

Задача 1. Переворачивание карт

На столе рубашкой вверх лежали 54 карты. Сначала Аня перевернула какие-то 40 карт. Затем Боря перевернул какие-то 27 карт (он мог переворачивать и те карты, которые раньше перевернула Аня). Наконец, Вера перевернула 31 карту по своему выбору. В итоге все карты оказались лежащими рубашкой вниз.

Ответьте на вопросы.

1. Сколько карт было перевернуто ровно один раз?
2. Сколько карт было перевернуто ровно два раза?
3. Сколько карт было перевернуто ровно три раза?
4. Сколько карт перевернула только Аня (то есть эти карты перевернула Аня, а другие дети не переворачивали их)?
5. Сколько карт перевернул только Боря?
6. Сколько карт перевернула только Вера?

В ответе запишите 6 чисел, каждое число в отдельной строке, никаких других символов, кроме чисел ответа, писать не нужно. Если вы не можете ответить на какой-нибудь вопрос, напишите в ответе любое число.

Задача 2. Разнобуквенные подстроки

Подстрока называется разнобуквенной, если в ней каждая буква встречается не более чем один раз. Вася любит играть со словами следующим образом. Он берёт обычное слово и находит все его разбиения на подстроки, такие что каждая из них является разнобуквенной. Например, слово «*aba*» можно разбить на разнобуквенные подстроки четырьмя способами:

a b a

a ba

ab a

Однако у Васи не всегда получается правильно разбить слово. Помогите ему найти все разбиения слова «*data*» на разнобуквенные подстроки. Подстроки в разбиении не могут быть пустыми.

В ответе запишите все необходимые разбиения в любом порядке, по одному разбиению в строке. Подстроки разбиения разделяйте пробелами. Ничего, кроме строк разбиения, писать не нужно.

Замечание

Подстрока — это последовательность подряд идущих символов, входящих в состав данной строки.

Задача 3. Ожерелье из цифр

У вас есть неограниченное число бусинок, на которых написаны цифры от 1 до 5. Из этих бусинок нужно составить ожерелье. *Гармоничностью* двух соседних бусинок назовём сумму цифр на них.

Вы хотите составить ожерелье, в котором гармоничность соседних бусинок принимала бы все возможные значения от 2 до 10 в любом порядке. Некоторые значения гармоничностей могут повторяться, но вы хотите использовать наименьшее количество бусинок.

В ответ запишите последовательность цифр от 1 до 5, разделяя их пробелами. Вы получите баллы за эту задачу только в том случае, если среди сумм пар соседних чисел (а также суммы последнего и первого числа в ответе) встретятся все числа от 2 до 10. Чем меньше цифр будет в вашем ответе, тем больше баллов вы получите.

Хотя мы записываем цифры на бусинах в ряд, первая и последняя бусинки в ряду также являются соседними. Например, если на нитку надеть бусинки «2, 4, 1, 5», то гармоничности соседних бусинок будут равны 6, 5, 6, 7 (т.к. $5 + 2 = 7$).

Задача 4. Москва-2050

В московское метро наконец-то прибыл новый поезд «Москва-2050». Его отличительной особенностью являются новые табло для отображения номера маршрута. Табло представляет собой два 9-сегментных LCD-дисплея, которые вместе могут отображать все двузначные числа от «00» до «99». Разные цифры отображаются на этом дисплее так, как показано на картинке:



Для изменения номера маршрута на пульте управления поезда существуют две кнопки — кнопка с цифрой 1 увеличивает номер маршрута на табло на единицу, а кнопка с цифрой 2 — увеличивает его в два раза.

При приёме поезда необходимо проверить работоспособность всех сегментов обоих дисплеев, то есть сделать так, чтобы в ходе проверки каждый сегмент загорелся хотя бы один раз. Первоначально на табло отображается номер «00». Помогите найти минимальную последовательность нажатий на кнопки, которая позволит убедиться, что каждый из сегментов на каждом из двух дисплеев исправен.

В ответе запишите последовательность цифр, разделённых пробелами — кнопки, которые необходимо нажать, в порядке нажатия. Например, ответ «1 1 1 2 1» означает, что на табло будут последовательно отображаться номера 00, 01, 02, 03, 06, 07. Чем меньше нажатий будет в вашем ответе, тем больше баллов вы получите.

Задача 5. Редактор

Исполнитель «Редактор» работает со строкой. Первоначально строка пуста. У исполнителя есть следующие команды:

1. «А» — дописать в конец строки букву «А».
2. «В» — дописать в конец строки букву «В».
3. «2» — повторить строку два раза, то есть дописать в конец строки эту же строку.
4. «-» — удалить из строки последний символ. Если же эту команду применить к пустой строке, то она останется пустой.

