Максимальное количество баллов за олимпиаду — 8

Задание 1. Вариант 1. Прямоугольник 2×3 и прямоугольник 3×4 поместили внутрь квадрата с целочисленной стороной так, что они могут иметь общие точки, но не могут перекрывать друг друга. Какую наименьшую площадь может иметь квадрат?

Задание 1. Вариант 2. Прямоугольник 3×5 и прямоугольник 4×3 поместили внутрь квадрата с целочисленной стороной так, что они могут иметь общие точки, но не могут перекрывать друг друга. Какую наименьшую площадь может иметь квадрат?

Задание 1. Вариант 3. Прямоугольник 3×6 и прямоугольник 4×5 поместили внутрь квадрата с целочисленной стороной так, что они могут иметь общие точки, но не могут перекрывать друг друга. Какую наименьшую площадь может иметь квадрат?

Задание 1. Вариант 4. Прямоугольник 4×7 и прямоугольник 6×4 поместили внутрь квадрата с целочисленной стороной так, что они могут иметь общие точки, но не могут перекрывать друг друга. Какую наименьшую площадь может иметь квадрат?

Задание 2. Вариант 1. Участниками чемпионата по вольной борьбе являются мужчины и женщины. Количество женщин составляет 52 % от общего числа участников, а их суммарный вес — 48 % общего веса участников. Найдите отношение среднего веса мужчин к среднему весу женщин. Ответ выразите в виде обыкновенной дроби.

Задание 2. Вариант 2. Участниками чемпионата по вольной борьбе являются мужчины и женщины. Количество женщин составляет 56 % от общего числа участников, а их суммарный вес — 44 % общего веса участников. Найдите отношение среднего веса мужчин к среднему весу женщин. Ответ выразите в виде обыкновенной дроби.

Задание 2. Вариант 3. Участниками чемпионата по вольной борьбе являются мужчины и женщины. Количество женщин составляет 54 % от общего числа участников, а их суммарный вес — 46 % общего веса участников. Найдите отношение среднего веса мужчин к среднему весу женщин. Ответ выразите в виде обыкновенной дроби.

Задание 2. Вариант 4. Участниками чемпионата по вольной борьбе являются мужчины и женщины. Количество женщин составляет 58 % от общего числа участников, а их суммарный вес — 42 % общего веса участников. Найдите отношение среднего веса мужчин к среднему весу женщин. Ответ выразите в виде обыкновенной дроби.

Задание 3. Вариант 1. Петя переписал в тетрадь два двузначных числа с доски и перемножил их. Он сделал ошибку в одном из чисел: написал десятки на месте единиц, а единицы на месте десятков, поэтому результат оказался на 1449 больше, чем должен был быть. Какие числа были записаны на доске?

Укажите все подходящие варианты. Для каждой возможной пары чисел в качестве ответа запишите их сумму.

Задание 3. Вариант 2. Петя переписал в тетрадь два двузначных числа с доски и перемножил их. Он сделал ошибку в одном из чисел: написал десятки на месте единиц, а единицы на месте десятков, поэтому результат оказался на 1197 больше, чем должен был быть. Какие числа были записаны на доске?

Укажите все подходящие варианты. Для каждой возможной пары чисел в качестве ответа запишите их сумму.

Задание 3. Вариант 3. Петя переписал в тетрадь два двузначных числа с доски и перемножил их. Он сделал ошибку в одном из чисел: написал десятки на месте единиц, а единицы на месте десятков, поэтому результат оказался на 1827 больше, чем должен был быть. Какие числа были записаны на доске?

Укажите все подходящие варианты. Для каждой возможной пары чисел в качестве ответа запишите их сумму.

Задание 3. Вариант 4. Петя переписал в тетрадь два двузначных числа с доски и перемножил их. Он сделал ошибку в одном из чисел: написал десятки на месте единиц, а единицы на месте десятков, поэтому результат оказался на 1071 больше, чем должен был быть. Какие числа были записаны на доске?

Укажите все подходящие варианты. Для каждой возможной пары чисел в качестве ответа запишите их сумму.

