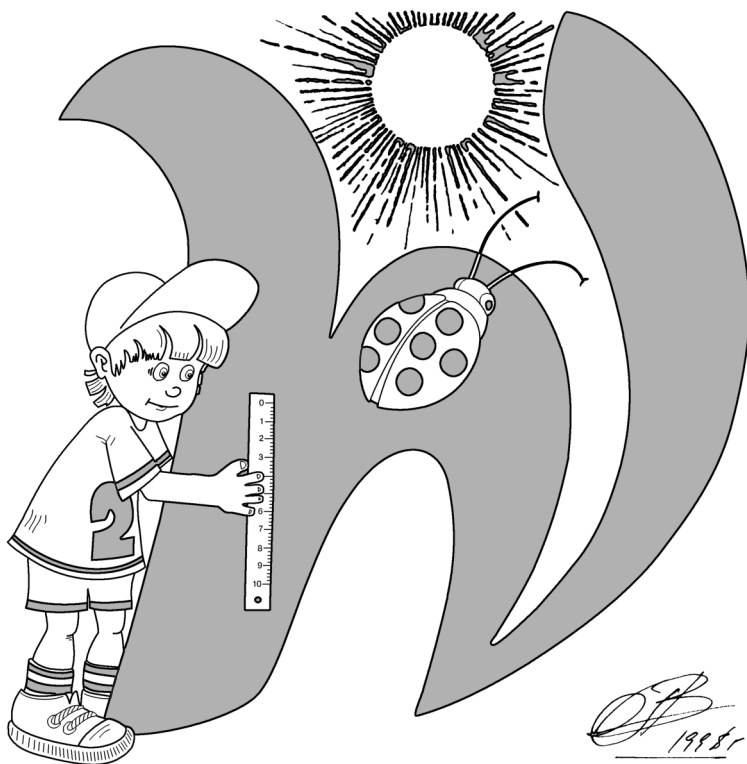


Министерство просвещения Российской Федерации  
Центральная предметно-методическая комиссия  
Всероссийской олимпиады школьников по физике

# LVIII Всероссийская олимпиада школьников по физике

## Заключительный этап

### Теоретический тур



Саранск, 2025 г.

Комплект задач подготовлен  
центральной предметно-методической комиссией  
Всероссийской олимпиады школьников по физике  
E-mail: [physolymp@gmail.com](mailto:physolymp@gmail.com)

## Авторы задач

### 9 класс

- **9-Т1.** Антон Вергунов
- **9-Т2.** Александр Ившин, Егор Васенин, Антон Вергунов
- **9-Т3.** Александр Аполонский, Александр Ершов
- **9-Т4.** Михаил Замятнин, Антон Вергунов
- **9-Т5.** Денис Рубцов

### 10 класс

- **10-Т1.** Анна Шишкина
- **10-Т2.** Иван Юдин
- **10-Т3.** Александр Аполонский
- **10-Т4.** Алексей Заяц
- **10-Т5.** Александр Киреев, Леонид Колдунов

### 11 класс

- **11-Т1.** Александр Аполонский
- **11-Т2.** Константин Соломатин
- **11-Т3.** Григорий Расторгуев
- **11-Т4.** Александр Аполонский
- **11-Т5.** Константин Соломатин

## 9 класс

### Задача №1. Дал Маха

Микрофон, установленный в точке  $A$  горизонтальной поверхности (см. рисунок), зафиксировал сигнал от сверхзвукового самолёта спустя время  $t$  после его пролёта над этой точкой. Ещё через время  $t$  звук начал регистрироваться микрофоном, расположенным в точке  $B$ .

Известно, что первый сигнал, зарегистрированный микрофоном  $B$ , был испущен самолётом из точки  $C$ . Самолёт двигался равномерно и прямолинейно в одной вертикальной плоскости с микрофонами.

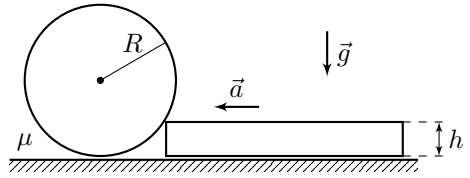


1. С помощью геометрических построений восстановите траекторию полёта самолёта и определите его местоположения в моменты регистрации звуковых сигналов микрофонами.

*Примечание.* Стандартные процедуры геометрических построений считайте известными.

### Задача №2. Сингулярность

На горизонтальной поверхности находятся два тела: длинная доска высотой  $h$  и однородный цилиндр радиусом  $R = 2h$ , которые касаются друг друга (см. рисунок). Масса цилиндра равна  $M$ . Коэффициенты трения между цилиндром и поверхностью, а также между самими телами, одинаковы и равны  $\mu$ .



Доска движется с постоянным горизонтальным ускорением  $a$ , направленным перпендикулярно линии контакта с цилиндром. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

1. При каких значениях ускорения  $a$  доски цилиндр не будет поворачиваться вокруг горизонтальной оси, если коэффициент трения  $\mu$  может принимать любые значения больше нуля?

### Задача №3. Задача трёх тел

В далёкой-далёкой галактике станции инопланетян способны притягивать космические корабли, находящиеся в зоне их действия. Сила притяжения  $\vec{F}$  прямо пропорциональна расстоянию  $\vec{r}$  от станции до корабля:  $\vec{F} = -P\vec{r}$ , где  $P$  — коэффициент силы станции.

Три такие станции расположены в вершинах прямоугольного треугольника с углом  $30^\circ$  и гипотенузой длиной  $l$ . Две станции, находящиеся в вершинах острых углов, характеризуются коэффициентом силы  $P$ , а станция в вершине прямого угла — коэффициентом силы  $2P$ .

В пунктах 1–3 космические станции неподвижны.

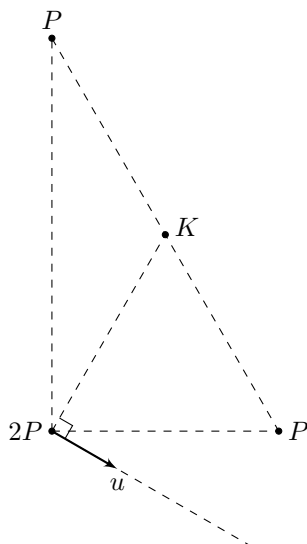
1. Определите расстояния от каждой станции до точки, в которой корабль будет находиться в равновесии.

В начальный момент времени космический корабль массой  $m$  находится на середине гипотенузы треугольника, в вершинах которого находятся станции. Скорость корабля равна нулю, двигатели не работают.

2. Определите максимальную скорость корабля  $v_{\max}$  в процессе дальнейшего движения.

3. На какое минимальное расстояние в процессе движения корабль приблизится к станции, находящейся в вершине прямого угла?

Космический корабль, вновь оказывается в середине гипотенузы с нулевой начальной скоростью. Однако в этот момент времени станция в вершине прямого угла начинает двигаться с постоянной скоростью  $u = 2v_{\max}$  вдоль прямой, перпендикулярной начальному направлению на корабль (см. рисунок). Станции, находящиеся в вершинах острых углов, остаются неподвижными.



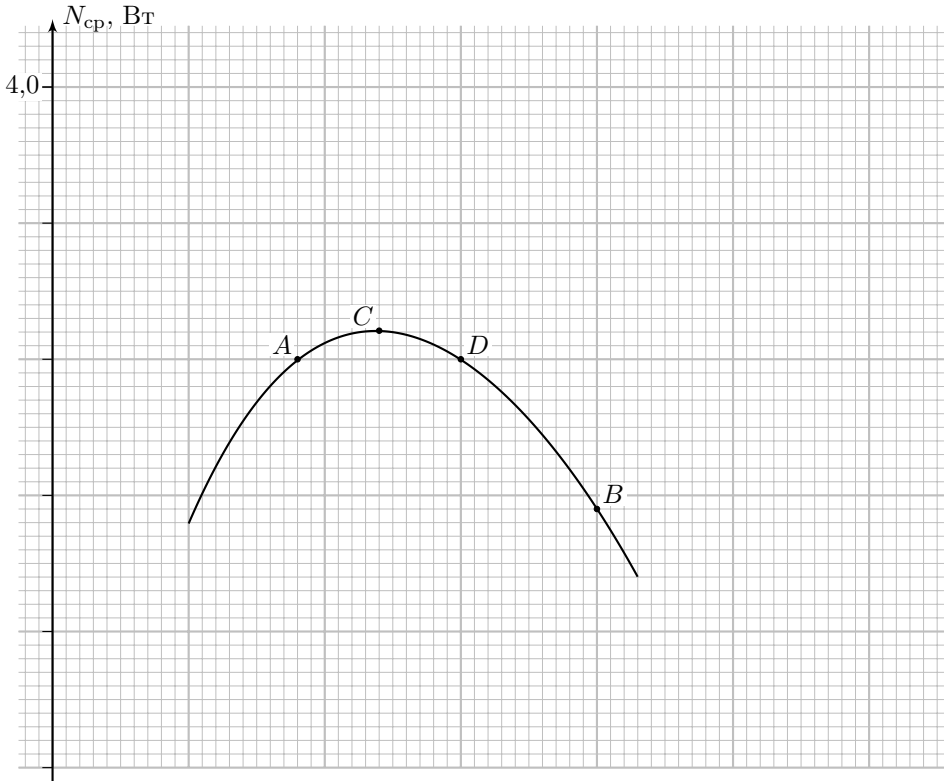
4. Спустя какое время и на каком расстоянии от начального положения корабль впервые остановится?

*Примечание:* все объекты можно считать точечными, на корабль не действуют другие силы, кроме сил притяжения со стороны станций.

#### Задача №4. Горячо–холодно

На рисунке приведён фрагмент графика зависимости от времени  $\tau$  средней мощности  $N_{\text{ср}}$ , равной отношению суммарного количества теплоты, переданного слитку серебра массой  $m = 50$  г, ко времени его теплообмена с внешними телами. Через некоторое время после начала теплообмена температура слитка в состоянии  $A$  увеличилась до  $t_A = 40^\circ\text{C}$ , а спустя ещё 2,2 мин (в состоянии  $B$ ) она вновь оказалась равна  $t_A$ . Удельная теплоёмкость серебра  $c = 240 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}^\circ\text{C}}$ .

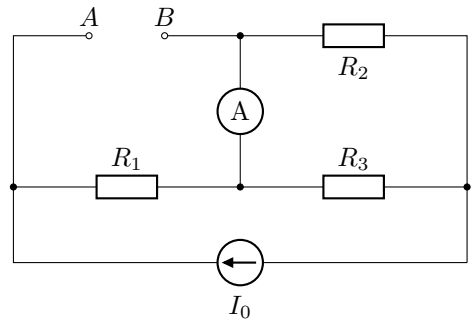
1. Восстановите координатные оси графика и их масштаб, если известно, что начало оси времени нагрева совпадает с началом оси  $N_{\text{ср}}$ .
2. Найдите начальную температуру  $t_0$  слитка серебра (при  $\tau = 0$ ).
3. Найдите температуры слитка, средние и мгновенные мощности теплообмена с внешними телами в состояниях, соответствующих точкам  $C$  и  $D$ .



### Задача №5. Неламповый диод

На рисунке изображена схема электрической цепи с регулируемым источником тока. Такой источник выдаёт во внешнюю цепь электрический ток заданной силы, а напряжение на его выходах подстраивается под параметры внешней цепи.

При подключении к контактам  $A$  и  $B$  последовательно соединённых диода и лампы показания амперметра равны нулю при двух ненулевых значениях силы тока через источник  $I_{01}$  и  $I_{02}$ .



Считайте, что сила тока  $I_{\text{л}}$ , протекающего через лампу, и напряжение на ней связаны соотношением:

$$I_{\text{л}} = \alpha U_{\text{л}}^{2/3}.$$

Для диода сила тока  $I_{\text{д}}$  пропорциональна квадрату напряжения на нём:

$$I_{\text{д}} = \beta U_{\text{д}}^2.$$

Сопротивления резисторов  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ , а также коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  **неизвестны**.

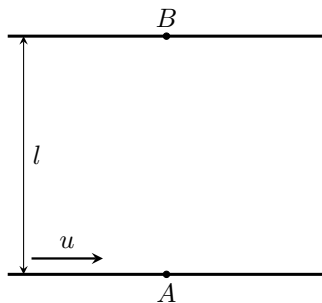
1. При каком ненулевом значении силы тока  $I_{03}$  источника показания амперметра будут равны нулю, если к точкам  $A$  и  $B$  подключить только лампу?

2. При каком ненулевом значении силы тока  $I_{04}$  источника показания амперметра будут равны нулю, если к точкам  $A$  и  $B$  подключить только диод?

## 10 класс

### Задача №1. Переправа

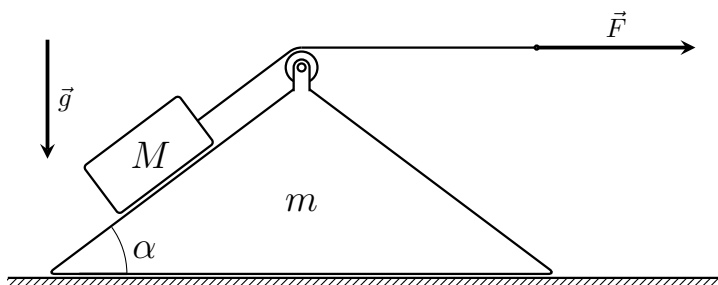
Из пункта  $A$ , расположенного на одном берегу реки шириной  $l$ , переправляется на противоположный берег небольшая моторная лодка. Берега реки параллельны друг другу. Скорость течения реки везде одинакова и равна  $u$ . На противоположном берегу реки на одном перпендикуляре к берегам с пунктом  $A$  расположен пункт  $B$ . Скорость лодки **относительно воды** постоянна по величине и равна  $2u$ , а её вектор в течение всего времени переправы перпендикулярен прямой  $BC$ , где  $C$  — центр лодки. В некоторый момент времени  $t_1$  скорость лодки **относительно берега** перпендикулярна линии берега.



1. В каком направлении лодка начала движение из пункта  $A$ : по течению или против течения? Ответ обоснуйте.
2. Найдите угол  $\angle ABC$  в момент времени  $t_1$ .
3. На каком расстоянии от пункта  $B$  будет находиться лодка, когда она достигнет противоположного берега реки?
4. На каком расстоянии от пункта  $B$  будет находиться лодка в момент времени  $t_1$ ?
5. Найдите радиус кривизны траектории лодки в системе отсчёта берега для двух случаев: а) в момент старта из пункта  $A$ ; б) в момент времени  $t_1$ .

### Задача №2. Призма

На шероховатой горизонтальной поверхности стола находится система, состоящая из призмы массой  $m$ , снабжённой лёгким блоком, и бруска массой  $M = 2m$  (см. рис.). Боковая поверхность призмы является гладкой, а угол между гранью, на которой находится брусок, и поверхностью стола равен  $\alpha$  ( $\sin \alpha = 3/5$ ). К бруску привязана лёгкая нерастяжимая нить, перекинутая через блок, к противоположному концу которой приложена горизонтальная сила  $F$ . Известно, что ускорение призмы не зависит от величины этой силы.



1. Определите возможные значения коэффициента трения  $\mu$  между призмой и поверхностью стола.
2. Для каждого из полученных в пункте 1 значений  $\mu$  найдите ускорение призмы  $a$ .

Ускорение свободного падения равно  $g$ . Наклонный отрезок нити параллелен левой боковой грани призмы. Трение в оси блока отсутствует.

### Задача №3. Падающий поршень

В цилиндрическом сосуде, установленном вертикально в поле силы тяжести, под массивным горизонтальным поршнем массой  $m = 100$  кг содержится одноатомный идеальный газ. Над поршнем – вакуум. Поршень находится в равновесии и может перемещаться вдоль стенок сосуда практически без трения. Поршень закрепляют в этом равновесном положении, после чего кладут на него гирию массой  $M$ . Затем поршень освобождают. При дальнейшем движении поршня с гирей его минимальное расстояние  $h_{\min}$  до дна сосуда в два раза меньше исходного расстояния  $h_0 = 1,0$  м. Определите:

1. массу гири  $M$ ;
2. модуль максимального ускорения  $a_{\max}$  поршня с гирей в процессе движения;
3. модуль максимальной скорости  $v_{\max}$  поршня с гирей в процессе движения.
4. Через длительное время поршень остановился. Найдите расстояние  $h$  до дна сосуда, на котором будет находиться поршень в состоянии нового термодинамического равновесия.

Теплоёмкость сосуда и поршня пренебрежимо мала, теплоотдача в окружающую среду отсутствует. При движении поршня от исходного положения до его первой остановки процессы в газе можно считать равновесными. Масса газа много меньше массы поршня. Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

### Задача №4. Квадрат vs круг

Из тонкой непроводящей плоской пластины вырезали пять фигур разной формы и размера. Каждую из них зарядили электрическим зарядом с постоянной, положительной и одинаковой для всех фигур поверхностной плотностью.

