

Задачи 2025

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

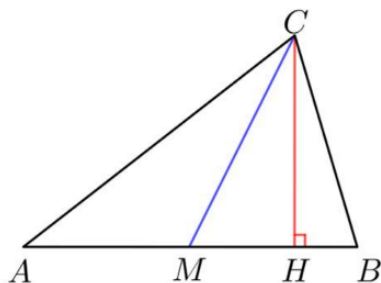
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

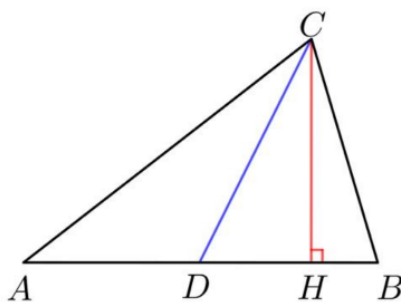
Часть 1

1.1 В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 38° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



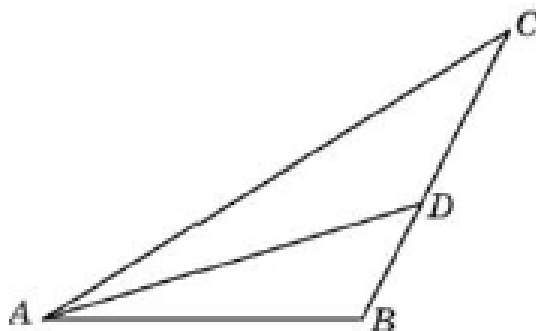
Ответ: 64

1.2 Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен 61° . Найдите угол между высотой CH и биссектрисой CD , проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 16

1.3 В треугольнике ABC угол C равен 50° , AD биссектриса, угол BAD равен 54° . Найдите угол ADB . Ответ дайте в градусах.



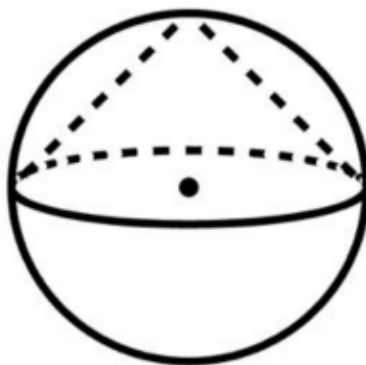
2.1 Даны векторы $\vec{a}(-13; 4)$ и $\vec{b}(-6; 1)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: 82

2.2 Даны векторы $\vec{a}(6; 4)$ и $\vec{b}(6; -8)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

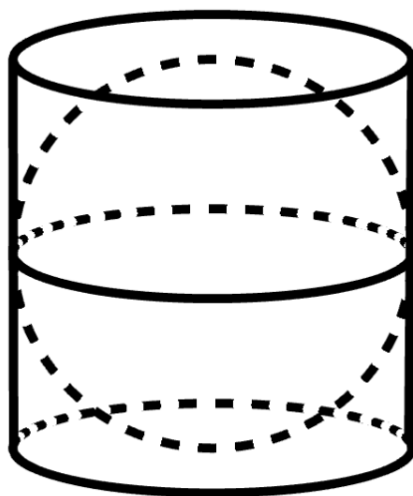
2.3 Даны векторы $\vec{a}(-15; -3)$, $\vec{b}(-3; 4)$ и $\vec{c}(5; 11)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c}$

3.1 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Образующая конуса равна $50\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы.

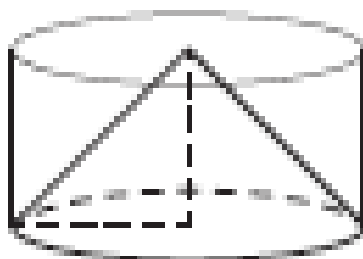


Ответ: 50

3.2 Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 33. Найдите площадь поверхности шара.



3.3 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $26\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



4.1 На олимпиаде по русскому языку 350 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 140 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: 0,2

4.2 На конференцию приехали учёные из трёх стран: 5 из Швеции, 7 из Италии и 4 из Чехии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двенадцатым окажется доклад учёного из Чехии.

5.1 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,1. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах равна 0,05. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Ответ: 0,85

5.2 При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810 г, равна 0,99. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790 г, равна 0,97. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

