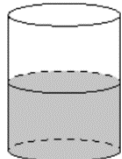




3 В цилиндрический сосуд налили 2800 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 16 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 13 см. Найдите объём детали. Ответ выразите в куб. см.



Ответ: _____.

4 В группе туристов 300 человек. Их вертолётном доставляют в труднодоступный район, перевоза по 15 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист В. полетит первым рейсом вертолёта.

Ответ: _____.

5 В коробке 11 синих, 6 красных и 8 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Найдите вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры.

Ответ: _____.

6 Найдите корень уравнения

$$(5x - 8)^2 = (5x - 2)^2.$$

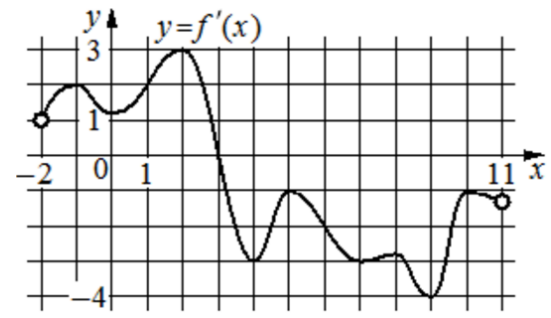
Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения

$$\frac{81^{2,6}}{9^{3,7}}.$$

Ответ: _____.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 11)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Ответ: _____.

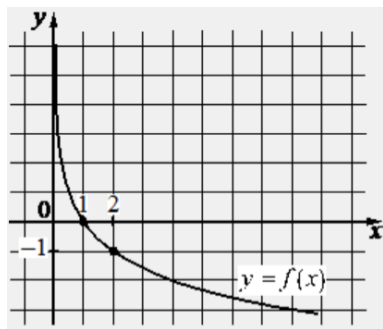
9 Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 – давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 – объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 294,4 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

Ответ: _____.

10 В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(8)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = (x^2 - 39x + 39) \cdot e^{2-x}$ на отрезке $[0; 6]$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение

$$8 \cdot 16^{\sin^2 x} - 2 \cdot 4^{\cos 2x} = 63.$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{7\pi}{2}; 5\pi]$.

- 14 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q – середины рёбер $A_1 B_1$ и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро $B_1 C_1$ в точке U .

- а) Докажите, что $B_1 U : UC_1 = 2 : 1$.

- б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью APQ .

- 15 Решите неравенство

$$\frac{\log_3 x^2 - \log_5 x^2}{\log_{15}^2(2x^2 - 6x + 4,5) + 1} \geq 0.$$

- 16 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?



17 На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = AB$. Прямая, проходящая через точку A , параллельно BD , пересекает сторону BC в точке M .

- а) Докажите, что AM – биссектриса треугольника ABC .
 б) Найти S_{AMBD} , если $AC = 10$, $BC = 8$ и $AB = 6$.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2^x - a} + \frac{a - 1}{\sqrt{2^x - a}} = 1$$

имеет ровно два различных корня.

19 Пять различных натуральных чисел таковы, что никакие два из них не имеют общего делителя, большего 1.

- а) Может ли сумма этих чисел быть равной 26?
 б) Может ли сумма этих чисел быть равной 23?
 в) Какова их минимальная сумма?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.




















СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

| | |
|-----------------|---|
| ФИО: | Евгений Пифагор |
| Предмет: | Математика |
| Стаж: | 13 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ |
| Регалии: | Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике (профиль) Результаты моих учеников на ЕГЭ 2024: Елена – 100 баллов Дака – 100 баллов Сева – 100 баллов Дмитрий – 100 баллов Андрей – 100 баллов Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике |
| ВК: | https://vk.com/shkolapifagora |
| Ютуб: | https://www.youtube.com/c/pifagor1 |



Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

| Номер задания | Правильный ответ | Видео решение |
|---------------|--|---|
| 1 | 137,25 |  |
| 2 | 11 |  |
| 3 | 2275 |  |
| 4 | 0,05 |  |
| 5 | 0,22 |  |
| 6 | 1 |  |
| 7 | 27 |  |
| 8 | 3 |  |
| 9 | 9,2 |  |
| 10 | 20 |  |
| 11 | -3 |  |
| 12 | -35 |  |
| 13 | а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{11\pi}{3}; \frac{13\pi}{3}; \frac{14\pi}{3}$ |  |
| 14 | $\frac{11\sqrt{3}}{2}$ |  |
| 15 | $(-\infty; -1] \cup [1; 1,5) \cup (1,5; +\infty)$ |  |
| 16 | 80,5 млн |  |
| 17 | 23,4 |  |
| 18 | $\left(1; \frac{5}{4}\right)$ |  |
| 19 | а) да б) нет в) 18 |  |

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



15 Решите неравенство

$$\frac{\log_3 x^2 - \log_5 x^2}{\log_{15}(2x^2 - 6x + 4,5) + 1} \geq 0.$$

Заметим, что $\log_{15}^2(2x^2 - 6x + 4,5) + 1 > 0$ при $2x^2 - 6x + 4,5 > 0$ и $2x^2 - 6x + 4,5 \neq 1$
 $4x^2 - 12x + 9 > 0$
 $(2x - 3)^2 > 0$
 $2x - 3 \neq 0$
 $x \neq 1,5$

ИСТОЧНИКИ

ГПР (новый банк)
 Основная школа 2023

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

- $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$
- $\log_a \frac{c}{b} = \log_a c - \log_a b$
- $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

Получаем $\log_3 x^2 - \log_5 x^2 \geq 0$
 $\begin{cases} \log_3 x^2 - \frac{\log_2 x^2}{\log_2 5} \geq 0 \\ x \neq 1,5 \end{cases} \quad | \cdot \log_3 5$

$$\begin{cases} \log_3 x^2 \cdot \log_3 5 - \log_3 x^2 \geq 0 \\ x \neq 1,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3 x^2 \cdot (\log_3 5 - 1) \geq 0 \\ x \neq 1,5 \end{cases} \quad | : (\log_3 5 - 1)$$

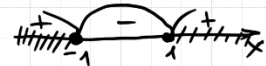
$$\begin{cases} \log_3 x^2 \geq \log_3 1 \\ x \neq 1,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^2 > 0 \\ x \neq 1,5 \end{cases}$$

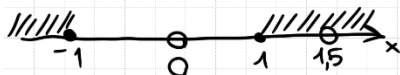
$$\begin{cases} 1) x^2 - 1 \geq 0 \\ (x-1)(x+1) \geq 0 \end{cases}$$

$$2) x \neq 1,5$$

$$3) \begin{cases} x^2 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$



Найдём пересечение:



Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; 1,5) \cup (1,5; +\infty)$

| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек | 1 |

| ИЛИ | |
|--|---|
| получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 0 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | |
| <i>Максимальный балл</i> | 2 |

16 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платеж составит 9 млн рублей?

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
 ГПР (новый банк)
 Основная школа 2019
 Основная школа 2017
 Материалы для экспертов ЕГЭ

Пусть n - срок кредита
 июль - июль

Дата | Сумма долга

1 | 28 млн

2 | $28 \cdot 1,25 = 35$

3 | $28 - \frac{28}{n}$ \Rightarrow было $35 - (28 - \frac{28}{n}) = 7 + \frac{28}{n} = 9 \quad n = 14$