Задание 4. Вариант 1. Компьютер генерирует 2 натуральных случайных числа x, y в диапазоне от 1 до 32. На плоскости рассматривается точка A с координатами (x,y). Какова вероятность, что расстояния от точки A до точек с координатами (1,1), (1,32), (32,1), (32,32) попарно различны? Ответ выразите в виде обыкновенной дроби.

Задание 4. Вариант 2. Компьютер генерирует 2 натуральных случайных числа x, y в диапазоне от 1 до 34. На плоскости рассматривается точка A с координатами (x,y). Какова вероятность, что расстояния от точки A до точек с координатами (1,1), (1,34), (34,1), (34,34) попарно различны? Ответ выразите в виде обыкновенной дроби.

Задание 4. Вариант 3. Компьютер генерирует 2 натуральных случайных числа x, y в диапазоне от 1 до 28. На плоскости рассматривается точка A с координатами (x,y). Какова вероятность, что расстояния от точки A до точек с координатами (1,1), (1,28), (28,1), (28,28) попарно различны? Ответ выразите в виде обыкновенной дроби.

Задание 4. Вариант 4. Компьютер генерирует 2 натуральных случайных числа x, y в диапазоне от 1 до 26. На плоскости рассматривается точка A с координатами (x,y). Какова вероятность, что расстояния от точки A до точек с координатами (1,1), (1,26), (26,1), (26,26) попарно различны? Ответ выразите в виде обыкновенной дроби.

Задание 5. Вариант 1.

Пусть a, b — целые числа, такие, что все корни уравнения

$$(x^2 - ax + 20)(x^2 + 17x + b) = 0$$

являются отрицательными целыми числами. Найдите наименьшее возможное значение числа a и наименьшее возможное значение числа b.

Задание 5. Вариант 2. Пусть a, b – целые числа, такие, что все корни уравнения

$$(x^2 - ax + 22)(x^2 + 15x + b) = 0$$

являются отрицательными целыми числами. Найдите наименьшее возможное значение числа a и наименьшее возможное значение числа b.

Задание 5. Вариант 3. Пусть a, b — целые числа, такие, что все корни уравнения

$$(x^2 - ax + 25)(x^2 + 19x + b) = 0$$

являются отрицательными целыми числами. Найдите наименьшее возможное значение числа a и наименьшее возможное значение числа b.

Задание 5. Вариант 4. Пусть a, b — целые числа, такие, что все корни уравнения

$$(x^2 - ax + 23)(x^2 + 13x + b) = 0$$

являются отрицательными целыми числами. Найдите наименьшее возможное значение числа a и наименьшее возможное значение числа b.

Задание 6. Вариант 1. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, k$. Двое игроков по очереди вычёркивают по одному числу. Если после очередного хода сумма невычеркнутых чисел стала кратна 3, то игра заканчивается и сделавший последний ход проигрывает. При каком k игрок, ходящий вторым, имеет выигрышную стратегию? Выберите все подходящие варианты.

Ответ:

- 20
- 25
- 26
- 27

Задание 6. Вариант 2. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, k$. Двое игроков по очереди вычёркивают по одному числу. Если после очередного хода сумма невычеркнутых чисел стала кратна 3, то игра заканчивается и сделавший последний ход проигрывает. При каком k игрок, ходящий вторым, имеет выигрышную стратегию? Выберите все подходящие варианты.

Ответ:

- 32
- 38
- 39
- 43

Задание 6. Вариант 3. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, k$. Двое игроков по очереди вычёркивают по одному числу. Если после очередного хода сумма невычеркнутых чисел стала кратна 3, то игра заканчивается и сделавший последний ход проигрывает. При каком k игрок, ходящий первым, имеет выигрышную стратегию? Выберите все подходящие варианты.

Ответ:

- 32
- 33
- 37
- 50

Задание 6. Вариант 4. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, k$. Двое игроков по очереди вычёркивают по одному числу. Если после очередного хода сумма невычеркнутых чисел стала кратна 3, то игра заканчивается и сделавший последний ход проигрывает. При каком k игрок, ходящий первым, имеет выигрышную стратегию? Выберите все подходящие варианты.

Ответ:

- 33
- 37
- 38
- 44

Задание 7. Вариант 1. На луче OA расположены точки B и C так, что $OA : OB : OC = 3 : 4 : 6$. Точка D выбрана так, что OD и DB перпендикулярны. Найдите CD, если $AD = 5$.