Например, если редактор выполнит команды «ВА2-», то на доске будет записана строка «ВAB».

Вам необходимо получить строку «АВААВАВАВААВ», начав с пустой строки. Составьте минимальную по длине последовательность команд для исполнителя «Редактор», которая получает эту строку.

В ответ запишите последовательность команд редактора, состоящую из символов «А», «В», «2», «-». Чем меньше команд будет содержать ваш алгоритм, тем больше баллов вы получите.

Разбор задач

Задача 1. Переворачивание карт

Каждая карта сначала лежала рубашкой вверх, а потом — рубашкой вниз, значит, было сделано нечётное число переворотов и количество карт, которые перевернулись два раза, равно 0, а каждая карта перевернулась один или три раза. Общее число карт — 54, а общее число переворотов — 98. На каждую карту пришёлся минимум один переворот, остаётся $98 - 54 = 44$ дополнительных переворота. На одну карту, которую перевернули три раза, нужно два дополнительных переворота, значит, количество карт, которые перевернули три раза, равно $44/2 = 22$, а количество карт, которые перевернули один раз, равно $54 - 22 = 32$.

Теперь ответим на три последних вопроса. Ни одну карту не переворачивало ровно два ребёнка, а 22 карты переворачивали все три ребёнка. Значит, количество карт, которые перевернули Аня, Боря и Вера, равно $40 - 22 = 18$, $27 - 22 = 5$, $31 - 22 = 9$.

Ответ: 32, 0, 22, 18, 5, 9.

Задача 2. Разнобуквенные подстроки

Для начала оценим общее число разбиений. Заметим, что каждый символ строки (кроме первого) может как быть началом некоторой подстроки, так и не быть им (первый гарантированно является началом некоторой подстроки). Тогда общее количество вариантов будет равно 2^{N-1} , где N — длина строки. Для строки «data» число возможных разбиений равно 8. В принципе, можно перебрать все разбиения и оставить только корректные.

Чтобы упростить процесс перебора, можно заметить, что подстроки, начинающиеся в позициях 1 или 2 (в единичной индексации), могут заканчиваться не далее позиции 3 (иначе будет повторение буквы «a»). Подстроки, начинающиеся в позициях 3 и 4, могут идти до конца строки.

Итоговый набор корректных разбиений является таким:

```
d a t a
da t a
d at a
d a ta
da ta
dat a
```

Задача 3. Ожерелье из цифр

Чтобы получить гармоничность, равную 2, в ряду должны встретиться две единицы подряд. Далее будем добавлять к этой последовательности новые цифры так, чтобы получились суммы 3, 4, 5, ..., 10. Получится ряд «1 1 2 2 3 3 4 4 5 5». Мы получили все нужные нам суммы, но после соединения первой и последней бусинок в этом ряду получится сумма 6, которая уже была ранее получена, то есть наше решение не самое лучшее. Но если из двух соседних цифр 3 выбросить одну, то мы выбросим ранее полученную сумму, 6, сохранив все оставшиеся.

Ответ: 1 1 2 2 3 4 4 5 5.

Этот ответ является наилучшим, т.к. в нём все нужные нам суммы встречаются ровно один раз. Есть и другие варианты ответа.

Задача 4. Москва-2050

Все крайние сегменты (как у цифры 0) уже проверены, потому что первоначально отображается число 00. Рассмотрим средние сегменты. Минимальная цифра, при которой отображается средний горизонтальный сегмент — это цифра 3, она же проверяет и все остальные внутренние сегменты. Поэтому нужно постараться получить цифру 3 в старшем разряде, используя минимальное число нажатий. Для этого получим число 01, затем будем умножать на 2: 02, 04, 08, 16, 32, что соответствует последовательности нажатий «1 2 2 2 2». Несложно убедиться, что при этом мы проверим и все внутренние сегменты во втором разряде, например, цифрами 2 и 6.

Быстрее получить цифру 3 в старшем разряде нельзя, поэтому не получится быстрее проверить средний горизонтальный сегмент в первом разряде, значит, это наилучшее решение.

Задача 5. Редактор

Нам нужно получить строку «АВААВАВААВ», при этом желательно использовать операции «2», и избегать операций «–», однако последние можно применить, если после удвоения строки появятся лишние символы.

Можно заметить, что нужная строка начинается со строки «АВА», повторённой два раза. Поэтому для получения «АВААВА» используем последовательность команд «АВА2». После этого идёт буква В, и потом снова строка, начало которой совпадает с тем, что мы уже выписали. Поэтому добавим «В», удвоим строку и удалим два последних символа.

Ответ: АВА2В2—.