Первая фигура представляет собой квадрат со стороной  $2a$ , от которого с одного из углов отрезали квадрат со стороной  $a$  (см. рис. 1). Модуль напряжённости электрического поля, созданного в точке  $O$  зарядами на поверхности такой фигуры, равен  $E_0$ .

1. Чему равно отношение  $E'/E_0$ , где  $E'$  – модуль напряжённости электрического поля, созданного в точке  $O'$  второй заряженной фигурой, имеющей форму квадрата со стороной  $2\lambda a$ , от которого с одного из углов отрезали квадрат со стороной  $\lambda a$  (рис. 2)?  $\lambda$  – некоторое положительное число.

2. Определите модуль и направление вектора напряжённости  $\vec{E}_A$  электрического поля, созданного в точке  $A$  третьей заряженной фигурой, представляющей собой квадрат со стороной  $8a$ , от которого с одного из углов отрезали квадрат со стороной  $a$  (рис. 3). Модуль вектора  $\vec{E}_A$  выразите через величину  $E_0$ .

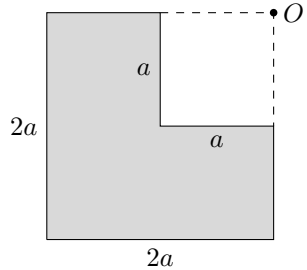


Рис. 1

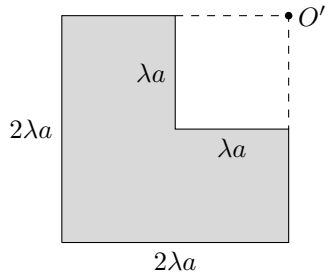


Рис. 2

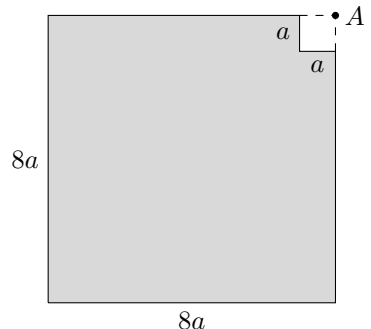


Рис. 3

3. Определите модуль и направление вектора напряжённости  $\vec{E}_B$  электрического поля, созданного в точке  $B$  четвертой заряженной фигурой, имеющей форму четверти кольца (рис. 4), внутренний радиус которого равен  $a$ , а внешний —  $2a$ . Модуль вектора  $\vec{E}_B$  выразите через  $E_0$ .

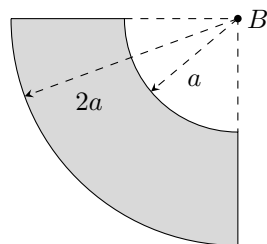


Рис. 4

4. Определите модуль и направление вектора напряжённости  $\vec{E}_C$  электрического поля, созданного в точке  $C$  пятой заряженной фигурой, имеющей форму трапеции (рис. 5), одно основание которой равно  $a$ , второе —  $2a$ . Модуль вектора  $\vec{E}_C$  выразите через  $E_0$ . Углы при большем основании данной трапеции указаны на рисунке.

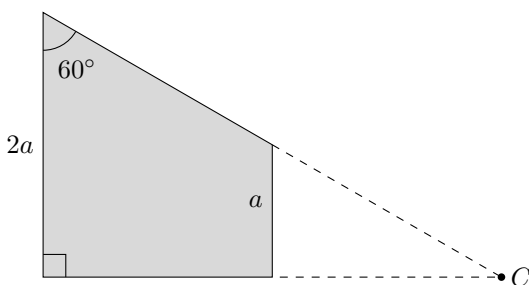
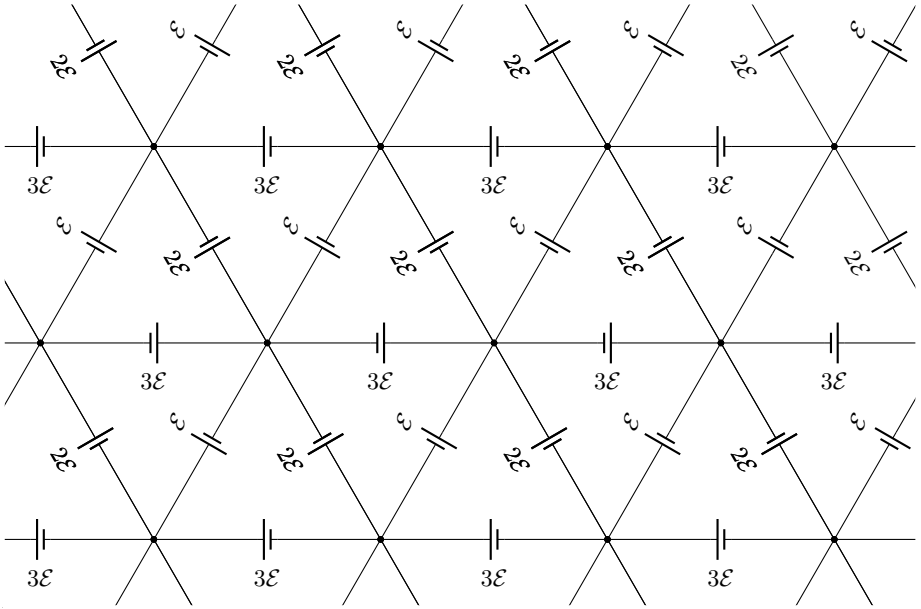


Рис. 5

Точки  $O$ ,  $O'$ ,  $A$ ,  $B$  и  $C$  находятся в одной плоскости с соответствующей фигурой.

### Задача №5. Вай кодамо!

В бесконечной электрической цепи, фрагмент схемы которой представлен на рисунке, каждая треугольная ячейка содержит три источника с одинаковыми внутренними сопротивлениями  $r$ , но разными ЭДС ( $\mathcal{E}$ ,  $2\mathcal{E}$  и  $3\mathcal{E}$ ), причём полярность подключения источников с одной и той же ЭДС периодически меняется (см. рис.).



1. Чему равны разности потенциалов ( $\varphi_+ - \varphi_-$ ) между плюсом и минусом каждого источника в данной цепи?
2. Определите силы токов через все источники в данной цепи.
3. Какое сопротивление  $R_1$  покажет омметр при подключении к плюсу и минусу источника с ЭДС  $\mathcal{E}$ , находящегося в данной цепи? Какие сопротивления  $R_2$  и  $R_3$  покажет прибор, если сделать то же самое с источниками  $2\varepsilon$  и  $3\varepsilon$  соответственно? Будут ли зависеть показания омметра от полярности его подключения?
4. Один из источников с ЭДС  $2\varepsilon$  заменили другим источником с ЭДС, равной  $\mathcal{E}$ , и внутренним сопротивлением  $r/2$ . Какова в этом случае будет сила тока  $I$ , текущего через заменённый источник?

Величины  $\mathcal{E}$  и  $r$  считайте известными. Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

## 11 класс

### Задача №1. Два камня

С вершины башни высоты  $h$  с одинаковыми скоростями  $v$ , направленными перпендикулярно одна к другой, под разными углами к горизонту одновременно брошены два камня так, что их движение происходит в одной вертикальной плоскости. Через некоторое время после броска, как раз непосредственно перед падением одного камня на землю, оказалось, что векторы скоростей камней направлены под одинаковыми углами к горизонту.

Определите величину этого угла  $\varphi$  и расстояние между камнями  $l$  в этот момент времени.

Известно, что в начальный момент времени оба камня удаляются от поверхности земли, а непосредственно перед падением одного камня на землю другой камень тоже приближается к поверхности земли. Башня расположена на горизонтальной поверхности. Ускорение свободного падения равно  $g$ . Сопротивление воздуха не учитывайте.

### Задача №2. Цикл, как цикл

В архиве лорда Кельвина нашли записки о цикле, состоящем из четырех последовательно совершаемых классическим идеальным многоатомным газом квазистатических процессов 1 – 2, 2 – 3, 3 – 4 и 4 – 1. График цикла оказался утерян, но стало известно, что в процессах 1 – 2 и 3 – 4 на любом малом участке изменение внутренней энергии было точно равно работе газа, а в процессах 2 – 3 и 4 – 1 на любом малом участке изменение внутренней энергии было точно равно работе внешних сил над газом.

Температуры трёх точек цикла были заданы:  $T_1 = T_3 = 2T_0$ ,  $T_4 = T_0$ . В точке 4 давление и объём равны соответственно  $p_4 = p_0$ ,  $V_4 = V_0$ .

1. Чему была равна температура газа  $T_2$  в точке 2?
2. Восстановите график цикла в координатах  $\log_2 \frac{p}{p_0}$  от  $\log_2 \frac{V}{V_0}$ .
3. Определите КПД цикла.

### Задача №3. Электростатическая левитация

Вертикальный полубесконечный сплошной однородный диэлектрический цилиндр радиуса  $R$  заряжен с постоянной по объёму плотностью заряда  $\rho$ . От цилиндра отрезали тонкий диск толщиной  $d$  ( $d \ll R$ ), затем прислонили его обратно и отпустили (см. рис. 1). Диск остался неподвижным, причём оказалось,

что единственная сила взаимодействия между диском и цилиндром — это сила электростатического отталкивания, равная по модулю

$$F_0 = \frac{4}{3} \frac{\rho^2 R^3 d}{\epsilon_0}.$$

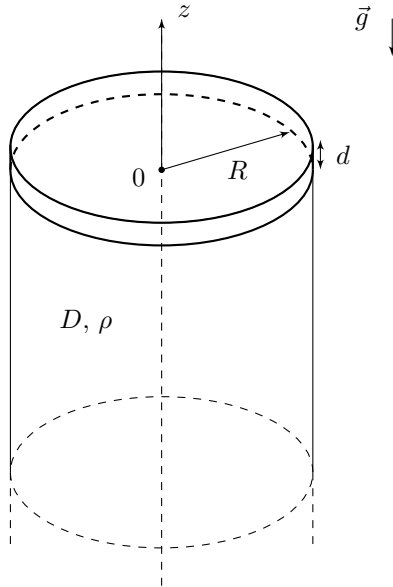


Рис. 1

1. Найдите плотность материала цилиндра  $D$ .
2. Дыску сообщают такую скорость  $v_0$ , направленную вертикально вверх, что он совершает малые колебания, двигаясь поступательно. Определите период этих колебаний.

Далее от диска отрезали небольшое кольцо и удалили его. При этом центр диска остался на оси цилиндра, а новый радиус составляет  $R' = R - \Delta R$ , где  $\Delta R \ll R$ .

3. Определите положение равновесия диска радиуса  $R'$ . В ответе укажите ширину зазора  $z_0$  между диском и цилиндром в положении равновесия.
4. Пусть диск радиуса  $R'$  находится в положении равновесия. Определите период малых колебаний диска при его поступательном движении вдоль оси ци-

цилиндра после сообщения такой же скорости  $v_0$  направленной вертикально вверх. **Если вы не выполнили пункт 3, считайте  $z_0 > 0$  известной величиной.**

*Примечания.* Ускорение свободного падения равно  $g$ . Считайте, что диск может двигаться только поступательно вдоль оси симметрии системы, а основания диска горизонтальны. Все силы трения отсутствуют. Любые возможные соударения абсолютно упругие. Гравитационное взаимодействие диска и цилиндра, магнетизм и электромагнитное излучение не учитывать. Диэлектрик считайте неполяризуемым.

#### Задача №4. Конденсатор Глюка

В самом начале карьеры экспериментатора Глюк увлекался разработкой новых устройств. Одним из них был конденсатор довольно необычной конструкции. На двух поверхностях прямоугольной стеклянной пластинки толщиной  $h = 0,5$  мм было нанесено металлическое покрытие (П), игравшее роль обкладок конденсатора. При этом одна сторона пластинки была покрыта металлом полностью, вторая лишь частично (рис. 2). На свободный от покрытия участок помещалась маленькая капелька проводящей жидкости (К), полностью несмачивающей стекло. Подсоединённый к обкладке с жидкостью проводник раздваивался так, что одна его часть была подсоединена к участку с покрытием, второй конец был погружен в каплю жидкости.

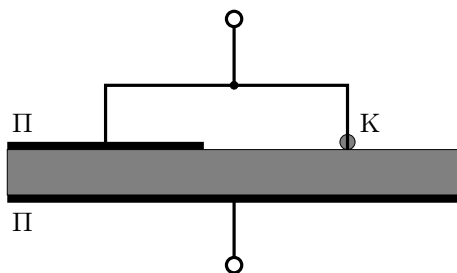


Рис. 2

В одном из экспериментов конденсатор Глюка подключался последовательно с другим конденсатором постоянной ёмкости (опорным) к регулируемому источнику напряжения. Напряжение источника плавно увеличивалось от нулевого значения, при этом исследовалась зависимость напряжения на опорном конденсаторе  $U_C$  от напряжения источника  $U$ . График зависимости состоял из двух линейных участков (рис. 3), при этом напряжение на опорном конденсаторе в точке излома составляло треть от напряжения источника  $U_1$ , соответствующего этой точке.

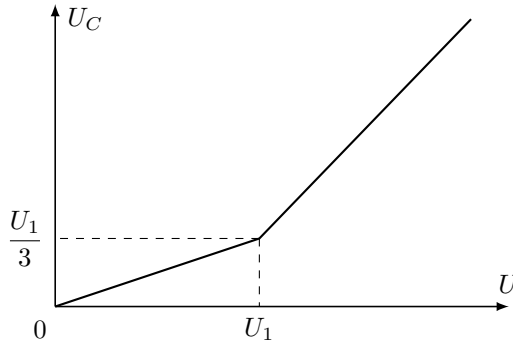


Рис. 3

1. Чему равнялось напряжение на опорном конденсаторе при напряжении источника  $U = 2U_1$ ?

2. Определите коэффициент поверхностного натяжения использованной Глюком жидкости, если  $U_1 = 5,9$  кВ.

Электрическая постоянная равна  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м. Диэлектрическая проницаемость стекла  $\varepsilon = 7$ . Толщина стеклянной пластинки мала по сравнению с её размерами. Коэффициенты поверхностного натяжения жидкости на границе с воздухом и со стеклом одинаковы. Влиянием силы тяжести можно пренебречь.

### Задача №5. Две половинки

На главной оптической оси (ГОО) тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F$  находится точечный монохроматический источник света  $S$  с длиной волны  $\lambda$ . Известно, что диаметр линзы равен  $D$ , причем  $\sqrt{\lambda F} \ll D \ll F$ . Линзу разрезают на две одинаковые половинки (полулинзы), которые смещают параллельно исходным положениям (см. рис. 4) вдоль ГОО. Одна половинка (верхняя) оказывается на расстоянии  $d_1 = 4F/3$  от источника, а другая (нижняя) – на расстоянии  $d_2 = 2F$ .

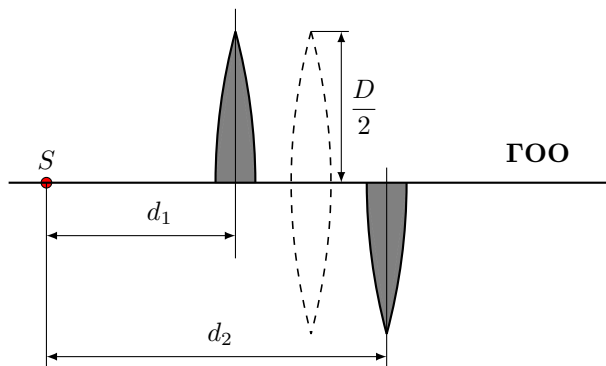


Рис. 4

1. Найдите на каких расстояниях  $l_1$  и  $l_2$  от источника находятся его изображения в верхней и нижней половинках линзы.

Перпендикулярно ГОО размещают экран на некотором расстоянии  $L$  от источника.

2. Опишите картину, которая наблюдается на экране (изобразите ее схематически на рисунке и определите величины существенных характеристик) при  $L_1 = 3F$  и  $L_2 = 6F$ .

3. При каком расстоянии  $L_3 > 2F$  на экране наблюдается изображение в форме круга?

Экран закрепляют на расстоянии  $L_4 = 40F/9$  от источника.

4. Опишите качественно и объясните картину, которая наблюдается на экране, указав все характерные детали.

5. Пройдем из точки пересечения экрана ГОО вверх, до края наблюдаемой картины. Определите, сколько на этом пути окажется интервалов, на которых освещенность экрана будет возрастать? Для расчёта используйте значения:  $F = 4$  м,  $\lambda = 650$  нм,  $D = 5$  см.

