мостика **Б** мячик плывёт 5 минут. Петя за такое же время проплывает от **Б** до **А**. За сколько секунд Петя проплывёт от **А** до **Б**?

Ответ: 100

Решение.

Мячик плывёт по реке со скоростью её течения, поэтому течение направлено от **А** к **Б**. Следовательно, от **Б** к **А** мальчик плывёт против течения со скоростью, равной разности собственной скорости Пети и скорости течения реки. На путь от **Б** до **А** Петя тратит столько же секунд, сколько мячик плыл от **А** до **Б**, значит, они плыли с одинаковыми скоростями. Поэтому собственная скорость Пети в 2 раза больше скорости течения реки. Если же Петя будет плыть по течению, то его скорость будет в три раза больше скорости течения реки и на заплыв от **А** до **Б** мальчик потратит в три раза меньше времени, чем мячик. $5 \cdot 60 = 300$ секунд плывёт мячик, $300 : 3 = 100$ секунд потратит Петя на путь от **А** до **Б**.

Задание 2. Вариант 2. По реке от мостика **А** до мостика **Б** мячик плывёт 7 минут. Петя проплывает от **Б** до **А** в два раза быстрее. За сколько секунд Петя проплывёт от **А** до **Б**?

Ответ: 105

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 2. Вариант 3. По реке от мостика **А** до мостика **Б** мячик плывёт 6 минут. Петя проплывает от **Б** до **А** в три раза быстрее. За сколько секунд Петя проплывёт от **А** до **Б**?

Ответ: 72

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 2. Вариант 4. По реке от мостика **А** до мостика **Б** мячик плывёт 8 минут. Петя проплывает от **Б** до **А** в четыре раза быстрее. За сколько секунд Петя проплывёт от **А** до **Б**?

Ответ: 80

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 1. На острове живут аборигены. Любые два из них либо дружат, либо враждуют. Ни один из аборигенов не дружит с врагом своего друга, и каждый абориген имеет ровно трёх врагов. Сколько аборигенов могло жить на острове? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

- ✓ 4
- ✓ 6

Решение.

Поскольку у каждого аборигена 3 врага, на острове живут хотя бы 4 аборигена. Докажем, что на острове не может жить более 6 аборигенов. Рассмотрим пару врагов A, B. Любой другой житель острова по условию не может одновременно дружить с A и B, то есть он является врагом хотя бы одного из A и B. Но у A, кроме B, ровно два врага, и у B, кроме A, ровно два врага, и поэтому всего жителей не более 6.

Докажем, что пяти жителей быть не может. Предположим противное. Пусть каждый поздоровается за руку со своими тремя врагами. В этих рукопожатиях участвует $5 \cdot 3 = 15$ рук, но число участвующих рук должно быть чётным, поскольку в каждом рукопожатии участвует две руки — противоречие.

Приведём примеры, показывающие, что 4 и 6 аборигенов жить на острове могут. Действительно, если аборигенов четверо и любые двое враждуют, условие задачи выполняется. Если аборигенов шестеро, они образуют две тройки друзей: A, B, C и D, E, F, и любые двое из разных троек враждуют, условие задачи также выполняется.

Задание 3. Вариант 2. На острове живут аборигены. Любые два из них либо дружат, либо враждуют. Ни один из аборигенов не дружит с врагом своего друга, и каждый абориген имеет ровно четырёх врагов. Сколько аборигенов могло жить на острове? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

✓ 5

✓ 6

✓ 8

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 3. На острове живут аборигены. Любые два из них либо дружат, либо враждуют. Ни один из аборигенов не дружит с врагом своего друга, и каждый абориген имеет ровно пять врагов. Сколько аборигенов могло жить на острове? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

✓ 6

✓ 10

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 4. На острове живут аборигены. Любые два из них либо дружат, либо враждуют. Ни один из аборигенов не дружит с врагом своего друга, и каждый абориген имеет ровно семь врагов. Сколько аборигенов могло жить на острове? Укажите все подходящие варианты. Каждый ответ записывайте в отдельное поле, добавляя их при необходимости.

Ответ:

✓ 8

✓ 14

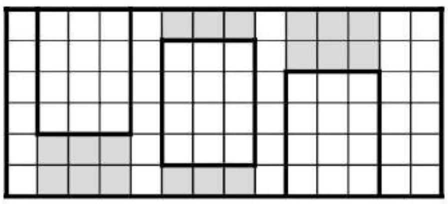
Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 1. Длина одной из сторон прямоугольника равна 14. Оказалось, что его можно разрезать на маленькие прямоугольники 3×4. Какую наименьшую площадь может иметь большой прямоугольник?