4 | $35 - \frac{35}{n}$ \Rightarrow б.в. $7 + \frac{21}{n}$

5 | $28 - 2 \cdot \frac{28}{n}$ \Rightarrow б.в. $7 + \frac{14}{n}$

6 | $35 - \frac{35}{n}$ \Rightarrow б.в. $7 + \frac{14}{n}$

7 | $28 - 3 \cdot \frac{28}{n}$

8 | $28 - 4 \cdot \frac{28}{n}$

9 | $28 - 5 \cdot \frac{28}{n}$

10 | $28 - 6 \cdot \frac{28}{n}$

11 | $28 - 7 \cdot \frac{28}{n}$

12 | $28 - 8 \cdot \frac{28}{n}$

13 | $28 - 9 \cdot \frac{28}{n}$

14 | $28 - 10 \cdot \frac{28}{n}$

15 | $28 - 11 \cdot \frac{28}{n}$

16 | $28 - 12 \cdot \frac{28}{n}$

17 | $28 - 13 \cdot \frac{28}{n}$

18 | $28 - 14 \cdot \frac{28}{n} = 0$

Итого: $9 + 2,5 + \dots + 2,5 = 80,5$ млн

Вариант ариф. прогр. Воспользуемся ф-той: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

О.С.В. = $\frac{9 + 2,5}{2} \cdot 14 = 80,5$ млн

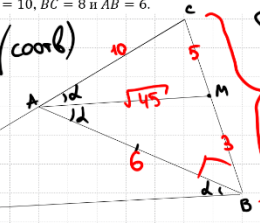
| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно построена математическая модель | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| <i>Максимальный балл</i> | 2 |





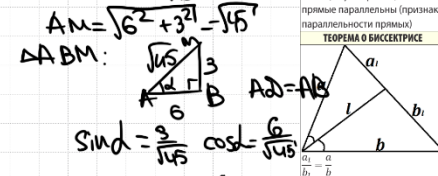
17 На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = AB$. Прямая, проходящая через точку A , параллельно BD , пересекает сторону BC в точке M .
 а) Докажите, что AM — биссектриса треугольника ABC .
 б) Найдите $S_{\Delta MBD}$, если $AC = 10$, $BC = 8$ и $AB = 6$.

а) Пусть $\angle CAM = \alpha$ (короб)
 Тогда $\angle CMB = \alpha$
 $\angle ABD = \alpha$, $\angle CDB$
 (т.к. $\Delta ABD \sim \Delta MBD$)
 $\angle BAM = \alpha = \angle ABD$
 (накрест. углы)
 Получаем $\angle CAM = \alpha = \angle BAM$
 AM — биссектриса ΔABC



б) По т. о бис.:
 $\frac{CM}{BM} = \frac{AC}{AB} = \frac{10}{6}$
 $CM = 5$
 $BM = 3$

② Заметим, в ΔABC вош. т. Пиф.
 $10^2 = 6^2 + 8^2$
 значит $\angle B = 90^\circ$
 $AM = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$
 ΔABM : $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{45}}$, $\cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{45}}$



③ ΔABD : $\sin \alpha = \frac{AH}{6} = \frac{3}{\sqrt{45}}$
 $AH = \frac{18}{\sqrt{45}}$
 $\cos \alpha = \frac{BD}{6} = \frac{6}{\sqrt{45}}$
 $BD = \frac{36}{\sqrt{45}}$
 $BD = \frac{72}{\sqrt{45}}$

$$S_{\text{треу}} = \frac{\frac{72}{\sqrt{45}} + \frac{18}{\sqrt{45}}}{2} \cdot \frac{18}{\sqrt{45}} = \frac{117}{\sqrt{45}} \cdot \frac{18}{\sqrt{45}} = \frac{13 \cdot 9}{5} = \frac{117}{5}$$

Ответ: 23,4.

ИСТОЧНИКИ

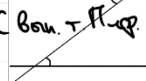
Основная волна 2016
 СООТВЕТСТВЕННЫЕ УГЛЫ

Если соответственные углы равны, то прямые параллельны (признак параллельности прямых)

НАКРЕСТ ЛЕЖАЩИЕ УГЛЫ

Если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны (признак параллельности прямых)

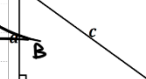
ТЕОРЕМА О БИСЕКТРИСЕ



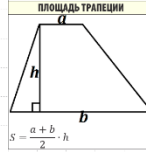
ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ



$c^2 = a^2 + b^2$



| Содержание критерия | Баллы |
|---|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b | 3 |
| Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | |
| | 3 |



18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2^x - a} + \frac{a-1}{\sqrt{2^x - a}} = 1$$

имеет ровно два различных корня.