Считайте, что исходная линза была идеальной: она обладала свойством таутохронизма (лучи от одного источника, прошедшие через разные ее точки, достигают новой точки пересечения за одинаковое время) и при прохождении через ее фокус фаза световой волны скачком изменялась на  $\pi$ .

Все лучи, не попадающие непосредственно от источника на полулинзы, обрезаются диафрагмами.

## Возможные решения

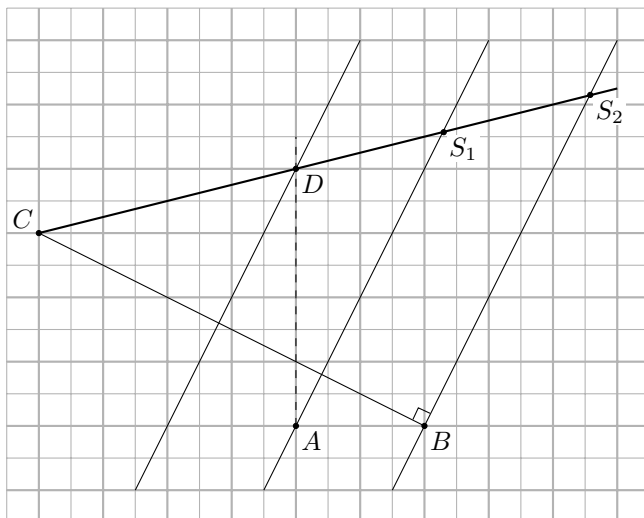
### Задача №9-Т1. Дал Маха

По условию задачи микрофон в точке  $B$  зафиксировал звуковой сигнал, испущенный самолётом, когда он находился в точке  $C$ . Проведём прямую  $CB$  и построим к ней перпендикуляр, проходящий через точку  $B$ . Это позволит определить положение образующей конуса Маха в рассматриваемый момент времени.

Поскольку самолёт двигался равномерно, угол между образующими конуса Маха и его осью остаётся постоянным в любой момент времени. Чтобы найти границы области слышимости в момент регистрации сигнала микрофоном  $A$ , проведём через точку  $A$  прямую, параллельную  $BS_2$ .

Известно, что микрофон в точке  $A$  зафиксировал сигнал спустя время  $t$  после пролёта самолёта над этой точкой, а через такое же время после начала регистрации звук дошёл до микрофона  $B$ . Чтобы восстановить положение самолёта над точкой  $A$ , на расстоянии  $AB$  левее по горизонтали от  $A$  проведём ещё одну прямую, параллельную  $BS_2$ , и найдём её пересечение с вертикалью, проходящей через точку  $A$  (точка  $D$ ).

Так как самолёт двигался прямолинейно, проведём прямую через точки  $C$  и  $D$ , чтобы восстановить траекторию полёта. Таким образом, точка  $S_1$  соответствует положению самолёта в момент регистрации звука микрофоном  $A$ , а точка  $S_2$  – в момент регистрации микрофоном  $B$ .



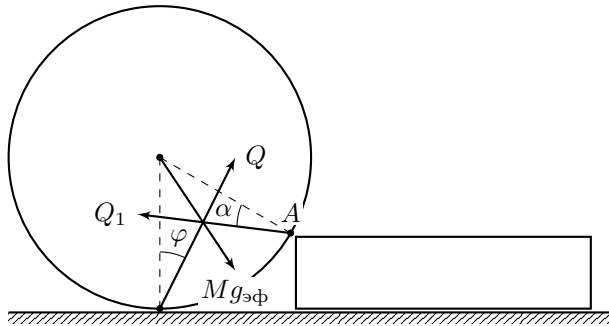
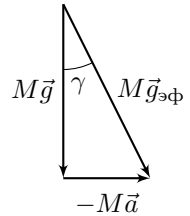
### Задача №9-Т2. Сингулярность

#### Первый способ

Перейдём в неинерциальную систему отсчёта, движущуюся влево с ускорением  $\vec{a}$ . В этой системе цилиндр покоится, и на него действует эффективная сила тяжести:

$$M\vec{g}_{\text{эф}} = M\vec{g} - M\vec{a}.$$

Заметим, что с увеличением ускорения  $a$  угол  $\gamma$  между вертикалью и вектором  $M\vec{g}_{\text{эф}}$  увеличивается.



Расставим силы, действующие на цилиндр в этой системе отсчёта:

- сила реакции  $Q$  со стороны горизонтальной поверхности, направленная под углом  $\varphi$  к вертикали.  $\text{tg } \varphi = \mu$ , так как происходит движение с проскальзыванием.
- Сила реакции  $Q_1$  со стороны доски направлена под некоторым углом  $\alpha$  к радиусу, проведённому в точку касания.

**Случай 1:**  $\mu < \sqrt{3}$ , линия действия силы  $Q$  проходит левее точки контакта цилиндра с доской (точки  $A$ ). Для равновесия цилиндра необходимо, чтобы силы  $Q$ ,  $Q_1$  и  $Mg_{\text{эф}}$  пересекались в одной точке (по теореме о трёх непараллельных силах). Угол  $\varphi$  фиксирован, а угол  $\alpha$  увеличивается при уменьшении ускорения  $a$ . Максимальное значение угла  $\alpha$  равно  $\varphi$ :

$$\alpha_{\text{max}} = \varphi.$$

Из геометрии задачи следует, что при  $\alpha = \varphi$  угол между эффективной силой тяжести и вертикалью равен  $30^\circ$ . Следовательно:

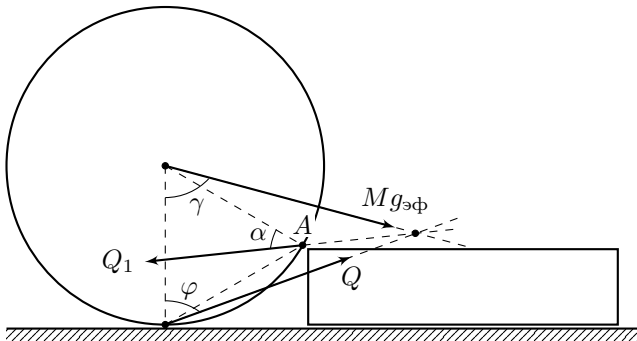
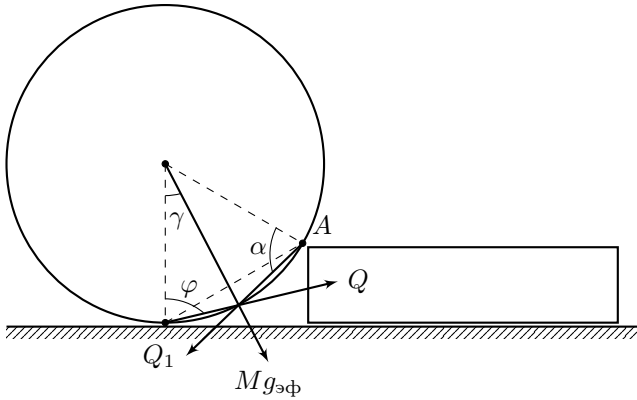
$$a_{\text{min}} = g \text{tg } 30^\circ = \frac{g}{\sqrt{3}}.$$

С увеличением ускорения  $a$  угол  $\alpha$  уменьшается, пока  $Mg_{\text{эф}}$  и  $Q_1$  не станут направленными вдоль одной прямой. Дальнейшее увеличение  $a$  приведёт к нарушению равновесия, и цилиндр начнёт закатываться на доску. При этом сила реакции  $Q$  станет равной нулю. Следовательно:

$$a_{\text{max}} = g \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}g$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}g < a < \sqrt{3}g$$

**Случай 2:**  $\mu > \sqrt{3}$  Линия действия силы  $Q$  проходит ниже точки контакта цилиндра с доской.



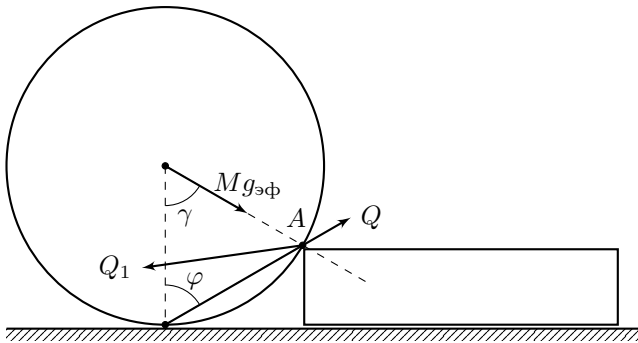
По теореме о трёх непараллельных силах, с учётом того, что  $0 < \alpha \leq \varphi$ , получаем два возможных диапазона для угла  $\gamma$ , при которых три силы пересекаются в одной точке:

- $\gamma \in [0; 30^\circ]$  и вектор  $Q$  направлен в точку пересечения трёх сил.
- $\gamma \in (60^\circ; 90^\circ)$  и продолжение вектора  $Q$  в обратном направлении проходит через точку пересечения трёх сил (см. рис.).

При  $\gamma \in [0^\circ; 30^\circ]$  все три вектора сил направлены в одну полуплоскость, следовательно, их сумма не может быть равна нулю. Значит, равновесие в этом случае невозможно. Для  $\gamma \in (60^\circ; 90^\circ)$  по аналогии с первым случаем получаем

$$a > g \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}g.$$

**Случай 3:**  $\mu = \sqrt{3}$

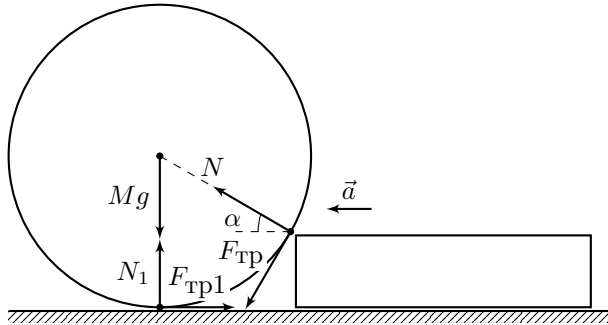


$\varphi = 60^\circ$ , линия действия силы  $Q$  проходит через точку  $A$ . Тогда либо линии действия сил  $Q$  и  $Q_1$  совпадают, либо пересекаются в точке  $A$ . Первое невозможно, так как в этом случае для выполнения условия равновесия  $Mg_{эф}$  должна быть параллельна  $Q$  и  $Q_1$ , чего быть не может. Значит, линии действия сил  $Q$  и  $Q_1$  пересекаются в точке  $A$ . Тогда по теореме о трёх непараллельных силах  $Mg_{эф}$  тоже направлена в точку  $A$ , откуда однозначно находим значение ускорения:

$$a = \sqrt{3}g.$$

## Второй способ

Расставим силы, действующие на цилиндр, и запишем теорему о движении центра масс для цилиндра в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:



$$\begin{cases} Oy : N_1 + N \sin \alpha - F_{\text{тр}} \cos \alpha - Mg = 0; \\ Ox : N \cos \alpha + F_{\text{тр}} \sin \alpha - F_{\text{тр}1} = Ma. \end{cases}$$

Из условия задачи можем найти угол  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{R - h}{R} = 0,5 \implies \alpha = 30^\circ.$$

Так как цилиндр скользит по горизонтальной поверхности, сила трения равна соответственно:

$$F_{\text{тр}1} = \mu N_1$$

Для того чтобы цилиндр не вращался, должно выполняться правило моментов относительно его центра:

$$F_{\text{тр}} R = F_{\text{тр}1} R \implies F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}1} = \mu N_1.$$

Формально, предыдущее уравнение необходимо писать в системе отсчёта центра масс цилиндра. Но при переходе в неинерциальные системы отсчёта, силы инерции прикладываются к центру масс тела, соответственно не создают момента сил относительно него. Подставим значения сил трения в систему уравнений:

$$\begin{cases} Oy : N_1 + N \sin \alpha - \mu N_1 \cos \alpha - Mg = 0 \\ Ox : N \cos \alpha + \mu N_1 \sin \alpha - \mu N_1 = Ma \end{cases}$$

Для выполнения условия равноускоренного движения цилиндра без вращения необходимо выполнение следующих соотношений:

$$\begin{cases} N_1 > 0, \\ F_{\text{тр}} \leq \mu N \implies N_1 \leq N. \end{cases}$$

Первое условие гарантирует контакт цилиндра с горизонтальной поверхностью, второе гарантирует отсутствие проскальзывания между цилиндром и доской. Из уравнения на вертикальную ось выразим  $N_1$ :

$$N_1 = \frac{Mg - N \sin \alpha}{1 - \mu \cos \alpha}.$$

Подставим значение  $N_1$  в уравнение на горизонтальную ось:

$$N \cos \alpha + \mu(N \sin \alpha - Mg) \frac{1 - \sin \alpha}{1 - \mu \cos \alpha} = Ma.$$

Сгруппируем слагаемые с  $N$  с одной стороны равенства:

$$N \left( \cos \alpha + \mu \sin \alpha \frac{1 - \sin \alpha}{1 - \mu \cos \alpha} \right) = M \left( a + \mu g \frac{1 - \sin \alpha}{1 - \mu \cos \alpha} \right).$$

Домножим обе стороны равенства на  $(1 - \mu \cos \alpha)$ :

$$N (\cos \alpha - \mu \cos^2 \alpha + \mu \sin \alpha - \mu \sin^2 \alpha) = M[a(1 - \mu \cos \alpha) + \mu g(1 - \sin \alpha)],$$

откуда получаем выражение для значения  $N$ :

$$N = M \frac{a(1 - \mu \cos \alpha) + \mu g(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha - \mu}.$$

Подставляя значение для угла  $\alpha = 30^\circ$ :

$$N = M \frac{a(2 - \sqrt{3}\mu) + \mu g}{\sqrt{3} - \mu}.$$

Подставляя это выражение в выражение для силы  $N_1$ :

$$N_1 = M \frac{\sqrt{3}g - a}{\sqrt{3} - \mu}.$$

Теперь, чтобы получить возможные значения для  $a$  нам необходимо проанализировать неравенство  $0 < N_1 < N$ . Видим, что в знаменателе  $N$  и  $N_1$  есть **сингулярность** при определенном значении коэффициента трения  $\mu = \sqrt{3}$ . Рассмотрим по отдельности три случая.

**Случай 1:**  $\mu < \sqrt{3}$

$$N_1 > 0 \implies \sqrt{3}g > a \implies a < \sqrt{3}g$$

$N_1 < N$ :

$$M \frac{\sqrt{3}g - a}{\sqrt{3} - \mu} < M \frac{a(2 - \sqrt{3}\mu) + \mu g}{\sqrt{3} - \mu} \implies \sqrt{3}g - a < a(2 - \sqrt{3}\mu) + \mu g,$$

откуда получаем  $a > \frac{1}{\sqrt{3}}g$ .

$$\frac{1}{\sqrt{3}}g < a < \sqrt{3}g$$

**Случай 2:**  $\mu > \sqrt{3}$

$$N_1 > 0 \implies \sqrt{3}g < a \implies a > \sqrt{3}g$$

$N_1 < N$ :

$$M \frac{\sqrt{3}g - a}{\sqrt{3} - \mu} < M \frac{a(2 - \sqrt{3}\mu) + \mu g}{\sqrt{3} - \mu} \implies \sqrt{3}g - a > a(2 - \sqrt{3}\mu) + \mu g,$$

откуда получаем  $a > \frac{1}{\sqrt{3}}g$ . Первое условие более строгое, чем второе, откуда получаем ответ:

$$a > \sqrt{3}g$$

**Случай 3:**  $\mu = \sqrt{3}$

Этот случай нельзя напрямую проанализировать из полученных уравнений, т. к. знаменатель дробей обращается в ноль. Чтобы получить ответ для этого случая, вернёмся к исходной системе уравнений и подставим значение угла  $\alpha = 30^\circ$  и коэффициента трения  $\mu = \sqrt{3}$ :

$$\begin{cases} N_1 + \frac{1}{2}N - \frac{3}{2}N_1 - Mg = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}N + \frac{\sqrt{3}}{2}N_1 - \sqrt{3}N_1 = Ma. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем:

$$N = 2Mg + N_1.$$

Подставим это выражение во второе уравнение системы:

$$\sqrt{3}Mg + \frac{\sqrt{3}}{2}N_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}N_1 - \sqrt{3}N_1 = Ma,$$

откуда находим единственное решение системы:

$$a = \sqrt{3}g.$$

### Задача №9-Т3. Задача трёх тел

#### Первый способ

Рассмотрим положение корабля в точке  $M$ , расстояния до которой от вершин  $A$ ,  $B$  и  $C$  прямоугольного треугольника равны  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  и  $\vec{r}_3$  соответственно. Введём векторы:

$$\vec{a} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2, \quad \vec{b} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1.$$