Задание 7. Вариант 2. На луче OA расположены точки B и C так, что $OA : OB : OC = 2 : 3 : 6$. Точка D выбрана так, что OD и DB перпендикулярны. Найдите CD, если $AD = 6$.

Задание 7. Вариант 3. На луче OA расположены точки B и C так, что $OA : OB : OC = 3 : 4 : 6$. Точка D выбрана так, что OD и DB перпендикулярны. Найдите CD, если $AD = 6$.

Задание 7. Вариант 4. На луче OA расположены точки B и C так, что $OA : OB : OC = 2 : 3 : 6$. Точка D выбрана так, что OD и DB перпендикулярны. Найдите CD, если $AD = 5$.

Задание 8. Вариант 1. Компания из десяти человек удовлетворяет условию: если два человека знакомы, то у одного из них не более двух знакомых в этой компании. Найдите наибольшее возможное количество пар знакомых в этой компании.

Задание 8. Вариант 2. Компания из двенадцати человек удовлетворяет условию: если два человека знакомы, то у одного из них не более двух знакомых в этой компании. Найдите наибольшее возможное количество пар знакомых в этой компании.

Задание 8. Вариант 3. Компания из четырнадцати человек удовлетворяет условию: если два человека знакомы, то у одного из них не более двух знакомых в этой компании. Найдите наибольшее возможное количество пар знакомых в этой компании.

Задание 8. Вариант 4. Компания из шестнадцати человек удовлетворяет условию: если два человека знакомы, то у одного из них не более двух знакомых в этой компании. Найдите наибольшее возможное количество пар знакомых в этой компании.

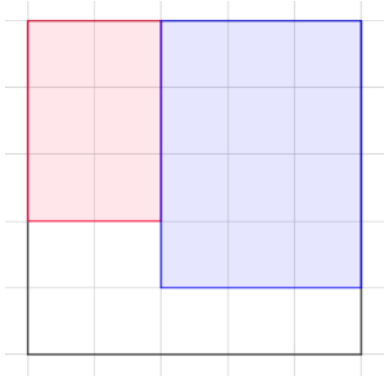
Максимальное количество баллов за олимпиаду — 8

Задание 1. Вариант 1. Прямоугольник 2×3 и прямоугольник 3×4 поместили внутрь квадрата с целочисленной стороной так, что они могут иметь общие точки, но не могут перекрывать друг друга. Какую наименьшую площадь может иметь квадрат?

Ответ: 25

Решение.

Заметим, что поместить оба указанных прямоугольника в квадрат 4×4 или меньший не удастся, так как суммарная площадь прямоугольников равна $6+12 = 18$, что больше, чем площадь квадрата 4×4, которая равна 16. Как поместить прямоугольники в квадрат 5×5, указано на рисунке:



Задание 1. Вариант 2. Прямоугольник 3×5 и прямоугольник 4×3 поместили внутрь квадрата с целочисленной стороной так, что они могут иметь общие точки, но не могут перекрывать друг друга. Какую наименьшую площадь может иметь квадрат?

Ответ: 36

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 1. Вариант 3. Прямоугольник 3×6 и прямоугольник 4×5 поместили внутрь квадрата с целочисленной стороной так, что они могут иметь общие точки, но не могут перекрывать друг друга. Какую наименьшую площадь может иметь квадрат?

Ответ: 49

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 1. Вариант 4. Прямоугольник 4×7 и прямоугольник 6×4 поместили внутрь квадрата с целочисленной стороной так, что они могут иметь общие точки, но не могут перекрывать друг друга. Какую наименьшую площадь может иметь квадрат?

Ответ: 64

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 2. Вариант 1. Участниками чемпионата по вольной борьбе являются мужчины и женщины. Количество женщин составляет 52 % от общего числа участников, а их суммарный вес — 48 % общего веса участников. Найдите отношение среднего веса мужчин к среднему весу женщин. Ответ выразите в виде обыкновенной дроби.

Ответ: 169/144

Решение.

Пусть в чемпионате участвуют x мужчин и y женщин.