ИСТОЧНИКИ

ЕГЭ (старый банк)
ЕГЭ (новый банк)
Основная волна 2016

Пусть $\sqrt{2^x - a} = t \quad t > 0$

Выразим x :

$$2^x - a = t^2$$

$$2^x = t^2 + a$$

$$x = \log_2(t^2 + a)$$

$$t + \frac{a-1}{t} - 1 = 0$$

$$\frac{t^2 - t + a - 1}{t} = 0$$

Конечно же у нас $t^2 - t + a - 1 = 0$ и имеет 2 разных корня

$$D = 1 - 4 \cdot (a - 1) = 1 - 4a + 4 = 5 - 4a$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5 - 4a}}{2}$$

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{5 - 4a}}{2} \quad t_2 = \frac{1 - \sqrt{5 - 4a}}{2}$$

- 1) $D > 0$
- 2) $t_1 > 0$
- 3) $t_2 > 0$

1) $5 - 4a > 0$
 $5 > 4a$
 $a < \frac{5}{4}$

2) $\frac{1 + \sqrt{5 - 4a}}{2} > 0 \quad | \cdot 2$
 $1 + \sqrt{5 - 4a} > 0$
 $5 - 4a \geq 0$
 $a \leq \frac{5}{4}$

3) $\frac{1 - \sqrt{5 - 4a}}{2} > 0 \quad | \cdot 2$
 $1 - \sqrt{5 - 4a} > 0$
 $\sqrt{5 - 4a} < 1$
 $0 \leq 5 - 4a < 1 \quad | -5$
 $-5 \leq -4a < -4 \quad | \cdot (-\frac{1}{4})$
 $\frac{5}{4} \geq a > 1$
 $1 < a \leq \frac{5}{4}$

Найдём пересечение:



Ответ: $(1; \frac{5}{4}]$

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек | 3 |
| С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a | 2 |
| Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | |
| | 4 |

19 Пять различных натуральных чисел таковы, что никакие два из них не имеют общего делителя, большего 1.

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2019
Пробный ЕГЭ 2017

- а) Может ли сумма этих чисел быть равной 26?
- б) Может ли сумма этих чисел быть равной 23?
- в) Какова их минимальная сумма?

Будем работать с: 1 2 3 5 7 11 13 17 19 23...

а) $13 + 7 + 3 + 2 + 1 = 26$
Ответ: а) да

б) Среди данных чисел не может быть 4х и более четных, т.к. у них есть общий делитель 2.
Одно четное число тоже быть не может, т.к. $2 + n + n + n + n = 2 + 4n$ четное, а у нас 23.
Среди пяти чисел не будет четных.

в) Найдём сумму пяти наименьших чисел
 $S \geq 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 11$
 $S \geq 29$
 $\Rightarrow S \neq 23$, т.к. даже без пяти наименьших чисел сумма будет > 23 .
Ответ: б) нет.

г) Сумма любых трех чисел $= 1 + 3 + 5 + 7 = 16$
Вместо 7 можно было выбрать следующее наименьшее или одно четное число.
Вместо 5 - самое маленькое или четное число.
Тогда $S \geq 1 + 2 + 3 + 5 + 7$
 $S \geq 18$

д) Покажем, что $S = 18$ мало быть:
 $1 + 2 + 3 + 5 + 7 = 18$
Ответ: г) да.

| Содержание критерия | Баллы |
|--|-------|
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в | 4 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б | 3 |
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| Максимальный балл | |
| | 4 |



В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 04.04.2023 № 233/552, зарегистрирован Минюстом России 15.05.2023 № 73314)

«81. Проверка экзаменационных работ включает в себя:

1) проверку и оценивание предметными комиссиями ответов на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом <...>, в том числе устных ответов, в соответствии с критериями оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрнадзором <...>

По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют первичные баллы за каждый ответ на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в первичных баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрнадзором.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о первичных баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 13–19, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 13–19 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.