Суммарная сила, действующая на корабль в положении равновесия, равна нулю:

$$\begin{aligned} \vec{F} = -P\vec{r}_1 - P\vec{r}_2 - 2P\vec{r}_3 = 0 &\implies \\ \implies \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + 2\vec{r}_3 = 0. \end{aligned}$$

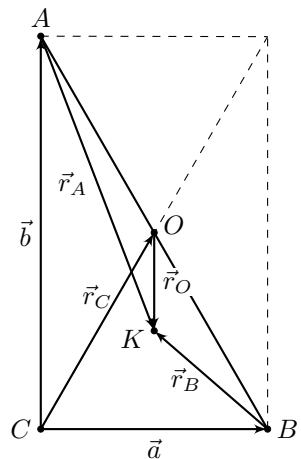
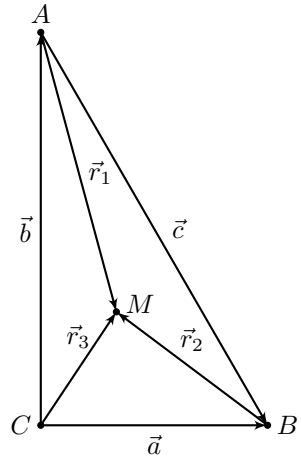
Выразим  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  через  $\vec{r}_3$  и подставим в полученное выражение:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_3 - \vec{b}; \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_3 - \vec{a}; \quad \vec{r}_3 - \vec{b} + \vec{r}_3 - \vec{a} + 2\vec{r}_3 = 0 \implies \vec{r}_3 = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}).$$

#### Второй способ

Покажем, что совместное действие двух станций, расположенных в вершинах острых углов треугольника, эквивалентно действию одной станции с коэффициентом силы  $2P$ , находящейся на середине гипотенузы. На рисунке эти две станции расположены в точках  $A$  и  $B$ , а космический корабль – в точке  $K$ . Сила, действующая на объект со стороны станций  $A$  и  $B$ , выражается как:

$$\vec{F}_{AB} = -P(\vec{r}_A + \vec{r}_B).$$



Учитывая, что

$$\vec{r}_A = -\vec{b} + \vec{r}_C + \vec{r}_O, \quad \vec{r}_B = -\vec{a} + \vec{r}_C + \vec{r}_O,$$

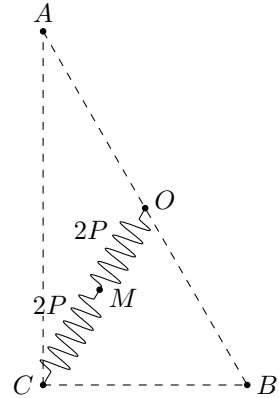
подставим эти выражения в формулу для силы:

$$\vec{F}_{AB} = -P \left( -\vec{b} + \vec{r}_C + \vec{r}_O - \vec{a} + \vec{r}_C + \vec{r}_O \right) = -2P\vec{r}_O.$$

Из полученной формулы следует, что результирующая сила в точности равна силе, создаваемой станцией с коэффициентом  $2P$ , расположенной в середине отрезка  $AB$ . Таким образом, в дальнейшем мы можем считать, что на корабль действуют две станции:

- одна с коэффициентом  $2P$  находится в вершине прямого угла (станция  $C$ ),
- другая с коэффициентом  $2P$  находится на середине гипотенузы (станция  $O$ ).

Далее можем заменить воздействие этих станций воздействием пружин, длины которых в недеформированном состоянии пренебрежимо малы (равны нулю), а коэффициенты жёсткости равны  $2P$  (см. рисунок). С учётом коэффициентов жёсткости эквивалентных пружин легко определить положение точки равновесия для корабля – точка, которая делит медиану  $CO$  пополам.



### Третий способ

Для нахождения положения равновесия рассмотрим систему из трёх точечных масс, расположенных в вершинах треугольника: по  $m$  в вершинах острых углов и  $2m$  — в вершине прямого угла. Тогда радиус-вектор, проведённый из произвольной точки  $M$  до центра масс будет определяться по формуле:

$$4m\vec{r}_{\text{цм}} = m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2 + 2m\vec{r}_3.$$

В случае, если  $M$  является центром масс системы, то

$$\vec{r}_{\text{цм}} = 0 \implies \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + 2\vec{r}_3 = 0,$$

что совпадает с выражением, полученным из условия равновесия корабля. Найдём координаты центра масс системы приняв за начало отсчёта вершину  $C$ :

$$y_{\text{цм}} = \frac{ml \cos 30^\circ}{4m} = \frac{\sqrt{3}l}{8}; \quad x_{\text{цм}} = \frac{ml \sin 30^\circ}{4m} = \frac{l}{8}.$$

Далее по теореме Пифагора определяем расстояния от точки равновесия до станций:

$$CM = \frac{l}{4}; \quad BM = \frac{\sqrt{3}l}{4}; \quad AM = \frac{\sqrt{7}l}{4}.$$

В начальный момент времени космический корабль покоится, а суммарная сила, действующая на него со стороны станций, направлена вдоль отрезка  $CO$ . Это означает, что ускорение корабля также направлено вдоль  $CO$ , и, следовательно, корабль будет двигаться прямолинейно вдоль этого отрезка и достигнет максимальной скорости в точке равновесия.

### Первый способ

Посмотрим на отклонение корабля от положения равновесия на вектор  $\overrightarrow{MK}$ . Изменение суммарной силы со стороны станций равно:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{F} &= \vec{F} - \vec{0} = \vec{F} = \Delta \vec{F}_A + \Delta \vec{F}_B + \Delta \vec{F}_C = \\ &= -P(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AM}) - P(\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{BM}) - 2P(\overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CM}) = -4P \cdot \overrightarrow{MK} \end{aligned}$$

Значит, на корабль действует такая же сила, как от пружины с коэффициентом упругости  $4P$  с нулевой начальной длиной, натянутой между точками  $M$  и  $K$ . Тогда при перемещении корабля от середины гипотенузы до точки  $M$  эта пружина совершит над кораблём работу:

$$A = \frac{4P \left(\frac{l}{4}\right)^2}{2} = \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

### Второй способ

Воспользуемся аналогией с двумя пружинами и запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{2P \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = \frac{2P \left(\frac{l}{4}\right)^2}{2} + \frac{2P \left(\frac{l}{4}\right)^2}{2} + \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

### Третий способ

Элементарная работа силы, действующей со стороны некоторой станции, определяется выражением:

$$\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = -Pr dr \implies A = - \int_{r_1}^{r_2} Pr dr = \frac{Pr_1^2}{2} - \frac{Pr_2^2}{2}.$$

Максимальная скорость корабля будет достигнута при прохождении положения равновесия. Запишем закон сохранения энергии для этого случая:

$$\frac{2P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} + 2\frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = \frac{2P\left(\frac{l}{4}\right)^2}{2} + \frac{P\left(\frac{\sqrt{3}l}{4}\right)^2}{2} + \frac{P\left(\frac{\sqrt{7}l}{4}\right)^2}{2} + \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

Любым из трёх способов получаем ответ:

$$v_{\max} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{m}}$$

### Первый способ

Как мы показали ранее, сила, действующая на корабль, аналогична силе со стороны пружины с началом в точке  $M$ .

Тогда движение корабля – колебания вдоль отрезка  $CO$ . Корабль, пролетев точку  $M$ , полетит к точке  $C$  и остановится около неё.

### Второй способ

При движении корабля под действием пары пружин, он будет двигаться вдоль отрезка  $CO$ , останавливаясь в точке  $O$  и в точке  $X$ , где потенциальная энергия системы пружин равна её энергии при положении корабля в точке  $O$ . Это условие можно записать в виде уравнения:

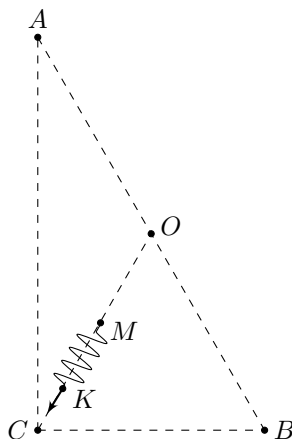
$$\frac{2P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = \frac{2Px^2}{2} + \frac{2P\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{2},$$

где  $x$  – расстояние от точки  $C$  до точки  $X$ . Полученное выражение сводится к квадратному уравнению:

$$2x^2 - lx = 0,$$

решая которое, получаем два корня:

$$x_1 = \frac{l}{2}, \quad x_2 = 0.$$



Корень  $x = l/2$  соответствует точке на середине гипотенузы, где корабль находился в начальный момент времени. Таким образом, минимальное расстояние от корабля до точки  $C$  равно нулю.

Как мы показали в решении пункта 2, сила, действующая на корабль, равна  $\vec{F} = -4P \cdot \vec{MK}$ , где  $M$  – центр масс системы с точечными массами  $(m, m, 2m)$ , расположенными в вершинах  $A, B$  и  $C$ . В отличие от предыдущих пунктов, точка  $M$  не покоится. По свойству центра масс:

$$\vec{v}_M = \frac{m\vec{v}_A + m\vec{v}_B + 2m\vec{v}_C}{4m} = \frac{\vec{v}_C}{2}.$$

Следовательно, скорость точки  $M$  постоянна по направлению и равна  $v_{\max}$  по модулю.

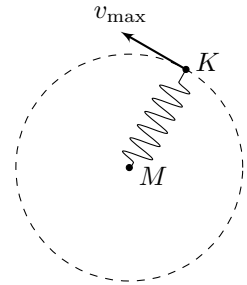
Для окончательного упрощения системы перейдем в инерциальную систему отсчета точки  $M$ .

В этой системе отсчета начальная скорость  $v_{\max}$  точки  $K$  направлена перпендикулярно пружине. Заметим, что  $v_{\max}$  – это скорость движения по окружности радиусом  $MK = l/4$  под действием силы  $4P \cdot MK$ :

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = 4P \cdot \frac{MK^2}{2}.$$

$$\frac{mv_{\text{окр}}^2}{MK} = 4P \cdot MK.$$

$$v_{\max} = v_{\text{окр}}$$



Следовательно, в системе отсчета точки  $M$  корабль будет равномерно двигаться по окружности радиусом  $l/4$  со скоростью  $v_{\max}$ , найденной в пункте 2.

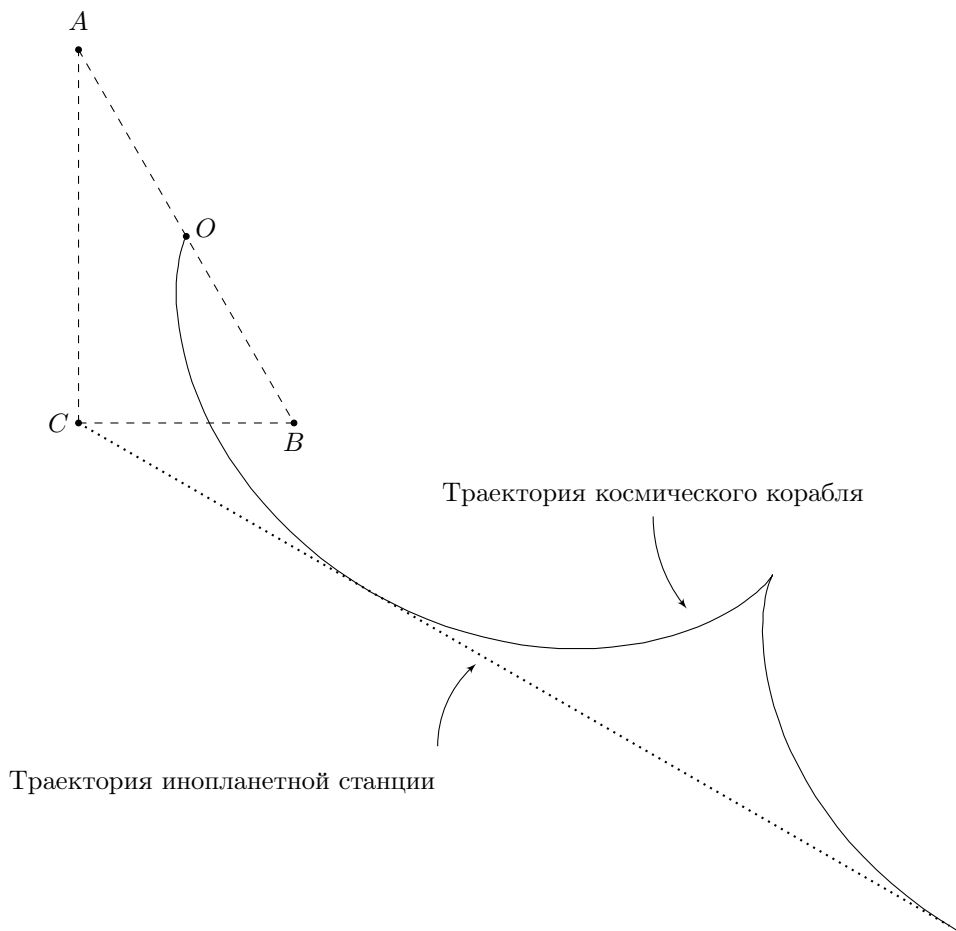
Когда корабль совершит один оборот вокруг точки  $M$ , его скорость в лабораторной системе отсчёта впервые обнулится. Это произойдет через время:

$$T = \frac{2\pi l/4}{v_{\max}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{P}{m}}} = \pi \sqrt{\frac{m}{P}}.$$

В системе отсчета точки  $M$  перемещение корабля за один период равно нулю. Значит, в ЛСО корабль сместился на такое же расстояние, что и точка  $M$ .

$$S = v_{\max}T = \frac{\pi l}{2}.$$

Обратим внимание, что траектория движения корабля, представляющая собой наложение движения по окружности и равномерного движения её центра, представляет собой циклоиду, как показано на рисунке.



Задача №9-Т4. Горячо-холодно

Первый способ

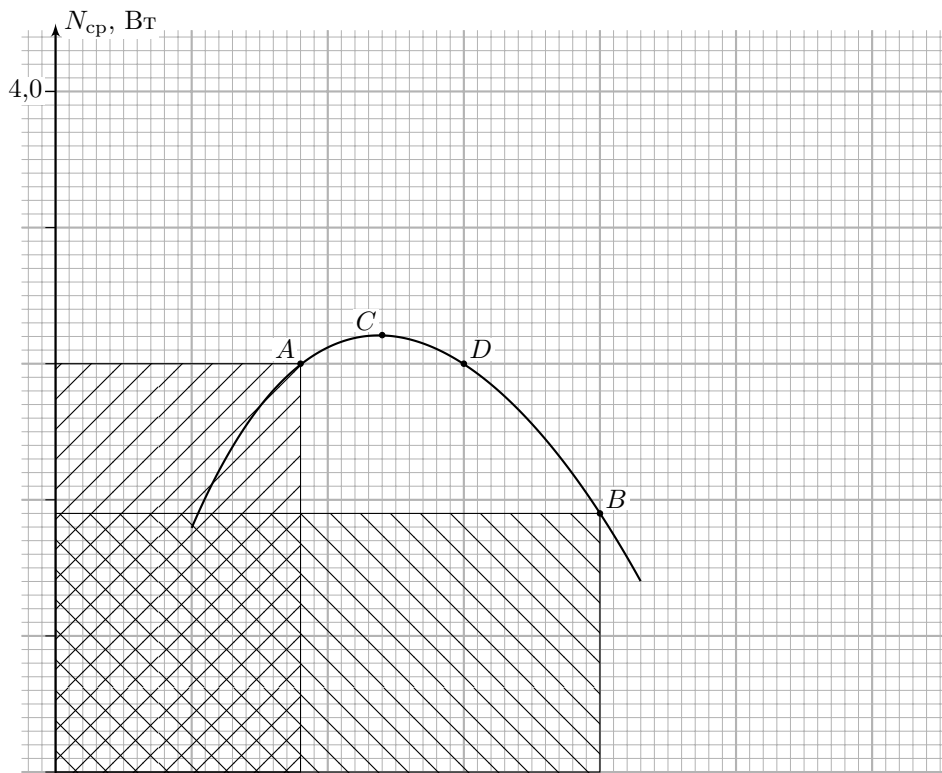


Рис. 1

Для нагрева слитка серебра от начальной температуры  $t_0$  до температуры  $t$  необходимо сообщить ему суммарное количество теплоты:

$$Q = cm(t - t_0).$$

С другой стороны, количество теплоты  $Q$  можно выразить через среднюю мощность  $N_{\text{ср}}$  и время теплообмена  $\tau$ :

$$Q = N_{\text{ср}}\tau.$$

По условию задачи температуры в состояниях  $A$  и  $B$  равны, следовательно, суммарное количество теплоты, сообщённое слитку в моменты времени  $\tau_A$  и  $\tau_B$ , также одинаково. Это означает, что площади прямоугольников, соответствующих этим процессам на графике (см. рисунок 1), равны, так как они пропорциональны количеству теплоты. Таким образом, выполняется равенство:

$$N_{\text{Аср}}\tau_A = N_{\text{Вср}}\tau_B.$$

Для восстановления оси времени необходимо обеспечить равенство площадей прямоугольников с одинарной штриховкой на графике.