Тогда по условию $y = 0.52(x + y)$ или $0.48y = 0.52x$ (1).

Пусть S_1 — средний вес мужчин, S_2 — средний вес женщин. Тогда $y \cdot S_2$ — суммарный вес женщин, а $x \cdot S_1 + y \cdot S_2$ — суммарный вес всех участников.

Получим следующее равенство:

$$(x \cdot S_1 + y \cdot S_2) \cdot 0.48 = y \cdot S_2,$$

или

$$0.48 \cdot x \cdot S_1 = 0.52 \cdot y \cdot S_2.$$

Подставим y, используя равенство (1), получим

$$0.48 \cdot x \cdot S_1 = 0.52 \cdot \left(\frac{0.52x}{0.48}\right) \cdot S_2.$$

Из последнего равенства выразим отношение $\frac{S_1}{S_2}$:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{0.52^2 x}{0.48^2 x} = \frac{0.52^2}{0.48^2} = \frac{13^2}{12^2} = \frac{169}{144}.$$

Задание 2. Вариант 2. Участниками чемпионата по вольной борьбе являются мужчины и женщины. Количество женщин составляет 56 % от общего числа участников, а их суммарный вес — 44 % общего веса участников. Найдите отношение среднего веса мужчин к среднему весу женщин. Ответ выразите в виде обыкновенной дроби.

Ответ: 196/121

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 2. Вариант 3. Участниками чемпионата по вольной борьбе являются мужчины и женщины. Количество женщин составляет 54 % от общего числа участников, а их суммарный вес — 46 % общего веса участников. Найдите отношение среднего веса мужчин к среднему весу женщин. Ответ выразите в виде обыкновенной дроби.

Ответ: 729/529

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 2. Вариант 4. Участниками чемпионата по вольной борьбе являются мужчины и женщины. Количество женщин составляет 58 % от общего числа участников, а их суммарный вес — 42 % общего веса участников. Найдите отношение среднего веса мужчин к среднему весу женщин. Ответ выразите в виде обыкновенной дроби.

Ответ: 841/441

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 1. Петя переписал в тетрадь два двузначных числа с доски и перемножил их. Он сделал ошибку в одном из чисел: написал десятки на месте единиц, а единицы на месте десятков, поэтому результат оказался на 1449 больше, чем должен был быть. Какие числа были записаны на доске?

Укажите все подходящие варианты. Для каждой возможной пары чисел в качестве ответа запишите их сумму.

Ответ:

✓ 41

✓ 52

Решение.

Пусть исходные двузначные числа имеют вид $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$. Тогда из условия следует, что

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} + 1449 = \overline{ab} \cdot \overline{dc}.$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\overline{ab}(\overline{dc} - \overline{cd}) = 1449. \Leftrightarrow \overline{ab} \cdot 9(d - c) = 1449 \Leftrightarrow \overline{ab} \cdot (d - c) = 161 = 23 \cdot 7.$$

Так как 23 — простое число, a, d, c — цифры, последнее равенство возможно, только если $d - c = 7$ и $\overline{ab} = 23$.

Так как d, c — цифры и $c \neq 0$, либо $d = 8, c = 1$, либо $d = 9, c = 2$.

Получаем две пары чисел $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$: (23, 18) и (23, 29). Проверкой убеждаемся, что они подходят. Суммы чисел в парах равны 41 и 52 соответственно.

Задание 3. Вариант 2. Петя переписал в тетрадь два двузначных числа с доски и перемножил их. Он сделал ошибку в одном из чисел: написал десятки на месте единиц, а единицы на месте десятков, поэтому результат оказался на 1197 больше, чем должен был быть. Какие числа были записаны на доске?

Укажите все подходящие варианты. Для каждой возможной пары чисел в качестве ответа запишите их сумму.

Ответ:

✓ 37

✓ 48

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 3. Петя переписал в тетрадь два двузначных числа с доски и перемножил их. Он сделал ошибку в одном из чисел: написал десятки на месте единиц, а единицы на месте десятков, поэтому результат оказался на 1827 больше, чем должен был быть. Какие числа были записаны на доске?

Укажите все подходящие варианты. Для каждой возможной пары чисел в качестве ответа запишите их сумму.