6.1 Найдите корень уравнения $(\frac{1}{2})^{x-6} = 8^x$

Ответ: 1,5

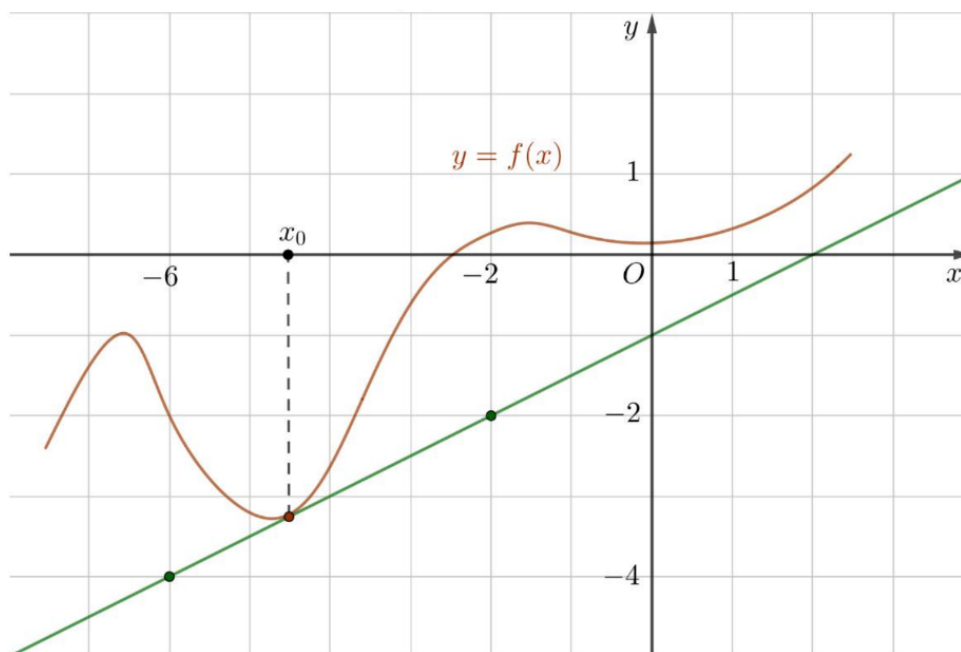
6.2 $(\frac{1}{4})^{x-8} = 64$

7.1 $\frac{\log_2 729}{\log_2 9}$

Ответ: 3

7.2 $\log_2(96) - \log_2(3)$

8. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: 0,5

9.1 16. Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км / ч². Скорость вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l - пройденный автомобилем пути. Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,5 километра, приобрести скорость 80 / ч. Ответ выразите в км / ч².

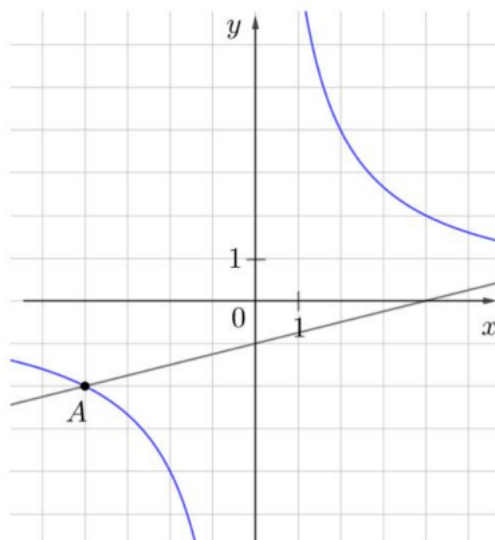
Ответ: 6400

10. От пристани А к пристани В, расстояние между которыми равно 153 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 8 часов после этого следом за ним со скоростью на 8 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода

прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

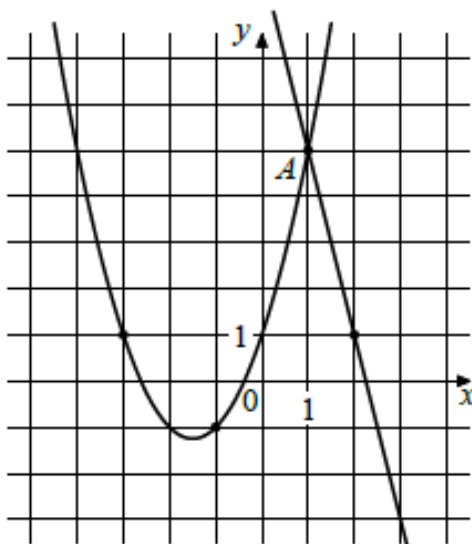
Ответ: 9

11.1 На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, пересекающиеся в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



Ответ: 8

11.2 На рисунке изображены графики функций $f(x) = -4x + 9$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



12. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 9x^2 + 11$

Ответ: 6

Часть 2.

13.1 а) Решите уравнение $2 \sin x + 2\sqrt{2} \sin(-x) - 4 \cos^2 x = \sqrt{2} - 4$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$.

13.2 $2 - 2 \cos(\pi - 2x) + \sqrt{8} \cos x - \sqrt{6} - \sqrt{12} \cos x = 0$

13.3 а) Решите уравнение $2 \cos(2\pi + 2x) - 2 + \sqrt{8} \sin x = -\sqrt{6} + \sqrt{12} \sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; \frac{3\pi}{2}]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$ б) $\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{4\pi}{3}$.

14.1 Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Проведено сечение через ребра SC и SD в точках M и N и через ребро AB . $AB = BM = AN = 4MN$.

а) Доказать, что точки M и N делят стороны в отношении $1 : 3$

б) Найти \cos между $ABCD$ и плоскостью сечения.