### Второй способ

По условию задачи температуры в состояниях  $A$  и  $B$  равны, следовательно, эти точки лежат на одной гиперболе. Если две вершины прямоугольника расположены на одной гиперболе, то прямая, проходящая через две другие вершины, должна пересекать начало координат. Это следует из подобия треугольников, образованных описанной прямой и осями координат (см. рисунок 2).

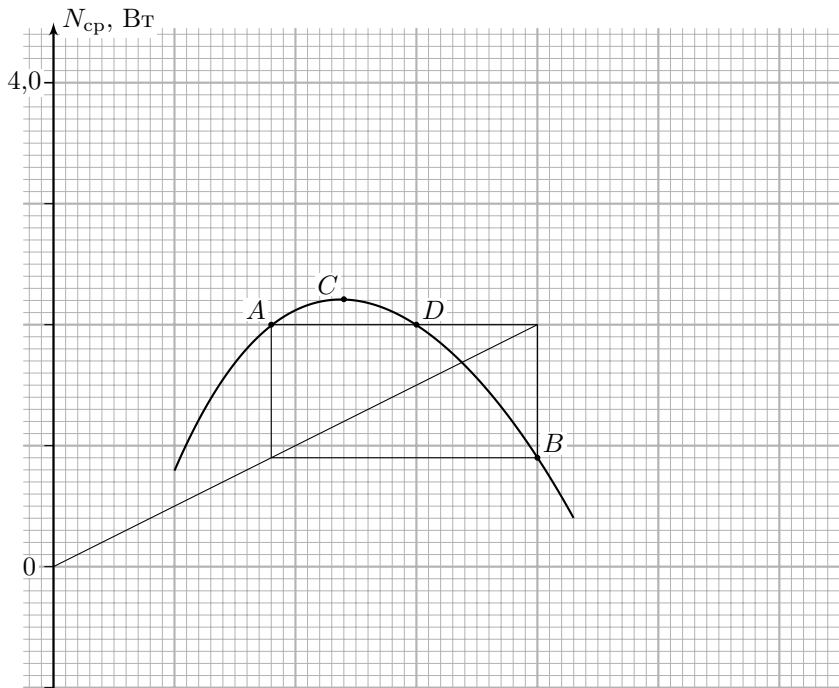


Рис. 2

Зная, что  $\tau_B - \tau_A = 2,2$  мин, восстановим график зависимости:

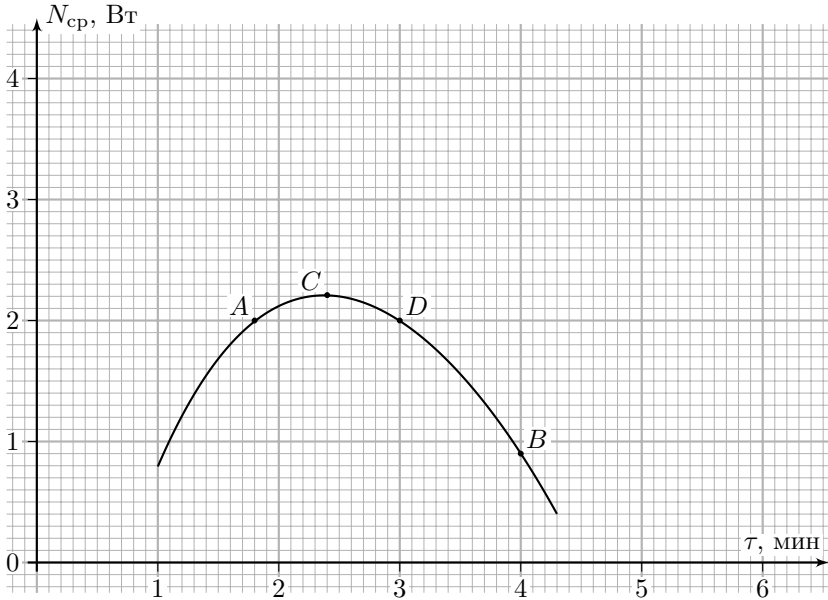


Рис. 3

Из графика известно, что  $N_{Acp} = 2$  Вт и  $\tau_A = 1,8$  мин = 108 с, тогда:

$$N_{Acp}\tau_A = cm(t_A - t_0) \implies t_0 = t_A - \frac{N_{Acp}\tau_A}{cm}.$$

$$t_0 = 22^\circ\text{C}.$$

Из графика известно, что  $N_{Ccp} \approx 2,2$  Вт,  $\tau_C = 2,4$  мин = 144 с,  $N_{Dcp} = 2$  Вт и  $\tau_D = 3$  мин = 180 с. Тогда:

$$N_{Ccp}\tau_C = cm(t_C - t_0); \quad N_{Dcp}\tau_D = cm(t_D - t_0).$$

$$N_{Ccp} \approx 2,2 \text{ Вт}; \quad N_{Dcp} = 2 \text{ Вт};$$

$$t_C = t_0 + \frac{N_{Ccp}\tau_C}{cm} \approx 48,4^\circ\text{C};$$

$$t_D = t_0 + \frac{N_{Dcp}\tau_D}{cm} = 52^\circ\text{C}.$$

Получим выражение, позволяющее найти значение мгновенной мощности в произвольный момент времени. Для этого рассмотрим малый промежуток времени  $\Delta\tau \rightarrow 0$ . За этот промежуток времени количество теплоты  $\Delta Q$  можно выразить через мгновенную мощность  $N_{\text{мгн}}$ :

$$\Delta Q = N_{\text{мгн}} \Delta\tau.$$

С другой стороны,  $\Delta Q$  можно выразить через изменение площади прямоугольника на графике зависимости  $N_{\text{ср}}(\tau)$ :

$$\Delta Q = (N_{\text{ср}} + \Delta N_{\text{ср}})(\tau + \Delta\tau) - N_{\text{ср}}\tau = \Delta N_{\text{ср}}\tau + N_{\text{ср}}\Delta\tau + \Delta N_{\text{ср}}\Delta\tau.$$

Пренебрегая малыми величинами второго порядка ( $\Delta N_{\text{ср}}\Delta\tau \approx 0$ ), получаем:

$$\Delta Q \approx \Delta N_{\text{ср}}\tau + N_{\text{ср}}\Delta\tau.$$

Приравнявая выражения для  $\Delta Q$ , находим:

$$N_{\text{мгн}}\Delta\tau = \Delta N_{\text{ср}}\tau + N_{\text{ср}}\Delta\tau.$$

Разделив на  $\Delta\tau$ , получаем выражение для мгновенной мощности:

$$N_{\text{мгн}} = \frac{\Delta N_{\text{ср}}}{\Delta\tau}\tau + N_{\text{ср}},$$

где величина  $k = \frac{\Delta N_{\text{ср}}}{\Delta\tau}$  пропорциональна угловому коэффициенту касательной к графику  $N_{\text{ср}}(\tau)$ . Аналогичное выражение можно получить, используя дифференцирование:

$$N_{\text{мгн}} = \frac{dQ}{d\tau} = \frac{d(N_{\text{ср}}\tau)}{d\tau} = \frac{dN_{\text{ср}}}{d\tau}\tau + N_{\text{ср}}.$$

Построим касательные к графику в точках  $C$  и  $D$  и рассчитаем их угловые коэффициенты наклона:

$$k_C = 0 \text{ Вт/с}, \quad k_D = -\frac{2}{3} \text{ Вт/с}.$$

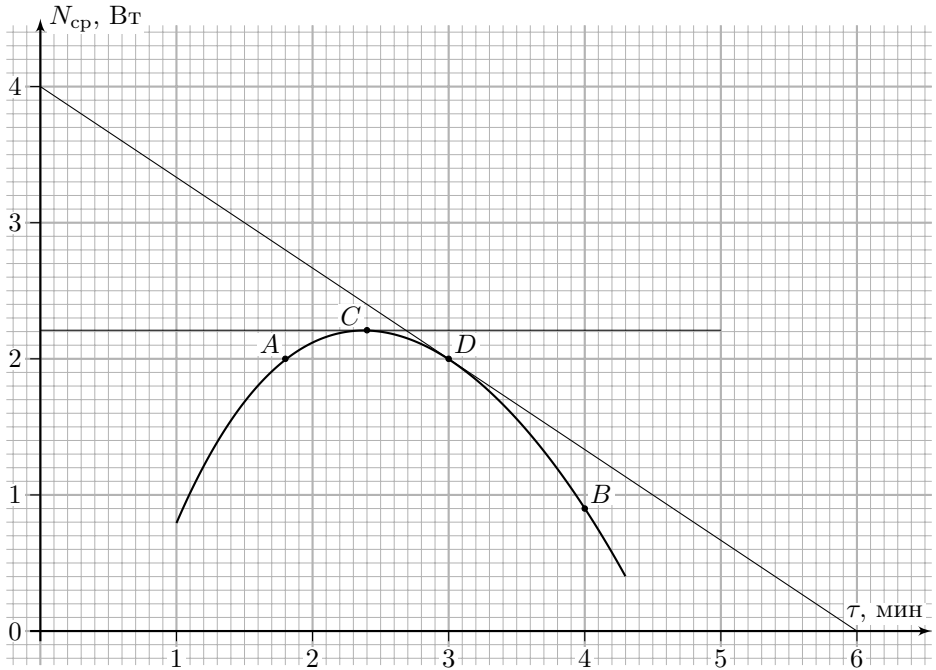


Рис. 4

Возможен другой способ решения.

Зная  $N_{\text{ср}}(\tau)$ , построим график зависимости  $Q(\tau) = N_{\text{ср}} \cdot \tau$  для моментов времени  $\tau \in [0; 4]$  мин, проведём гладкую кривую и построим касательные к графику  $Q(\tau)$  в указанные моменты времени. Угловые коэффициенты касательных будут равны мгновенной мощности:

$$N_{\text{мгн}} = \frac{dQ}{d\tau}.$$

Тогда:

$$N_{C_{\text{мгн}}} = k_C \tau_C + N_{C_{\text{ср}}} \approx 2,2 \text{ Вт};$$

$$N_{D_{\text{мгн}}} = k_D \tau_D + N_{D_{\text{ср}}} = 0 \text{ Вт}.$$

### Задача №9-Т5. Неламповый диод

Пусть сила тока источника равна  $I_0$ . Показания амперметра равны нулю при сбалансированном мосте, сила тока через резистор  $R_2$  (и через нелинейный элемент, подключённый к точкам  $A$  и  $B$ ) равна:

$$I_{AB} = I_0 \frac{R_3}{R_2 + R_3}.$$

Сила тока через резисторы  $R_1$  и  $R_3$  равна:

$$I_1 = I_3 = I_0 \frac{R_2}{R_2 + R_3}.$$

Тогда напряжение между точками  $A$  и  $B$  равно:

$$U_{AB} = I_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 + R_3}.$$

Введём статическое сопротивление нелинейного элемента, подключённого к точкам  $A$  и  $B$ :

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I_{AB}},$$

где  $I_{AB}$  — сила тока, протекающего через элементы, подключенные к точкам  $A$  и  $B$ . В таком случае, показания амперметра равны нулю, если  $R_{AB} R_3 = R_1 R_2$ . Вольтамперные характеристики лампы и диода задаются соотношениями:

$$I_{л} = \alpha U_{л}^{2/3}, \quad I_{д} = \beta U_{д}^2,$$

или, выражая напряжение через ток:

$$U_{л} = \frac{I_{л}^{3/2}}{\alpha^{3/2}}, \quad U_{д} = \frac{\sqrt{I_{д}}}{\sqrt{\beta}}.$$

Статическое сопротивление лампы и диода соответственно равны:

$$R_{л} = \frac{U_{л}}{I_{л}} = \frac{I_{л}^{1/2}}{\alpha^{3/2}}; \quad R_{д} = \frac{U_{д}}{I_{д}} = \frac{1}{\sqrt{I_{д}}\beta}.$$

Тогда при их последовательном соединении сопротивление выражается следующим образом:

$$R_{AB} = R_{л} + R_{д} = \frac{\sqrt{I_{AB}}}{\alpha^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{\beta I_{AB}}}.$$

Это уравнение сводится к квадратному, для решения которого используем теорему Виета:

$$I_{AB} - R_{AB}\alpha^{3/2}\sqrt{I_{AB}} + \frac{\alpha^{3/2}}{\sqrt{\beta}} = 0;$$
$$\sqrt{I_{AB1}I_{AB2}} = \frac{\alpha^{3/2}}{\sqrt{\beta}}, \quad \sqrt{I_{AB1}} + \sqrt{I_{AB2}} = \alpha^{3/2}R_{AB}.$$

Так как

$$I_{AB1} = I_{01}\frac{R_3}{R_2 + R_3}, \quad I_{AB2} = I_{02}\frac{R_3}{R_2 + R_3},$$

то

$$\alpha^{3/2} = \frac{\sqrt{I_{01}} + \sqrt{I_{02}}}{R_{AB}} \sqrt{\frac{R_3}{R_2 + R_3}}, \quad \sqrt{\beta} = \frac{\sqrt{I_{01}} + \sqrt{I_{02}}}{\sqrt{I_{01}I_{02}}R_{AB}} \sqrt{\frac{R_2 + R_3}{R_3}}.$$

Статическое сопротивление лампы равно  $R_{AB} = R_1R_2/R_3$  при силе тока через неё:

$$I_{л} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \left( \sqrt{I_{01}} + \sqrt{I_{02}} \right)^2.$$

Тогда ток через источник:

$$I_{03} = \left( \sqrt{I_{01}} + \sqrt{I_{02}} \right)^2$$

Статическое сопротивление диода равно  $R_{AB} = R_1R_2/R_3$  при силе тока через него:

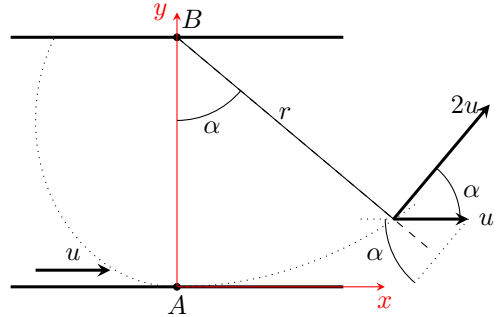
$$I_{д} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \frac{I_{01}I_{02}}{\left( \sqrt{I_{01}} + \sqrt{I_{02}} \right)^2}.$$

Тогда ток через источник:

$$I_{04} = \frac{I_{01}I_{02}}{\left( \sqrt{I_{01}} + \sqrt{I_{02}} \right)^2}.$$

### Задача №10-Т1. Переправа

Рассмотрим случай, когда лодка начинает движение по течению реки. Введём систему координат с началом в пункте  $A$ , ось  $x$  направим вдоль скорости течения, а ось  $y$  направим к пункту  $B$ . Пусть  $r$  – расстояние от точки  $B$  до центра лодки,  $\angle ABC = \alpha$ . Тогда для движения «по течению» элементарные приращения за малое время  $dt$ :



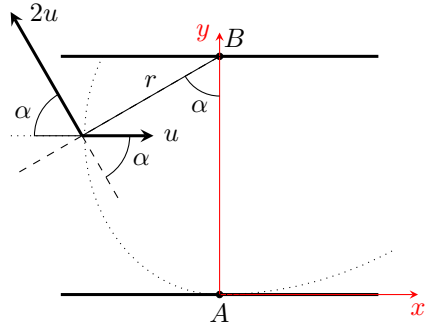
$$dr = u \sin \alpha dt, \quad (1)$$

$$dx = 2u \cos \alpha dt + u dt, \quad (2)$$

$$dy = 2u \sin \alpha dt. \quad (3)$$

В любой момент времени до достижения лодкой противоположного берега  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ , поэтому  $v_x = \frac{dx}{dt} = 2u \cos \alpha + u \geq u > 0$ . Поэтому скорость относительно берега не может быть направлена перпендикулярно линии берега. Отсюда делаем вывод, что лодка начала движение из пункта  $A$  против течения.

Итак, лодка начинает движение против течения реки. Введём также систему координат с началом в пункте  $A$ , ось  $x$  направим вдоль скорости течения, а ось  $y$  направим к пункту  $B$ ,  $r$  – расстояние от точки  $B$  до центра лодки,  $\angle ABC = \alpha$ . Тогда для движения «против течения» элементарные приращения за малое время  $dt$ :



$$dr = -u \sin \alpha dt, \quad (4)$$

$$dx = -2u \cos \alpha dt + u dt, \quad (5)$$

$$dy = 2u \sin \alpha dt. \quad (6)$$

При движении перпендикулярно линии берега  $dx = 0$ , тогда из уравнения (5) следует  $-2u \cos \alpha + u = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 1/2 \Rightarrow \alpha = 60^\circ = \pi/3$ .