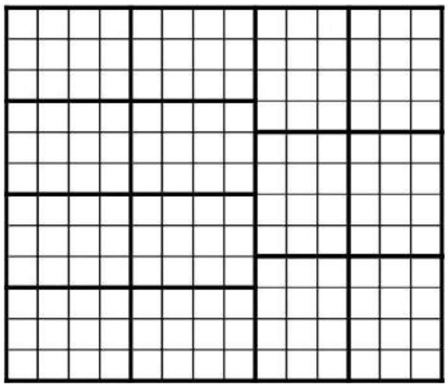
Ответ: 168

Решение.

Площадь прямоугольника — целое число, так как делится на $3 \cdot 4 = 12$. Так как одна из сторон равна 14, площадь искомого прямоугольника должна делиться на 14 (то есть на 2 и на 7). Кроме того, прямоугольник можно разрезать на прямоугольники 3×4, площадь каждого из которых равна $3 \cdot 4 = 12$, значит, его площадь должна делиться на 12 (то есть на 4 и на 3). Чтобы число делилось на 2, 3, 4 и 7, оно должно делиться на $3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$. Два минимальных таких числа — 84 и 168. Докажем, что прямоугольник не может иметь площадь 84. Предположим противное, тогда вторая сторона прямоугольника равна 6. В таком случае прямоугольники 2×3 не могут располагаться вертикально, иначе над или под ними останутся клетки, которые не могут быть включены ни в какой прямоугольник 2×3.



Но и горизонтально все прямоугольники располагаться не могут, так как 14 не делится на 4. Следовательно, площадь прямоугольника не менее 168. Ниже приведён пример прямоугольника площадью 168, удовлетворяющего условию.



Задание 4. Вариант 2. Длина одной из сторон прямоугольника равна 10. Оказалось, что его можно разрезать на маленькие прямоугольники 3×4. Какую наименьшую площадь может иметь большой прямоугольник?

Ответ: 120

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 3. Длина одной из сторон прямоугольника равна 22. Оказалось, что его можно разрезать на маленькие прямоугольники 3×4. Какую наименьшую площадь может иметь большой прямоугольник?

Ответ: 264

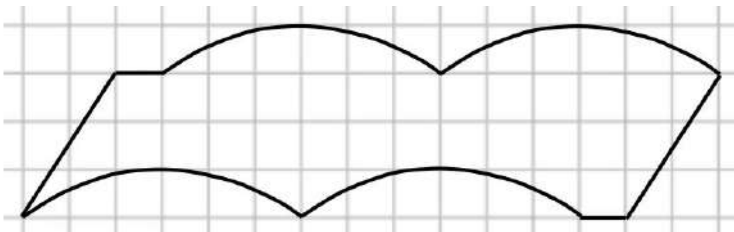
Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 4. Длина одной из сторон прямоугольника равна 26. Оказалось, что его можно разрезать на маленькие прямоугольники 3×4. Какую наименьшую площадь может иметь большой прямоугольник?

Ответ: 312

Решение по аналогии с вариантом 1

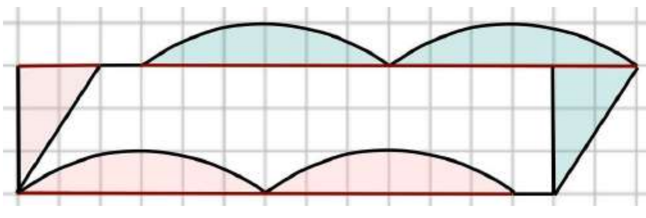
Задание 5. Вариант 1. Примем за единицу измерения площади площадь одного квадратика. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке:



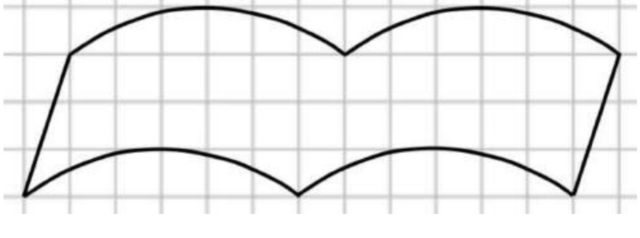
Ответ: 39

Решение.