Ответ:

✓ 48

✓ 58

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 3. Вариант 4. Петя переписал в тетрадь два двузначных числа с доски и перемножил их. Он сделал ошибку в одном из чисел: написал десятки на месте единиц, а единицы на месте десятков, поэтому результат оказался на 1071 больше, чем должен был быть. Какие числа были записаны на доске?

Укажите все подходящие варианты. Для каждой возможной пары чисел в качестве ответа запишите их сумму.

Ответ:

✓ 35

✓ 46

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 1. Компьютер генерирует 2 натуральных случайных числа x, y в диапазоне от 1 до 32. На плоскости рассматривается точка A с координатами (x,y). Какова вероятность, что расстояния от точки A до точек с координатами (1,1), (1,32), (32,1), (32,32) попарно различны? Ответ выразите в виде обыкновенной дроби.

Ответ: 15/16

Решение.

Заметим, что всего различных точек с координатами в диапазоне от 1 до 32 будет $32 \cdot 32 = 1024$.

Точки с координатами (1,1), (1,32), (32,1), (32,32) являются вершинами квадрата со стороной 32.

Оси симметрии квадрата — это его диагонали и прямые, проходящие через середины противоположных сторон.

Расстояния от A до вершин квадрата попарно различны тогда и только тогда, когда точка A не лежит на осях симметрии квадрата.

Заметим, что средние линии данного квадрата не проходят через целочисленные точки, поэтому ни одна из наших случайных точек на средних линиях не окажется. Тогда достаточно исключить точки диагоналей. На каждой из диагоналей квадрата находится по 32 точки с целыми координатами, при этом точка пересечения диагоналей не целочисленная, поэтому дважды мы ничего не посчитаем. Значит, вероятность того, что расстояния от сгенерированной точки до вершин квадрата попарно различны, равна $\dfrac{1024-32-32}{1024} = \dfrac{960}{1024} = \dfrac{15}{16}$.

Задание 4. Вариант 2. Компьютер генерирует 2 натуральных случайных числа x, y в диапазоне от 1 до 34. На плоскости рассматривается точка A с координатами (x,y). Какова вероятность, что расстояния от точки A до точек с координатами (1,1), (1,34), (34,1), (34,34) попарно различны? Ответ выразите в виде обыкновенной дроби.

Ответ: 16/17

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 3. Компьютер генерирует 2 натуральных случайных числа x, y в диапазоне от 1 до 28. На плоскости рассматривается точка A с координатами (x,y). Какова вероятность, что расстояния от точки A до точек с координатами (1,1), (1,28), (28,1), (28,28) попарно различны? Ответ выразите в виде обыкновенной дроби.

Ответ: 13/14

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 4. Вариант 4. Компьютер генерирует 2 натуральных случайных числа x, y в диапазоне от 1 до 26. На плоскости рассматривается точка A с координатами (x,y). Какова вероятность, что расстояния от точки A до точек с координатами (1,1), (1,26), (26,1), (26,26) попарно различны? Ответ выразите в виде обыкновенной дроби.

Ответ: 12/13

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 5. Вариант 1.

Пусть a, b — целые числа, такие, что все корни уравнения

$$(x^2 - ax + 20)(x^2 + 17x + b) = 0$$

являются отрицательными целыми числами. Найдите наименьшее возможное значение числа a и наименьшее возможное значение числа b.

Ответ: $a = -21$, $b = 16$

Решение.

Каждая из скобок в левой части представляет собой приведённый квадратный трёхчлен, имеющий не более двух корней. Корни каждого из трёхчленов не зависят от корней другого трёхчлена, поэтому можно их рассматривать отдельно.

Рассмотрим сначала случай, когда $x^2 - ax + 20 = 0$ не имеет корней. Тогда $D = a^2 - 80 < 0$ и $a \in (-4\sqrt{5};\ 4\sqrt{5})$. Заметим, что в этом случае $a > -9$. Покажем теперь, что если уравнение имеет корни, то a может быть меньше.

Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 - ax + 20 = 0$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = a$, $x_1 \cdot x_2 = 20$. Так как оба корня по условию отрицательные, то $a < 0$ значит нужно найти такие целые отрицательные делители числа 20, что их сумма окажется максимальной по модулю. Пусть $20 = m \cdot n, m < n$. Рассмотрим все такие m и n: $20 = (-1)\cdot(-20) = (-2)\cdot(-10) = (-4)\cdot(-5)$. Из этих чисел максимальную по модулю сумму дадут -1 и -20, тогда $a = -21$.

Рассмотрим уравнение $x^2 + 17x + b = 0$. Если оно не имеет корней, то $D = 289 - 4b < 0$, отсюда следует, что $b > 72$. Покажем, что если уравнение имеет корни, то b может быть меньше.

Пусть x_3, x_4 — корни уравнения $x^2 + 17x + b = 0$. По теореме Виета $x_3 + x_4 = -17$, $x_3 \cdot x_4 = b$. Так как число b является произведением двух отрицательных чисел, оно должно быть положительно. Значит нужно найти целые отрицательные числа, дающие -17 в сумме и минимальное по модулю произведение. При фиксированной сумме произведение будет минимальным, если числа находятся максимально далеко друг от друга. Действительно, для чисел $n-a$ и $n+a$ $(a \geq 0)$ с фиксированной суммой $n-a+n+a=2n$ их произведение $(n-a)(n+a)=n^2-a^2$ тем меньше, чем больше a. Получается, что $x_3=-1, x_4=-16$ значит $b=16$.

Задание 5. Вариант 2. Пусть a, b – целые числа, такие, что все корни уравнения

$$(x^2-ax+22)(x^2+15x+b)=0$$

являются отрицательными целыми числами. Найдите наименьшее возможное значение числа a и наименьшее возможное значение числа b.

Ответ: $a=-23$, $b=14$

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 5. Вариант 3. Пусть a, b — целые числа, такие, что все корни уравнения

$$(x^2-ax+25)(x^2+19x+b)=0$$

являются отрицательными целыми числами. Найдите наименьшее возможное значение числа a и наименьшее возможное значение числа b.

Ответ: $a=-26$, $b=18$

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 5. Вариант 4. Пусть a, b — целые числа, такие, что все корни уравнения

$$(x^2-ax+23)(x^2+13x+b)=0$$

являются отрицательными целыми числами. Найдите наименьшее возможное значение числа a и наименьшее возможное значение числа b.

Ответ: $a=-24$, $b=12$

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 6. Вариант 1. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, k$. Двое игроков по очереди вычёркивают по одному числу. Если после очередного хода сумма невычеркнутых чисел стала кратна 3, то игра заканчивается и сделавший последний ход проигрывает. При каком k игрок, ходящий вторым, имеет выигрышную стратегию? Выберите все подходящие варианты.

Ответ:

- 20
- ✓ 25
- 26
- ✓ 27

Решение.

Рассмотрим все значения k по модулю 6.

1) Пусть $k=6n+1$. Сумма всех чисел на доске равна $(6n+1)(6n+2)/2=(6n+1)(3n+1) \equiv 1 \pmod 3$. Кроме того, на доске по $2n$ чисел дающих остатки 0 и 2 от деления на 3, и $2n+1$ число, дающее остаток 1 от деления на 3. Выигрывает второй игрок. Его стратегия состоит в том, что если первый взял своим предыдущим ходом число a, то второй берёт такое b, что $a+b \,\vdots\, 3$.

Если $a \equiv 1 \pmod 3$, то первый проиграет, сделав свой первый ход, так как сумма всех чисел даёт остаток 1 от деления на 3. Можно считать, что $a \not\equiv 1 \pmod 3$.

Если $a \equiv 0 \pmod 3$, то и $b \equiv 0 \pmod 3$, поэтому нужное b найдётся, ведь на доске чётное количество остатков 0.

Если $a \equiv 2 \pmod 3$, то $b \equiv 1 \pmod 3$, поэтому нужное b найдётся, ведь на доске остатков 1 больше, чем остатков 2.

Осталось заметить, что после обмена ходов сумма всех чисел на доске сохраняет остаток 1 от деления на 3; количество остатков 0 сохраняет чётность; число остатков 1 остаётся больше числа остатков 2, поэтому у второго игрока всегда есть ход.