Умножая уравнение (4) на 2 и складывая с уравнением (6), получим

$$2 dr + dy = 0 \Rightarrow 2r + y = \text{const}.$$

Вычислим эту константу в момент начала движения ( $r_A = l, y_A = 0$ ), откуда  $r(y) = l - y/2$ . В момент достижения противоположного берега

$$y_B = l \implies r_B = l/2.$$

В момент времени  $t_1$  из геометрических соображений можно записать, что  $r \cos \alpha = l - y$ . Подставляя зависимость  $r(y)$  и значение угла  $\alpha$  в этот момент времени, получаем уравнение:

$$\frac{1}{2}(l - y_1/2) = l - y_1 \implies y_1 = \frac{2}{3}l \implies r_1 = \frac{2}{3}l.$$

Для нахождения радиуса кривизны траектории найдём скорость и ускорение в нужных точках. Скорость относительно берега равна сумме скорости воды  $\vec{u}$  в реке и скорости лодки  $\vec{u}_л$  относительно воды:  $\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}_л$ . После возведения в квадрат получаем:  $v = \sqrt{\vec{u}^2 + \vec{u}_л^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{u}_л)} = \sqrt{u^2 + 4u^2 + 4u^2 \cos \angle(\vec{u}, \vec{u}_л)} = u\sqrt{5 + 4 \cos \angle(\vec{u}, \vec{u}_л)}$ . Для точки старта  $\angle(\vec{u}, \vec{u}_л) = \pi$ , тогда скорость равна  $v_A = u$ . Для момента времени  $t_1$  угол между скоростями  $\angle(\vec{u}, \vec{u}_л) = \pi - \alpha$ , тогда скорость равна  $v_1 = u\sqrt{3}$ .

Скорость лодки равна векторной сумме скоростей течения воды и лодки относительно воды. Скорость течения не меняется ни по модулю, ни по направлению. Скорость лодки не меняется по модулю, но меняется по направлению. Производная вектора скорости лодки по модулю равна произведению угловой скорости вращения вектора  $\vec{u}_л$  на модуль этого вектора. Получим выражение для ускорения лодки:

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\text{абс}} &= \frac{d}{dt}(\vec{u} + \vec{u}_л) = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{u}_л}{dt} = \vec{a}_л, \\ |\vec{a}_л| &= 2u \cdot \omega_\alpha = 2u \frac{d\alpha}{dt}. \end{aligned}$$

Для нахождения производной угла  $\alpha$  надо компоненту скорости, перпендикулярную отрезку  $BC$ , поделить на расстояние  $r$ :

$$\begin{aligned} v_\perp &= 2u - u \cos \alpha, \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \omega_\alpha = \frac{2u - u \cos \alpha}{r}. \end{aligned}$$

В момент выхода из пункта  $A$  угол  $\alpha = 0$ , поэтому:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{u}{l} \implies a_A = \frac{2u^2}{l}.$$

В момент времени  $t_1$  угол  $\alpha = \pi/3$ , значит:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{3u/2}{2l/3} = \frac{9u}{4l} \implies a_1 = \frac{9u^2}{2l}.$$

В пункте отправления скорость и ускорение взаимно перпендикулярны, поэтому найти радиус кривизны траектории можно следующим образом:

$$R_A = \frac{v_A^2}{a_A} = \frac{l}{2}.$$

Для момента времени  $t_1$  найдем проекцию ускорения на перпендикуляр к скорости движения, т.е. на ось  $Ox$ :  $a_{1x} = a_1 \sin \alpha = \frac{9u^2\sqrt{3}}{4l}$ , тогда радиус кривизны траектории в этой точке:

$$R_1 = \frac{v_1^2}{a_{1x}} = \frac{4\sqrt{3}l}{9}.$$

### Задача №10-Т2. Призма

#### Первый способ решения

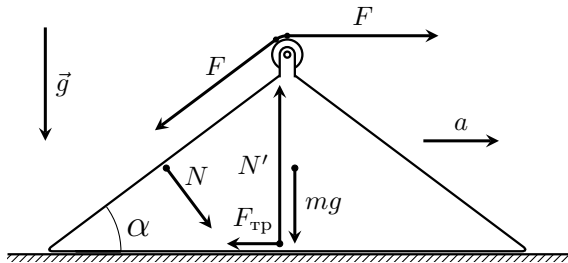


Рис. 1

Изобразим силы, действующие на призму (рис. 1). Обозначим  $N$  силу взаимодействия между брусом и призмой,  $N'$  – силу нормальной реакции, а  $F_{\text{тр}}$  – силу трения, действующие на призму со стороны стола. Тогда

$$ma = N \sin \alpha + F(1 - \cos \alpha) - F_{\text{тр}},$$

$$N' = N \cos \alpha + F \sin \alpha + mg,$$

$$F_{\text{тр}} \leq \mu(N \cos \alpha + F \sin \alpha + mg).$$

Ускорение бруска относительно стола, для удобства, разложим на две составляющие: ускорение призмы  $a$  и ускорение бруска относительно поверхности призмы  $a'$ , которое направлено параллельно её левой боковой поверхности (рис. 2). Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекции на ось, перпендикулярную направлению его относительного движения

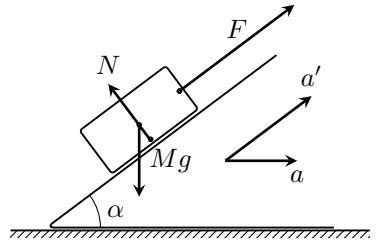


Рис. 2

$$-Ma \sin \alpha = -Mg \cos \alpha + N \quad \implies \quad N = Mg \cos \alpha - Ma \sin \alpha.$$

Полученная формула для  $N$  не содержит явно величину силы  $F$ , а ускорение призмы, согласно условию, не зависит от  $F$ . Отсюда следует, что и  $N$  не зависит от величины этой силы.

Рассмотрим два случая: 1) призма движется относительно стола; 2) трение не позволяет призме двигаться.

1. Пусть призма скользит по поверхности стола, то есть  $a > 0$ . Тогда

$$F_{\text{тр}} = \mu(N \cos \alpha + F \sin \alpha + mg) \quad \text{и} \\ ma = N \sin \alpha + F(1 - \cos \alpha) - \mu(N \cos \alpha + F \sin \alpha + mg).$$

Чтобы ускорение  $a$  не зависело от силы  $F$ , все слагаемые, включающие её, должны сократиться. Это возможно, если

$$1 - \cos \alpha = \mu \sin \alpha \quad \implies \quad \mu = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - 4/5}{3/5} = \frac{1}{3}.$$

2. Пусть теперь призма не скользит, то есть  $a = 0$ . Тогда  $N = Mg \cos \alpha$  и

$$F_{\text{тр}} = F(1 - \cos \alpha) + Mg \sin \alpha \cos \alpha \leq \mu(Mg \cos^2 \alpha + F \sin \alpha + mg).$$

Перегруппируем выражения в полученном неравенстве:

$$F(1 - \cos \alpha - \mu \sin \alpha) \leq \mu g(M \cos^2 \alpha + m) - Mg \sin \alpha \cos \alpha.$$

Так как оно должно выполняться при любых значениях  $F$  (в том числе, при  $F = 0$ ), выражение в правой части должно быть неотрицательным, а выражение в левой части – наоборот, неположительным. Отсюда следует, что

$$\mu \geq \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \mu \geq \frac{M \sin \alpha \cos \alpha}{M \cos^2 \alpha + m} = \frac{2 \cdot 3/5 \cdot 4/5}{2 \cdot (4/5)^2 + 1} = \frac{8}{19} \approx 0,42.$$

Поскольку последнее неравенство – более сильное, получим, что призма будет покоиться при любом значении  $F$ , если  $\mu \geq 8/19$ .

Используя полученное выше значение  $\mu = 1/3$ , найдём величину ускорения  $a$  в случае, когда призма скользит по столу:

$$\begin{aligned}
 ma &= N(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \mu mg = M(g \cos \alpha - a \sin \alpha)(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - \mu mg \implies \\
 \implies a &= 2 \left( g \cdot \frac{4}{5} - a \cdot \frac{3}{5} \right) \cdot \left( \frac{3}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) - \frac{1}{3} \cdot g = g \cdot \frac{8}{15} - a \cdot \frac{2}{5} - \frac{g}{3} \implies a = \frac{g}{7}.
 \end{aligned}$$

### Второй способ решения

Изобразим силы, действующие на призму (рис. 1). Обозначим  $N$  силу взаимодействия между бруском и призмой,  $N'$  – силу нормальной реакции, а  $F_{\text{тр}}$  – силу трения, действующие на призму со стороны стола. Тогда, из второго закона Ньютона в проекции на вертикальную ось:

$$N' = N \cos \alpha + F \sin \alpha + mg.$$

Ускорение бруска относительно стола, для удобства, разложим на две составляющие: ускорение призмы  $a$  и ускорение бруска относительно поверхности призмы  $a'$ , которое направлено параллельно её левой боковой поверхности (рис. 2). Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекции на ось, перпендикулярную направлению его относительного движения

$$-Ma \sin \alpha = -Mg \cos \alpha + N \implies N = Mg \cos \alpha - Ma \sin \alpha.$$

Полученная формула для  $N$  не содержит явно величину силы  $F$ , а ускорение призмы, согласно условию, не зависит от  $F$ . Отсюда следует, что и  $N$  не зависит от величины этой силы.

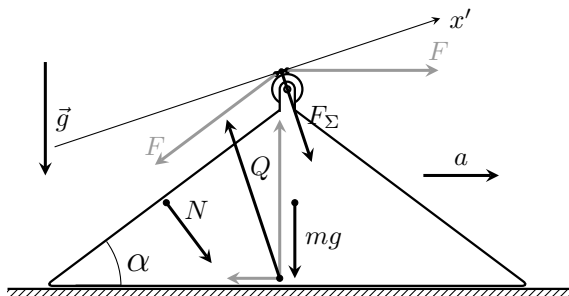


Рис. 3

Рассмотрим случай, когда призма скользит. Результирующая сила  $\vec{F}_{\Sigma}$ , действующая на блок со стороны нити, направлена под углом  $\alpha/2$  к вертикали (рис. 3).

Вместо  $N'$  и  $F_{\text{тр}}$  введём вектор полной силы реакции опоры

$$\vec{Q} = \vec{N}' + \vec{F}_{\text{тр}} \neq 0.$$

Из второго закона Ньютона для призмы в проекции на ось  $Ox'$ , перпендикулярную силе  $\vec{F}_{\Sigma}$ :

$$N \sin(\alpha/2) + Q_x - mg \sin(\alpha/2) = ma \cos(\alpha/2). \quad (a)$$

В приведённой формуле все слагаемые, кроме  $Q_x$ , не зависят от  $F$ , это означает, что  $Q_x = 0$ . Такое возможно, если вектор  $\vec{Q}$  направлен перпендикулярно оси  $Ox'$ , т.е. под углом  $\alpha/2$  к вертикали. Тогда коэффициент трения:

$$\mu = \text{tg}(\alpha/2) = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{3}.$$

Ускорение найдём, подставив  $N = Mg \cos \alpha - Ma \sin \alpha$  в соотношение (a):

$$(Mg \cos \alpha - Ma \sin \alpha) \sin(\alpha/2) - mg \sin(\alpha/2) = ma \cos(\alpha/2).$$

Откуда

$$a = \frac{\frac{M}{m} \cos \alpha - 1}{\frac{M}{m} \sin \alpha + \text{ctg}(\alpha/2)} g = \frac{g}{7}.$$

В случае, когда трение не позволяет призме двигаться, сумма сил, действующих на неё, равна нулю:

$$\vec{Q} + \vec{F}_{\Sigma} + \vec{N} + m\vec{g} = 0 \implies \vec{Q} = -\vec{F}_{\Sigma} - \vec{N} - m\vec{g}.$$

Рассмотрим одно из возможных значений  $F_{\Sigma} = 0$ , тогда

$$\begin{aligned} \text{tg} \beta &= \frac{N \sin \alpha}{N \cos \alpha + mg} = \frac{M \cos \alpha \sin \alpha}{M(\cos \alpha)^2 + m} = \\ &= \frac{2 \cdot 3/5 \cdot 4/5}{2 \cdot (4/5)^2 + 1} = \frac{8}{19} > \text{tg}(\alpha/2) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство показывает, что при росте  $F_{\Sigma}$  угол между вертикалью и вектором  $\vec{Q}$  будет уменьшаться. А это означает, что  $\beta$  – предельный угол отклонения  $\vec{Q}$  от вертикали, т.е.  $a = 0$  при  $\mu \geq \frac{8}{19}$ .

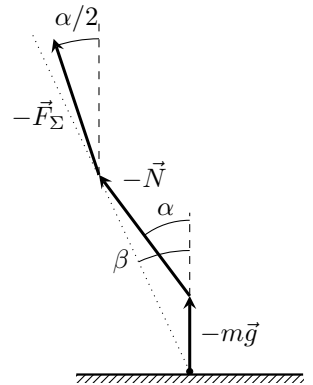


Рис. 4

### Задача №10-Т3. Падающий поршень

Так как поршень вначале находится в равновесии, то  $P_0 S = mg$  или  $P_0 V_0 = mgh_0$ , где  $P_0$  и  $V_0$  – начальное давление и начальный объём газа соответственно,  $S$  – площадь внутреннего поперечного сечения сосуда.

При движении системы механическая энергия поршня с грузом передается только газу (поршень перемещается в сосуде практически без трения, снаружи вакуум), а газ не передает теплоту в окружающую среду (по условию). В этом случае первое начало термодинамики имеет вид:

$$A_{\text{внеш}} = \Delta U,$$

где  $\Delta U$  – изменение внутренней энергии газа,  $A_{\text{внеш}}$  – работа внешних сил над газом, равная убыли полной механической энергии поршня с грузом:

$A_{\text{внеш}} = -\Delta E$ . В результате получаем:

$$\Delta U + \Delta E = 0.$$

Согласно условию, при движении поршня от исходного положения до его первой остановки процессы в газе можно считать равновесными. Поэтому будем считать, что с газом происходит обратимый адиабатический процесс.

Для него справедливо уравнение Пуассона  $PV^\gamma = \text{const}$ , где  $\gamma = 5/3$  для одноатомного идеального газа,  $P$  и  $V$  – давление и объём газа в некоторый произвольный момент времени. В нашем случае  $PV^{5/3} = P_0 V_0^{5/3}$  или

$$P = P_0 (V_0/V)^{5/3} = P_0 (h_0/h)^{5/3},$$

$$PV = P_0 V_0 (V_0/V)^{2/3} = P_0 V_0 (h_0/h)^{2/3},$$

где  $h$  – расстояние от поршня до дна сосуда в произвольный момент времени.

Рассмотрим момент времени, когда поршень находился в самой нижней точке на расстоянии  $h_{\text{min}}$  от дна сосуда. В этот момент скорость поршня с грузом равна нулю, т.е.  $\Delta E = (M + m)g(h_{\text{min}} - h_0)$ .

Изменение внутренней энергии газа:

$$\Delta U = \frac{3}{2} (P_1 V_1 - P_0 V_0) = \frac{3}{2} P_0 V_0 \left( \left( \frac{h_0}{h_{\text{min}}} \right)^{2/3} - 1 \right) = \frac{3}{2} mgh_0 \left( \left( \frac{h_0}{h_{\text{min}}} \right)^{2/3} - 1 \right),$$

где  $P_1$  и  $V_1$  – давление и объём газа соответственно в рассматриваемый момент времени.

После объединения получаем:

$$\frac{3}{2}mgh_0 \left( \left( \frac{h_0}{h_{\min}} \right)^{2/3} - 1 \right) + (M + m)gh_0 \left( \frac{h_{\min}}{h_0} - 1 \right) = 0.$$

Подставляем  $\frac{h_0}{h_{\min}} = 2$  и находим:

$$M/m = 3(2^{2/3} - 1) - 1 \approx 0,762.$$

$$M \approx 0,762m \approx 76 \text{ кг.}$$

Будем рассматривать поршень с грузом как единое тело. Максимальный модуль ускорения поршня с грузом достигается, когда их скорость равна нулю, при этом суммарная внешняя сила – максимальна. Этим условиям удовлетворяют два положения поршня: начальное положение (сила тяжести больше силы давления газа на поршень) и нижнее положение (сила давления газа на поршень больше силы тяжести).