Перекроим фигуру в прямоугольник, переложив голубые фрагменты на место розовых (см. картинку ниже). Длина горизонтальной стороны полученного прямоугольника равна 13, а ширина —3. Значит, его площадь равна $13 \cdot 3 = 39$.



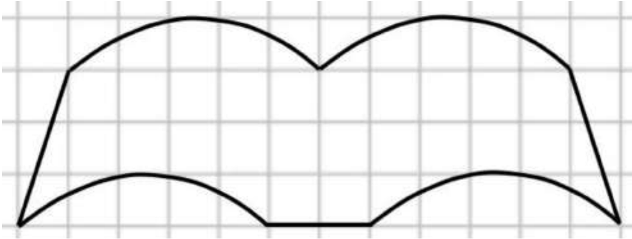
Задание 5. Вариант 2. Примем за единицу измерения площади площадь одного квадратика. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке:



Ответ: 36

Решение по аналогии с вариантом 1

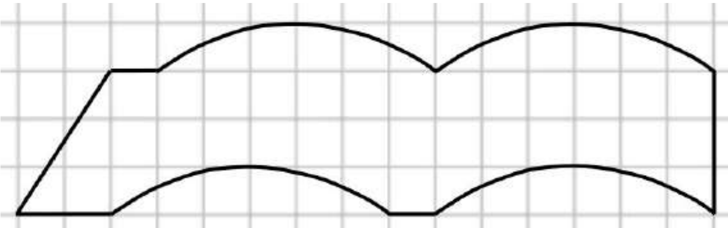
Задание 5. Вариант 3. Примем за единицу измерения площади площадь одного квадратика. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке:



Ответ: 33

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 5. Вариант 4. Примем за единицу измерения площади площадь одного квадратика. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке:



Ответ: 42

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 6. Вариант 1. Вася взял три различных натуральных числа a, b и c и написал на доске семь чисел:

$$a,\ b,\ c,\ a+b,\ b+c,\ c+a,\ a+b+c.$$

Какое наибольшее количество простых чисел могло быть среди них?

Ответ: 5

Решение.

Докажем, что среди семи выписанных чисел есть хотя бы три чётных.

Первый случай. Если среди чисел a, b, c есть хотя бы два чётных, то они и их сумма образуют тройку различных чётных чисел.

Второй случай. Если числа a, b, c нечётны, то их попарные суммы $a+b$, $b+c$, $c+a$ различны и чётны.

Третий случай. Если среди a, b, c ровно одно чётное, например, a, то a, $b+c$, $a+b+c$ представляют собой тройку чётных чисел. При этом либо все три числа разные, либо $a = b + c$.

Единственное чётное простое число — 2. Если выписано три разных чётных числа, то среди выписанных чётных чисел хотя бы два являются составными. Простых чисел среди выписанных не более $7 - 2 = 5$.

Если в третьем случае оказалось, что $a = b + c$, то, поскольку $b + c > 2$, все три выписанных чётных числа — составные и простых чисел не более 4.

Пример: при $a = 2$, $b = 3$, $c = 11$ на доске будут выписаны числа 2, 3, 11, 5, 14, 13, 16, среди них пять простых: 2, 3, 5, 11, 13.

Задание 6. Вариант 2. Вася взял четыре различных натуральных числа a, b, c и d и написал на доске десять чисел:

$$a,\ b,\ c,\ d,\ a+b,\ a+c,\ a+d,\ b+c,\ b+d,\ c+d.$$

Какое наибольшее количество простых чисел могло быть среди них?

Ответ: 7

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 6. Вариант 3. Вася взял три различных натуральных числа a, b и c и написал на доске семь чисел:

$$a,\ b,\ c,\ 2a+b+c,\ a+2b+c,\ a+b+2c,\ a+b+c.$$

Какое наибольшее количество простых чисел могло быть среди них?

Ответ: 5

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 6. Вариант 4. Вася взял три различных натуральных числа a, b и c и написал на доске семь чисел:

$$a,\ b,\ c,\ a+3b,\ b+3c,\ c+3a,\ a+b+c.$$

Какое наибольшее количество простых чисел могло быть среди них?

Ответ: 5

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 1. Оля решала на доске уравнение, и ответ оказался целым числом. На перемене дежурный случайно стёр всё решение, а в записи условия — две цифры (далее они обозначены звёздочками):

$$37 \cdot (72+3x) = 14{*}{*}45.$$

Помогите Оле восстановить ответ.

Ответ: 1271

Решение.