14.2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $A_1M = 2AM, A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно грани ABB_1A_1 .

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1 .

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α , если все ребра призмы равны 20.

15.1 Решите неравенство:

15.2
$$\frac{2^{3x} - 4 \cdot 2^{2x+1} + 5 \cdot 2^{x+2} - 16}{x - 1} \geq 0$$

15.3
$$\frac{(27^{x+1} - 9^{x+2} + 3^{x+4} - 27)_0}{(50x^2 + 70x + 24, 5)}$$

15.4
$$\frac{27^x - 9^{x+1} + 5^{3+x} - 27}{50x^2 - 110x + 60, 5} \geq 0$$

Ответ: $x \in [1; \frac{11}{10}) \cup (\frac{11}{10}; +\infty)$.

15.5
$$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{4x^2 - 8 \cdot 2x^2 + 16}$$

15.6
$$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{2x^2 - 4 \cdot 2x^2 + 64} \leq 0$$

15.7
$$\frac{27^x - 3 \cdot 9^{x+1} + 3^{x+5} - 729}{50x^2 + 10x + 0, 5} \leq 0.$$

15.8
$$\frac{27x^3 + 9x^2 - 3x - 1}{64x^2 - 4 \cdot 8x^2 + 4} \geq 0.$$

16.1 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 14 млн рублей на некоторое целое число лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года. На сколько лет взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 24,5 млн рублей?

16.2 15 декабря 2026 года взяли кредит в размере A млн. рублей на срок 48 месяцев. Условия выплаты кредита таковы:

1-ого числа каждого месяца на оставшуюся сумму долга начисляются проценты в размере 1% от оставшейся суммы долга.

с 1 -ого по 15 -ое число каждого месяца должна быть произведена выплата.

Каждый следующий месяц долг должен быть на одну и ту же величину меньше к 2030 году долг должен быть выплачен полностью B в каком размере был взят кредит в A млн. рублей, если известно, что общая сумма выплат после погашения кредита составила 6390 тыс. рублей?

16.3 15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на 60 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2 -го по 14 -е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15 декабря 2031 года кредит должен быть полностью погашен. Чему равно r , если общая сумма платежей в 2031 году составила 3951 тыс. рублей?

Ответ 1,5

17.1 В треугольнике ABC проведены высота AH и медиана AM , угол ACB равен 30° . Точка H лежит на отрезке BM . В треугольнике ACM проведена высота MQ . Прямые MQ и AH пересекаются в точке F . Известно, что AM - биссектриса угла HAC .

- а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- б) Найдите площадь треугольника CFM , если $AB = 10$.

Ответ $25\sqrt{3}$

17.2 В четырёхугольнике $KLMN$ вписана окружность с центром в точке O . Эта окружность касается стороны MN в точке A , $\angle N = 90^\circ$, $\angle K = \angle L = 120^\circ$.

- а) Докажите что точка O лежит на прямой LA .
- б) Найдите MN , если $LA = 3$.

17.3 Дан параллелограмм $ABCD$ угол BAD острый. Проведены высоты BP и BQ . На AD отмечена точка M . Известно, что $BP = AM$ и $AB = BQ$.

- а) Докажите, что $BP = PQ$.
- б) Найдите площадь треугольника APQ , если $BP = AM = 8$, $AB = BQ = 10$.

18.1 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(5x + |x - a^2| - 4|x + 1| - a^2)^2 + (a + 2)(5x + |x - a^2| - 4|x + 1| - a^2) + 1 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{25}{4}) \cup (-\frac{25}{4}; -4) \cup (0; +\infty)$.

18.2 Найдите все значения a , при которых уравнение

$$(|x - a^2| + |x + 2|)^2 - 11(|x - a^2| + |x + 2|) + 2a^2 + 24 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

18.3 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(7x + |x + a - 1| - 6|x + a + 1| + 7a)^2 - a(7x + |x + a - 1| - 6|x + a + 1| + 7a) + 1 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

19. На доске написано 10 различных натуральных чисел. Известно, что среднее арифметическое любых четырех или любых семи чисел является целым числом. а) Могут ли на доске одновременно быть записаны числа 563 и 1417 ?

б) Может ли одно из написанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если на доске есть число 563 ?

в) Найдите минимальное n , при котором на доске одновременно записаны числа 1 и n^2 .

Ответ: а) Нет, не могут

б) Нет, не может

в) 13 .

19.1 На доске записано k последовательных натуральных чисел. Оказалось, что среди них чисел, делящихся на 20, меньше, чем чисел, делящихся на 23.

а) Могло ли среди записанных чисел быть ровно три числа, делящихся на 20?

б) Могло ли среди записанных чисел быть ровно десять чисел, делящихся на 20 ?

в) Найдите наибольшее возможное значение k .

Доп. материалы:

Ссылка на Youtube: [перейти](#)

Ссылка на группу ВК: [перейти](#)

Ссылка на телеграм: [перейти](#)