В начальный момент модуль ускорения поршня с грузом равен:

$$a_0 = \frac{(M + m)g - P_0S}{M + m} = \frac{(M + m)g - mg}{M + m} = \frac{M}{M + m}g \approx 0,43g.$$

В нижнем положении модуль ускорения поршня с грузом равен:

$$\begin{aligned} a &= \frac{P_0S(h_0/h_{\min})^{5/3} - (M + m)g}{M + m} = g \left( \frac{m(h_0/h_{\min})^{5/3}}{M + m} - 1 \right) = \\ &= g \left( \frac{2^{5/3}m}{M + m} - 1 \right) \approx 0,80g. \end{aligned}$$

Выбираем максимальное значение:

$$a_{\max} = g \left( \frac{m(h_0/h_{\min})^{5/3}}{M + m} - 1 \right) \approx 0,80g = 8 \text{ м/с}^2.$$

Максимальной скорости поршень достигает на первом участке движения (от верхней точки до нижней). При максимальной скорости движения ускорение равно нулю, т.е. сила тяжести  $(M + m)g$  равна силе давления газа  $P_2S$ :

$$(M + m)g = P_2S = P_0S(h_0/h_2)^{5/3} = mg(h_0/h_2)^{5/3},$$

где  $h_2$  – расстояния от поршня до дна сосуда в указанный момент времени. Из полученного уравнения найдем  $h_2/h_0 = (M/m + 1)^{-3/5} \approx 0,712$ .

Закон сохранения энергии (первое начало термодинамики) для газа записывается так:

$$\frac{3}{2}(P_2V_2 - P_0V_0) + (M + m)g(h_2 - h_0) + \left( \frac{(M + m)v_{\max}^2}{2} - 0 \right) = 0$$

или

$$\frac{3}{2}mgh_0 \left( \left( \frac{h_0}{h_2} \right)^{2/3} - 1 \right) + (M + m)gh_0 \left( \frac{h_2}{h_0} - 1 \right) + \frac{(M + m)v_{\max}^2}{2} = 0,$$

где  $P_2$  и  $V_2$  – давление и объём газа соответственно в момент прохождения поршнем положения равновесия. Откуда:

$$\frac{v_{\max}^2}{2gh_0} = \left( 1 - \frac{h_2}{h_0} \right) + \frac{3m}{2(M + m)} \left( 1 - \left( \frac{h_0}{h_2} \right)^{2/3} \right).$$

Подставляем значение  $h_2/h_0$ :

$$\frac{v_{\max}^2}{2gh_0} \approx 0,07,$$

откуда получаем:

$$v_{\max} \approx \sqrt{0,14gh_0} \approx 1,2 \text{ м/с.}$$

На длительном промежутке времени процессы, протекающие в газе, становятся необратимыми, т.е. механическая энергия необратимо переходит во внутреннюю энергию.

Уравнение адиабаты  $PV^\gamma = \text{const}$ , выведенное для обратимого процесса, в этом случае не применимо.

Запишем условие равновесия поршня с грузом:  $PS = (M + m)g$ . Закон сохранения энергии (первое начало термодинамики) в этом случае имеет вид:

$$\frac{3}{2}(PSh - P_0V_0) + (M + m)g(h - h_0) = 0.$$

Получаем:

$$\frac{3}{2}((M + m)gh - mgh_0) + (M + m)g(h - h_0) = 0.$$

Находим новую высоту:

$$h = \frac{5m + 2M}{5(M + m)}h_0 \approx 0,74h_0 = 0,74 \text{ м.}$$

### Задача №10-Т4. Квадрат vs круг

Пусть поверхностная плотность заряда **всех** фигур, упоминаемых ниже, постоянна, одинакова и равна  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ).

Рассмотрим бесконечно малую заряженную площадку с площадью  $\Delta S_1$  и зарядом  $\sigma \Delta S_1$ , расположенную на расстоянии  $r$  от точки  $O$ , и геометрически ей подобную вторую площадку, заряженную с той же поверхностной плотностью  $\sigma$ , но расположенную на расстоянии  $\lambda r$ , где  $\lambda$  – коэффициент подобия. Поскольку

$$\Delta S_2 = \lambda^2 \Delta S_1,$$

напряжённости электрических полей, созданных этими площадками, равны:

$$E_2 = \frac{\sigma \Delta S_2}{4\pi\epsilon_0(\lambda r)^2} = \frac{\sigma \lambda^2 \Delta S_1}{4\pi\epsilon_0(\lambda r)^2} = \frac{\sigma \Delta S_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} = E_1.$$

Рассмотрим теперь две заряженные пластины конечного размера, геометрически подобные друг другу с коэффициентом подобия  $\lambda$  и расположенные так, как показано на рис. 1, где  $O$  – центр подобия этих пластин ( $\vec{OC} = \lambda \cdot \vec{OA}$ ,  $\vec{OD} = \lambda \cdot \vec{OB}$  и т.п.). Разобьём обе пластины на бесконечно малые площадки, причём так, чтобы каждый элемент разбиения второй пластины был подобен соответствующему элементу первой с центром подобия в точке  $O$ . Поскольку, как было показано выше, напряжённости электрических полей, созданных в точке  $O$  бесконечно малыми площадками, образующими такую пару, совпадают, то и напряжённости электрических полей, созданных в точке  $O$  всей первой и всей второй пластиной, тоже будут совпадать (по модулю и по направлению).

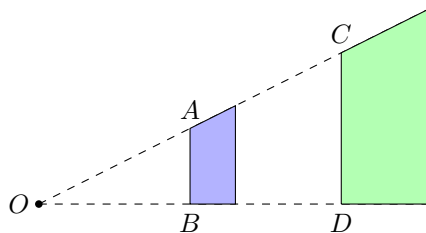


Рис. 1

В частности, это значит, что напряжённость поля в точке  $O'$ , созданного фигурой, изображённой на рис. 2 из условия задачи, будет также равна  $E_0$ .

$$E'/E_0 = 1.$$

Из симметрии фигуры следует, что вектор  $\vec{E}_A$  направлен вверх и вправо вдоль этой оси симметрии.

Используя результат пункта 1, получим, что напряжённость электрического поля, созданного в точке  $A$  каждой из трёх фигур на рис. 2 (зелёной, синей или серой), равна  $E_0$ . Отсюда следует, что заряженная фигура, изображённая в условии на рис. 3, создаёт в точке  $A$  поле с напряжённостью  $3E_0$ .

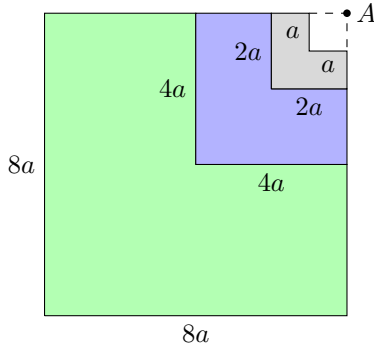


Рис. 2

Вектор  $\vec{E}_A$  направлен вверх и вправо вдоль оси симметрии фигуры;  $E_A = 3E_0$ .

Из симметрии фигуры следует, что вектор  $\vec{E}_B$  направлен вверх и вправо вдоль этой оси симметрии.

Для ответа на третий вопрос задачи рассмотрим заряженную пластину, изображённую на рис. 3 (всю окрашенную как-либо область). Обозначим  $E_{\text{зел}}$  и  $E_{\text{син}}$  напряжённости полей, созданных в точке  $B$  зелёной и синей областью соответственно. Из подобия этих областей следует, что  $E_{\text{зел}} = E_{\text{син}}$ .

Напряжённость электрического поля  $E$ , созданного всей пластиной в точке  $B$ , с одной стороны, равна  $E = E_0 + E_{\text{син}}$ , а с другой стороны,  $E = E_B + E_{\text{зел}}$ , где  $E_B$  – искомая напряжённость поля, созданного фигурой, изображённой в условии на рис. 4. Приравнивая правые части этих соотношений, получим, что

$$E_B = E_0.$$

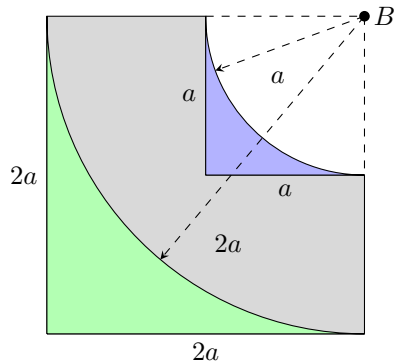


Рис. 3

Вектор  $\vec{E}_B$  направлен вверх и вправо вдоль оси симметрии фигуры;  $E_B = E_0$ .

Воспользуемся подходом из предыдущего пункта и рассмотрим заряженную пластину, изображённую на рис. 4 (снова всю окрашенную как-либо область). Зелёная и синяя области, благодаря подобию, создают в точке  $C$  поле с одинаковой по величине и направлению напряжённостью. Следовательно, напряжённость поля, созданного в точке  $C$  указанной в условии трапецией, совпадает с напряжённостью поля, созданного в той же точке кольцевым сектором с углом в  $30^\circ$ .

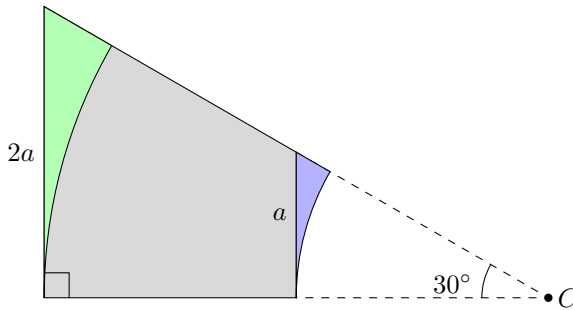


Рис. 4

Отсюда, используя симметрию кольцевого сектора, делаем вывод, что вектор  $\vec{E}_C$  напряжённости электрического поля, созданного трапецией в точке  $C$ , направлен по внешней биссектрисе угла  $\angle C$  (см. рис. 5).

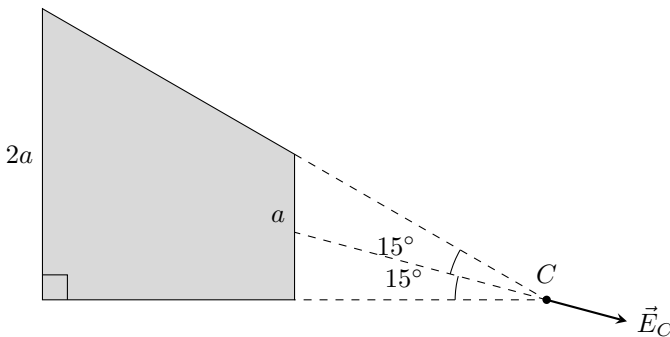


Рис. 5

Кольцевой сектор с внутренним и внешним радиусами, отличающимися в два раза, представляет собой (с точностью до подобия) одну треть от фигуры, изображённой в условии на рис. 4. Используя результат предыдущего пункта, получим (см. рис. 6)

$$E_0 = 2E_C \cos 30^\circ + E_C = E_C(\sqrt{3} + 1) \Rightarrow E_C = \frac{E_0}{\sqrt{3} + 1}.$$

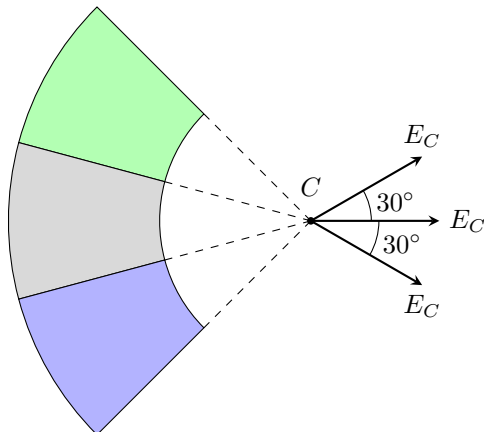


Рис. 6

Вектор  $\vec{E}_C$  направлен вдоль внешней биссектрисы угла  $\angle C$ ;

$$E_C = \frac{E_0}{\sqrt{3} + 1}.$$

### Задача №10-Т5. Вай кодамо!

Используя симметрию электрической цепи, докажем, что потенциалы на соседних выводах источников каждого типа одинаковы. Для этого введём обозначения узлов  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$  и т.д., как показано на рис. 1.

Воспользуемся методом наложения. Рассмотрим сначала систему из источников только с ЭДС  $\mathcal{E}$  при «выключенных» ЭДС всех остальных источников (см. рис. 2).

Сдвиг на одно звено схемы вдоль направления  $A_3 - A_1$  переводит схему «саму в себя», поэтому  $\varphi_{A_3} - \varphi_{B_3} = \varphi_{A_2} - \varphi_{B_2} = \varphi_{A_1} - \varphi_{B_1} = \Delta\varphi$ , а также  $\varphi_{A_4} - \varphi_{B_3} = \varphi_{A_3} - \varphi_{B_2} = \varphi_{A_2} - \varphi_{B_1} = \Delta\varphi'$ , где  $\varphi_M$  – потенциал соответствующего узла  $M$ .

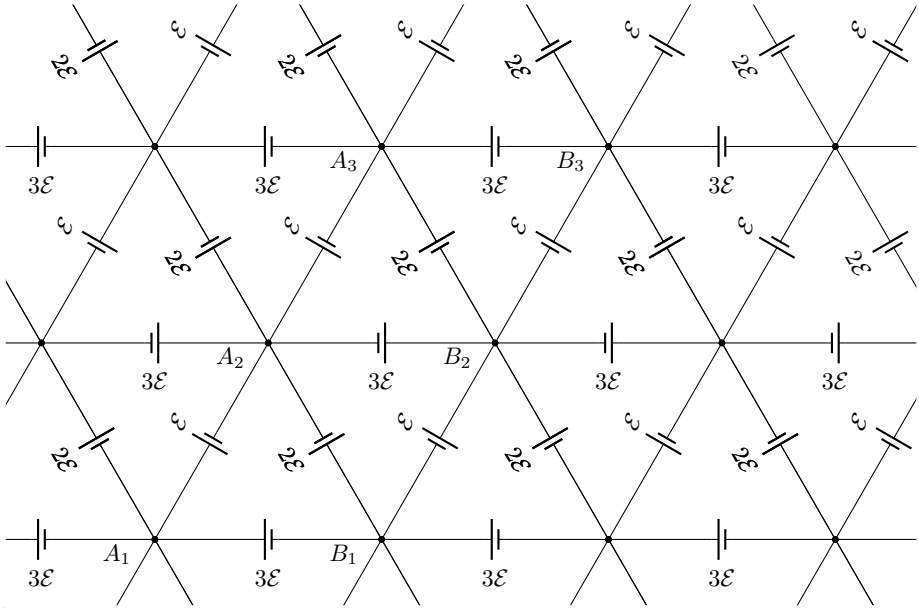


Рис. 1

Перевернём цепь таким образом, что узлы  $A_3$  и  $B_2$ , а также узлы  $A_2$  и  $B_3$  меняются местами (см. рис. 3).

Так как цепь перешла «сама в себя», то

$$\varphi_{B_2} - \varphi_{A_2} = \varphi_{B_3} - \varphi_{A_3} = \varphi_{B_4} - \varphi_{A_4} = \Delta\varphi,$$

$$\varphi_{B_1} - \varphi_{A_2} = \varphi_{B_2} - \varphi_{A_3} = \varphi_{B_3} - \varphi_{A_4} = \Delta\varphi'.$$

Откуда следует, что  $\Delta\varphi = -\Delta\varphi$  и  $\Delta\varphi' = -\Delta\varphi'$  или  $\Delta\varphi = 0$  и  $\Delta\varphi' = 0$ . С учётом этого получаем, что потенциалы, созданные системой источников с ЭДС  $\mathcal{E}$ , во всех узлах такой схемы одинаковы.