2) Пусть $k=6n+2$. Выигрывает первый игрок. Своим первым ходом от берёт число $6n+2$, после чего действует по стратегии второго игрока из предыдущего случая $k=6n+1$.

3) Пусть $k=6n+3$. Сумма всех чисел на доске равна $(6n+3)(6n+4)/2=(6n+3)(3n+2) \equiv 0 \pmod 3$. Кроме того, на доске по $2n+1$ чисел, дающих остатки 0, 1 и 2 от деления на 3.

Выигрывает второй игрок.

Своим первым ходом первый не может взять остаток 0, поэтому он берёт остаток 1 или 2. Обозначим взятый остаток за t. Второй ответным ходом берёт остаток 0. Если $t=2$, то далее второй действует по стратегии, описанной для случая $k = 6n + 1$. Если $t = 1$, то теперь сумма чисел на доске даёт остаток 2 от деления на 3; на доске по $2n$ чисел, дающих остатки 0 и 1 от деления на 3, и $2n + 1$ число, дающее остаток 2 от деления на 3.

Стратегия второго состоит в том, что если первый взял своим предыдущим ходом число a, то второй берёт такое b, что $a + b \,\vdots\, 3$. В обосновании этой стратегии осталось заметить, что после обмена ходов сумма всех чисел на доске сохраняет остаток 2 от деления на 3; количество остатков 0 сохраняет чётность; число остатков 2 остаётся больше числа остатков 1, поэтому у второго игрока всегда есть ход.

Замечание. Аналогично можно доказать, что при $k = 6n + 4$ и $k = 6n$ первый игрок имеет выигрышную стратегию, а при $k = 6n + 5$ выигрышную стратегию имеет второй игрок. В условии задачи не приводятся варианты ответа с такими k, поэтому разбор этих случаев оставляем читателю.

Задание 6. Вариант 2. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, k$. Двое игроков по очереди вычёркивают по одному числу. Если после очередного хода сумма невычеркнутых чисел стала кратна 3, то игра заканчивается и сделавший последний ход проигрывает. При каком k игрок, ходящий вторым, имеет выигрышную стратегию? Выберите все подходящие варианты.

Ответ:

- 32
- 38
- ✓ 39
- ✓ 43

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 6. Вариант 3. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, k$. Двое игроков по очереди вычёркивают по одному числу. Если после очередного хода сумма невычеркнутых чисел стала кратна 3, то игра заканчивается и сделавший последний ход проигрывает. При каком k игрок, ходящий первым, имеет выигрышную стратегию? Выберите все подходящие варианты.

Ответ:

- ✓ 32
- 33
- 37
- ✓ 50

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 6. Вариант 4. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, k$. Двое игроков по очереди вычёркивают по одному числу. Если после очередного хода сумма невычеркнутых чисел стала кратна 3, то игра заканчивается и сделавший последний ход проигрывает. При каком k игрок, ходящий первым, имеет выигрышную стратегию? Выберите все подходящие варианты.

Ответ:

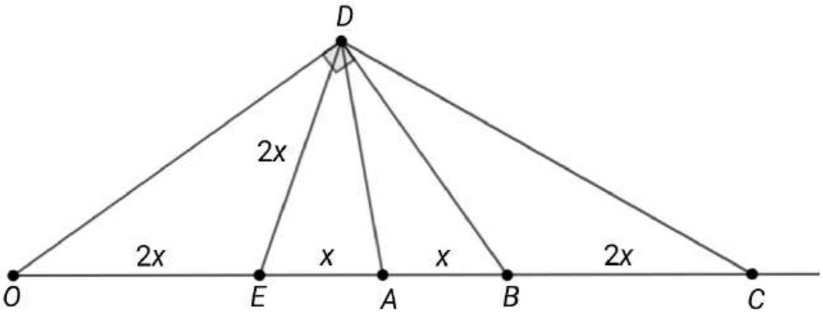
- 33
- 37
- ✓ 38
- ✓ 44

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 1. На луче OA расположены точки B и C так, что $OA : OB : OC = 3 : 4 : 6$. Точка D выбрана так, что OD и DB перпендикулярны. Найдите CD, если $AD = 5$.