Перепишем уравнение в виде: $37\cdot 3\cdot(24+x) = 14{*}{*}45$. Заметим, что правая часть равенства делится на 5, но не делится на 2, значит, $24+x$ оканчивается на 5, а x — на 1. Тогда заменим x на $10y+1$ и перепишем наше равенство. $37\cdot 3\cdot(25+10y) = 14{*}{*}45$, $37\cdot 3\cdot 5\cdot(5+2y) = 14{*}{*}45$, $555\cdot(5+2y) = 14{*}{*}45$.

Заметим, что $5+2y$ — нечётное число, не меньшее $\dfrac{140045}{555} = 252\dfrac{185}{555}$, но меньшее $\dfrac{149945}{555} = 270\dfrac{95}{555}$.

При $5+2y = 253$ получим $37\cdot 3\cdot 5\cdot(5+2y) = 140415$, следовательно, нам нужно искать y побольше. При увеличении y на 1 произведение увеличивается на $37\cdot 3\cdot 5\cdot 2 = 1110$, то есть при переходе к каждому следующему нечётному числу в разряде десятков произведения будет прибавляться 1 (пока не произойдёт переход). При $5+2y = 253$ цифра в разряде десятков произведения равна 1, следовательно, она станет равной 4 единственный раз, после трёх прибавлений 1110 либо после 13 и большего числа прибавлений. Но в последнем случае $5+2y \geqslant 253+2\cdot 13 > 270$. Осталось восстановить x.

$$24+x = \frac{14745}{37\cdot 3} = 1295,$$
$$x = 1295-24 = 1271.$$

Задание 7. Вариант 2. Оля решала на доске уравнение, и ответ оказался целым числом. На перемене дежурный случайно стёр всё решение, а в записи условия — две цифры (далее они обозначены звёздочками):

$$41\cdot(126+3x) = 12{*}{*}45.$$

Помогите Оле восстановить ответ.

Ответ: 973

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 3. Оля решала на доске уравнение, и ответ оказался целым числом. На перемене дежурный случайно стёр всё решение, а в записи условия — две цифры (далее они обозначены звёздочками):

$$29\cdot(253+11x) = 18{*}{*}15.$$

Помогите Оле восстановить ответ.

Ответ: 562

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 4. Оля решала на доске уравнение, и ответ оказался целым числом. На перемене дежурный случайно стёр всё решение, а в записи условия — две цифры (далее они обозначены звёздочками):

$$31\cdot(126+7x) = 16{*}{*}65.$$

Помогите Оле восстановить ответ.

Ответ: 727

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 1. Петя записывал свои оценки за домашние работы. Когда Пете выставляли очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её заурядной, если до того момента хотя бы какая-то оценка встречалась не чаще этой.

До конца года Петя успел получить 100 оценок: 25 пятёрок, 25 четвёрок, 25 троек и 25 двоек. Сколько из них было заурядными?

Ответ: 75

Решение.

Пусть оценка n (n — одна из 2, 3, 4, 5) получена в первый раз последней. Тогда до этого были только заурядные оценки, ведь оценка n встречалась на тот момент 0 раз — не чаще любой из остальных. При этом полученная в первый раз оценка n будет незаурядной.

Второй незаурядной оценкой будет последняя из оценок 2, 3, 4 или 5, полученная во второй раз, и т.д.

Значит, всего будет 25 незаурядных оценок. Остальные 75 оценок — заурядные.

Задание 8. Вариант 2. Петя записывал свои оценки за домашние работы. Когда Пете выставляли очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её заурядной, если до того момента хотя бы какая-то оценка встречалась не чаще этой. До конца года Петя успел получить 80 оценок: 20 пятёрок, 20 четвёрок, 20 троек и 20 двоек. Сколько из них было заурядными?

Ответ: 60

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 3. Вася записывал свои оценки за домашние работы. Когда Васе выставляли очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её заурядной, если до того момента хотя бы какая-то оценка встречалась не чаще этой. До конца года Вася успел получить 60 оценок: 15 пятёрок, 15 четвёрок, 15 троек и 15 двоек. Сколько из них было заурядными?

Ответ: 45

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 4. Вася записывал свои оценки за домашние работы. Когда Васе выставляли очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл её заурядной, если до того момента хотя бы какая-то оценка встречалась не чаще этой. До конца года Вася успел получить 120 оценок: 30 пятёрок, 30 четвёрок, 30 троек и 30 двоек. Сколько из них было заурядными?

Ответ: 90

Решение по аналогии с вариантом 1