Ответ: 10

Решение.



Обозначим OC за $6x$, тогда $OA = 3x$, $OB = 4x$, $AB = OB - OA = x$, $BC = OC - OB = 2x$. Пусть точка E — середина OB, тогда $OE = 1/2\ OB = 2x$, $AE = OA - OE = x$. Медиана DE прямоугольного треугольника ODB равна половине гипотенузы, поэтому $DE = OE = 2x$. Рассмотрим треугольники DEA и CED. Эти треугольники подобны, так как у них общий угол $\angle DEC$ и $\frac{DE}{EC} = \frac{AE}{DE} = \frac{1}{2}$. Из подобия треугольников получаем, что $DC = 2AD = 10$.

Задание 7. Вариант 2. На луче OA расположены точки B и C так, что $OA : OB : OC = 2 : 3 : 6$. Точка D выбрана так, что OD и DB перпендикулярны. Найдите CD, если $AD = 6$.

Ответ: 18

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 3. На луче OA расположены точки B и C так, что $OA : OB : OC = 3 : 4 : 6$. Точка D выбрана так, что OD и DB перпендикулярны. Найдите CD, если $AD = 6$.

Ответ: 12

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 7. Вариант 4. На луче OA расположены точки B и C так, что $OA : OB : OC = 2 : 3 : 6$. Точка D выбрана так, что OD и DB перпендикулярны. Найдите CD, если $AD = 5$.

Ответ: 15

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 1. Компания из десяти человек удовлетворяет условию: если два человека знакомы, то у одного из них не более двух знакомых в этой компании. Найдите наибольшее возможное количество пар знакомых в этой компании.

Ответ: 16

Решение.

Переформулируем задачу на язык графов. Рассмотрим граф, в котором вершины — люди, пары знакомых — рёбра. Требуется найти наибольшее число рёбер в таком графе. Назовём людей (и вершины) *замкнутыми*, если у них не более двух знакомых, а остальные вершины назовём *общительными*.

Заметим, что общительные не знакомы между собой, поэтому хотя бы один конец любого ребра выходит из замкнутой вершины. Следовательно, число рёбер в графе не больше суммы степеней замкнутых вершин.

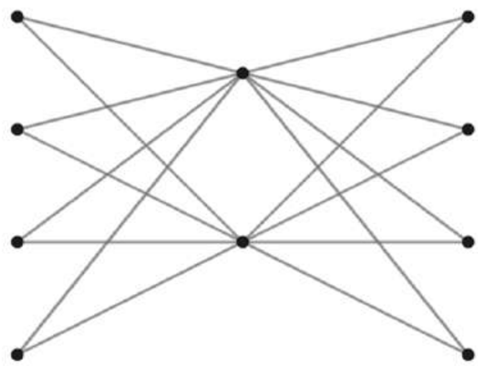
Пусть замкнутых не более 8, тогда рёбер не более $8 \cdot 2 = 16$.

Пусть замкнутых ровно 9. Тогда степень единственной общительной вершины не более 9.

Тогда сумма степеней графа не более $9 \cdot 2 + 9 = 27$, поэтому число рёбер не больше 13.

Пусть замкнутых ровно 10. Тогда число рёбер равно половине суммы степеней, которая, в свою очередь, не превышает $10 \cdot 2 = 20$. Следовательно, число рёбер не больше 10.

Пример графа с 16 рёбрами приведён на рисунке



Задание 8. Вариант 2. Компания из двенадцати человек удовлетворяет условию: если два человека знакомы, то у одного из них не более двух знакомых в этой компании. Найдите наибольшее возможное количество пар знакомых в этой компании.

Ответ: 20

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 3. Компания из четырнадцати человек удовлетворяет условию: если два человека знакомы, то у одного из них не более двух знакомых в этой компании. Найдите наибольшее возможное количество пар знакомых в этой компании.

Ответ: 24

Решение по аналогии с вариантом 1

Задание 8. Вариант 4. Компания из шестнадцати человек удовлетворяет условию: если два человека знакомы, то у одного из них не более двух знакомых в этой компании. Найдите наибольшее возможное количество пар знакомых в этой компании.

Ответ: 28

Решение по аналогии с вариантом 1