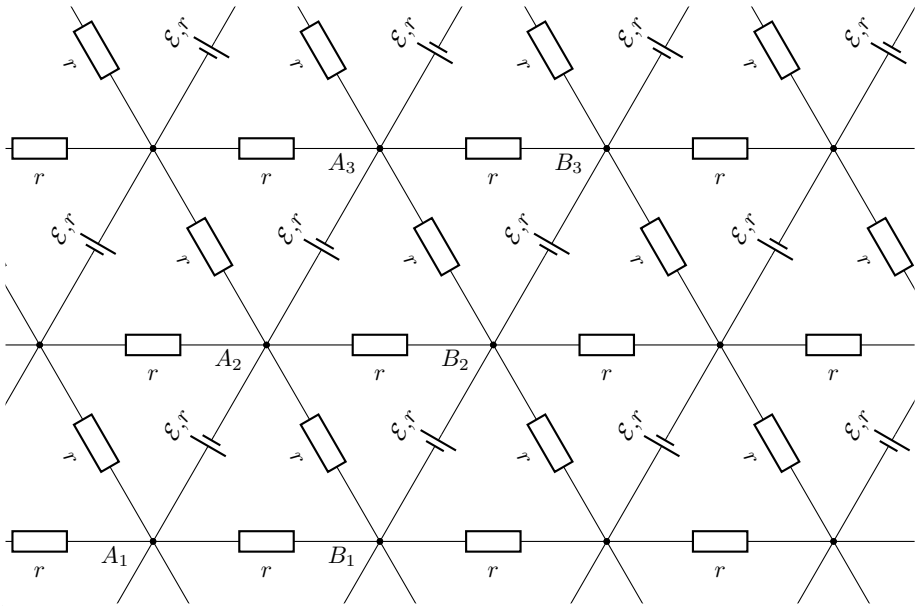


Рис. 2

Аналогично можно рассмотреть отдельно систему из источников только с ЭДС  $2\mathcal{E}$  и систему из источников только с ЭДС  $3\mathcal{E}$  при «выключенных» ЭДС всех остальных источников. Таким образом, разность потенциалов между любыми двумя узлами схемы в каждой рассмотренной системе равна нулю, а согласно методу наложения и результирующая разность потенциалов между любыми двумя узлами схемы также равна нулю. Значит, разности потенциалов между плюсом и минусом каждого типа источников равны:

$$\varphi_+ - \varphi_- = 0.$$

Запишем закон Ома для произвольной пары соседних узлов, участок цепи между которыми содержит ЭДС  $\mathcal{E}$ :

$$(\varphi_+ - \varphi_-) + \mathcal{E} = I_1 r.$$

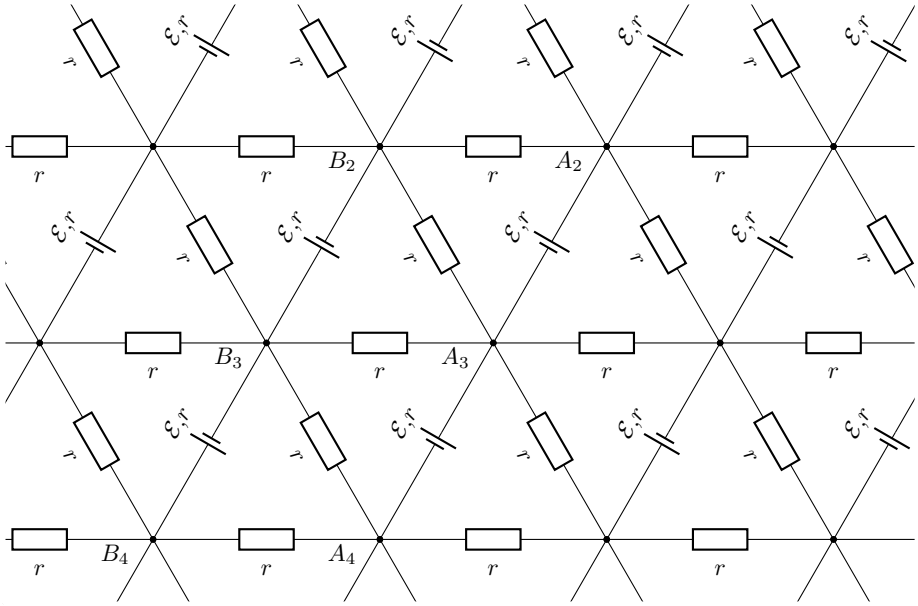


Рис. 3

Здесь положительному значению  $I_1$  соответствует ток, текущий в направлении действия  $\mathcal{E}$ . Поскольку  $\varphi_+ - \varphi_- = 0$ , сила тока  $I_1 = \mathcal{E}/\nabla$  для любого такого участка. Аналогично для участков цепи, содержащих ЭДС  $2\mathcal{E}$  и  $3\mathcal{E}$ :

$$(\varphi_+ - \varphi_-) + 2\mathcal{E} = I_2 r;$$

$$(\varphi_+ - \varphi_-) + 3\mathcal{E} = I_3 r.$$

Следовательно,

$$I_1 = \mathcal{E}/r \tag{1}$$

$$I_2 = 2\mathcal{E}/r \tag{2}$$

$$I_3 = 3\mathcal{E}/r \tag{3}$$

Рассмотрим бесконечную электрическую цепь с двумя соседними (ближайшими) выводами на источнике любого типа как эквивалентный источник с ЭДС  $\mathcal{E}_{\text{ЭКВ}}$  и внутренним сопротивлением  $r_{\text{ЭКВ}}$  (рис. 4).

ЭДС эквивалентного источника  $\mathcal{E}_{\text{ЭКВ}} = 0$ , так как разность потенциалов между любыми двумя соседними выводами равна нулю.



Рис. 4

Внутреннее сопротивление эквивалентного источника  $r_{\text{ЭКВ}}$  определим как сопротивление между двумя соседними (ближайшими) узлами бесконечной сетки с «выключенными» ЭДС. Для этого снова воспользуемся методом наложения. Рассмотрим сначала бесконечную сетку с внутренними сопротивлениями источников, где в один из узлов втекает ток силой  $I_0$  и растекается до бесконечности. В ближайших к данному узлу ветках силы токов будут одинаковы (в силу симметрии) и равны  $I_+ = I_0/6$ . Затем рассмотрим ту же бесконечную сетку, где из соседнего узла вытекает ток силой  $I_0$ . Аналогично, в данной схеме токи в ближайших к данному узлу ветках будут одинаковы и равны  $I_- = I_0/6$ .

Далее рассмотрим суперпозицию этих двух случаев. Тогда напряжение на сопротивлении  $r$  равно  $(I_+ + I_-)r$ , следовательно

$$r_{\text{ЭКВ}} = \frac{(I_+ + I_-)r}{I_0} = \frac{r}{3}.$$

Таким образом, при использовании любых двух соседних (ближайших) узлов электрическая схема ведёт себя как резистор с сопротивлением  $r_{\text{ЭКВ}} = r/3$ . Поэтому показания омметра не будут зависеть от полярности его подключения. С учётом этого получаем ответ для показаний омметра:

$$R_1 = r/3 \tag{4}$$

$$R_2 = r/3 \tag{5}$$

$$R_3 = r/3 \tag{6}$$

Эти результаты не зависят от полярности подключения омметра.

Эквивалентный источник из предыдущего пункта можно представить как параллельное соединение источника с ЭДС  $2\mathcal{E}$  и сопротивлением  $r$  (который заменяется другим источником по условию) и источника с ЭДС  $\mathcal{E}^*$  и сопротивлением  $r^*$ , который эквивалентен оставшейся части электрической схемы (см. рис. 5).

С учётом того, что ЭДС эквивалентного источника  $\mathcal{E}_{\text{ЭКВ}} = 0$  и его сопротивление  $r_{\text{ЭКВ}} = r/3$ , найдем  $\mathcal{E}^*$  и  $r^*$ .

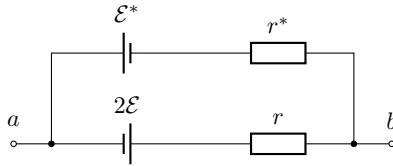


Рис. 5

Сопротивления связаны соотношением

$$\frac{1}{r_{\text{ЭКВ}}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^*},$$

откуда  $r^* = r/2$ . Приравнявая токи короткого замыкания рассмотренного параллельного соединения источников и эквивалентного источника, приходим к соотношению:

$$\frac{\mathcal{E}^*}{r^*} - \frac{2\mathcal{E}}{r} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ЭКВ}}}{r_{\text{ЭКВ}}},$$

откуда находим  $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$ .

Источник с ЭДС  $2\mathcal{E}$  и сопротивлением  $r$  можно заменить источником с ЭДС  $\mathcal{E}$  и сопротивлением  $r/2$  двумя разными способами (используя разную полярность подключения, как представлено на рис. 6).

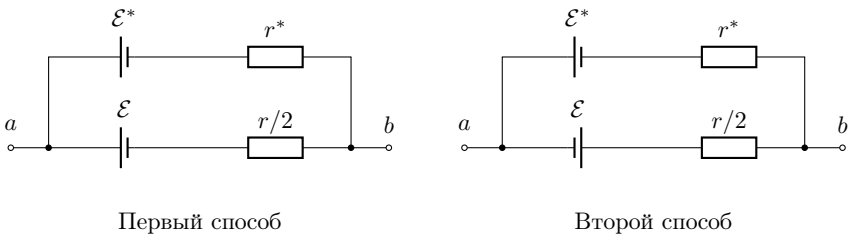


Рис. 6

При подключении первым способом согласно закону Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}}{r/2 + r/2} = 0.$$

При подключении вторым способом согласно закону Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}}{r/2 + r/2} = \frac{2\mathcal{E}}{r}.$$

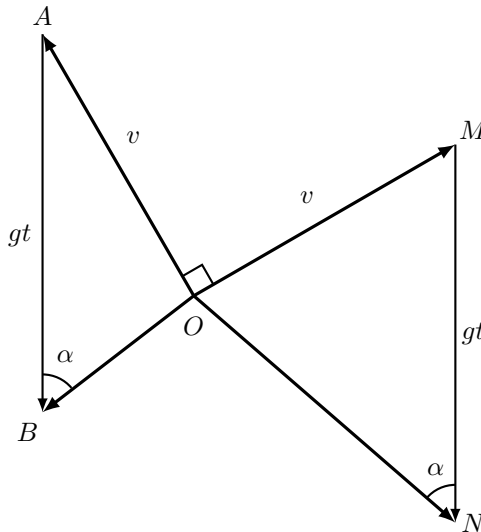
В итоге, в зависимости от способа подключения получаем:

$$I = 0 \quad \text{или} \quad I = 2\mathcal{E}/r.$$

### Задача №11-Т1. Два камня

#### Графический метод решения

Построим векторные треугольники скоростей для каждого из камней с общим началом в точке  $O$ . Вершины треугольников для удобства подпишем буквами. На рисунке  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OM}$  – векторы начальных скоростей,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{ON}$  – векторы скоростей перед падением на землю одного из камней.



По теореме синусов из  $\triangle AOB$  и  $\triangle MON$  находим

$$\frac{v}{\sin \alpha} = \frac{gt}{\sin \angle AOB} = \frac{gt}{\sin \angle MON}.$$

Поскольку камни брошены по условию под разными углами, то из равенства  $\sin \angle AOB = \sin \angle MON$  следует  $\angle AOB + \angle MON = 180^\circ$ . Тогда  $\angle BON = 90^\circ$ , а камни движутся под одинаковыми углами к вертикали  $\alpha = \angle BON/2 = 45^\circ$ .

Искомый угол с горизонтом составляет  $\varphi = 90^\circ - \alpha = 45^\circ$ .

Из закона сохранения энергии:  $|\overrightarrow{ON}| = v_1 = \sqrt{v^2 + 2gh}$ .

Для нахождения расстояния между камнями в этот момент определим время движения. По теореме косинусов для  $\triangle MON$

$$v^2 + 2gh + (gt)^2 - 2\sqrt{v^2 + 2gh} \cdot gt \cdot \cos 45^\circ = v^2.$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим два корня

$$t = \frac{\sqrt{v^2 + 2gh} \pm \sqrt{v^2 - 2gh}}{\sqrt{2}g}.$$

Учитывая условие, что первоначально оба камня удаляются от земли, необходимо выбрать знак  $+$ . Умножая полученное время на относительную скорость камней  $v = \sqrt{2}v$ , получаем выражение для расстояния между камнями в этот момент времени

$$l = vt = \frac{v}{g} \left( \sqrt{v^2 + 2gh} + \sqrt{v^2 - 2gh} \right).$$

### Аналитический метод решения

Пусть первым упадет камень брошенный под углом  $\gamma$ . В момент перед падением этого камня на землю

$$y = h + v \sin \gamma t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 0.$$

откуда получаем время движения

$$t_1 = \frac{v \sin \gamma}{g} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2 \sin^2 \gamma}} \right).$$

Из уравнений движения камней определим проекции скоростей

$$v_{1x} = v \cos \gamma, v_{1y} = v \sin \gamma - gt,$$

$$v_{2x} = v \cos \beta, v_{2y} = v \sin \beta - gt.$$

В момент, когда векторы скоростей камней направлены под одинаковыми углами к горизонту

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{v_{2y}}{v_{2x}}.$$

Из получившегося соотношения следуют два уравнения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v \sin \gamma - gt_1}{v \cos \gamma},$$

$$\frac{v \sin \gamma - gt_1}{v \cos \gamma} = \frac{v \sin \beta - gt_1}{v \cos \beta}.$$

Преобразуем уравнения, используя выражение для  $t_1$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\sqrt{v^2 \sin^2 \gamma + 2gh}}{v \cos \gamma},$$

$$-\frac{\sqrt{v^2 \sin^2 \gamma + 2gh}}{v \cos \gamma} = \frac{v \sin \beta - v \sin \gamma - \sqrt{v^2 \sin^2 \gamma + 2gh}}{v \cos \beta}.$$

Выразив  $\sqrt{v^2 \sin^2 \gamma + 2gh}$  из второго уравнения и подставив в первое получим

$$\operatorname{tg} \varphi = -1.$$

Искомый угол с горизонтом составляет  $\varphi = 45^\circ$ .

Используя  $\tan \varphi = -1$ , из  $\tan \varphi = -\frac{\sqrt{v^2 \sin^2 \gamma + 2gh}}{v \cos \gamma}$  найдем

$$\sin \gamma = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{gh}{v^2}},$$

$$\cos \gamma = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{gh}{v^2}}.$$

Тогда время  $t_1$

$$t_1 = \frac{v}{g} \left( \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{gh}{v^2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{gh}{v^2}} \right).$$

Умножая полученное время на относительную скорость камней  $v = \sqrt{2}v$ , получаем выражение для расстояния между камнями в этот момент времени

$$l = vt = \frac{v}{g} \left( \sqrt{v^2 + 2gh} + \sqrt{v^2 - 2gh} \right).$$

### Задача №11-Т2. Цикл, как цикл

#### Первый метод

В процессах 2 – 3 и 4 – 1 подведенное к газу количество теплоты равно нулю, поэтому эти процессы – адиабатические, их уравнение в координатах  $(T, V)$  имеет вид

$$TV^{1/3} = \text{const.}$$

Получим уравнение процессов 1 – 2 и 3 – 4. Пусть  $\Delta T$ ,  $\Delta V$  – бесконечно малые изменения температуры и объема, тогда изменение внутренней энергии

$$\Delta U = 3\nu R \Delta T,$$

а работа газа  $\delta A = p \Delta V$ , поэтому для процесса выполняется соотношение

$$3\nu R \Delta T = \frac{\nu R T}{V} \Delta V.$$

Сократив общие множители и разделяя переменные получим

$$3 \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta V}{V},$$

откуда после интегрирования найдем уравнение процесса

$$TV^{-1/3} = \text{const.}$$

Используя уравнение адиабаты для процесса 4 – 1, найдем объем газа в точке 1:

$$T_1 V_1^{1/3} = T_4 V_4^{1/3},$$

откуда с учетом значения температур  $T_1 = 2T_4 = 2T_0$  получим  $V_1 = V_0/8$ . Аналогично с помощью уравнения процесса 3 – 4

$$T_3 V_3^{-1/3} = T_4 V_4^{-1/3},$$

получим  $V_3 = 8V_0$ . Запишем также уравнения для процессов 1 – 2 и 2 – 3:

$$T_1 V_1^{-1/3} = T_2 V_2^{-1/3}, \quad T_3 V_3^{1/3} = T_2 V_2^{1/3}.$$

Разделив второе уравнение на первое и учтем равенство  $T_1 = T_3$ :

$$V_2^{2/3} = V_3^{1/3} V_1^{1/3} = V_0^{2/3},$$

а значит  $V_2 = V_0$ . Тогда температура  $T_2 = T_1 V_1^{-1/3} V_2^{1/3} = 4T_0$ .

## Второй метод

Будем решать в терминах  $TS$ . В процессах 2 – 3 и 4 – 1 подведенное к газу количество теплоты равно нулю, поэтому эти процессы – адиабатические, в них сохраняется энтропия, поэтому

$$S_2 = S_3 \text{ и } S_1 = S_4.$$

Найдём изменение энтропии в процессах 1 – 2 и 3 – 4:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{2 dU}{T} = 2\nu C_V \frac{dT}{T}.$$

$$S_2 - S_1 = 2\nu C_V \ln \frac{T_2}{T_1} = 2\nu C_V \ln \frac{T_3}{T_4} = S_3 - S_4.$$

Получаем соотношение на температуры:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4}.$$

$$T_2 = \frac{T_1 T_3}{T_4}$$

$$T_2 = 4T_0$$

Уравнение адиабаты в координатах  $(p, V)$  имеет вид  $pV^{4/3} = \text{const}$ , а значит в логарифмических координатах график процесса – прямая

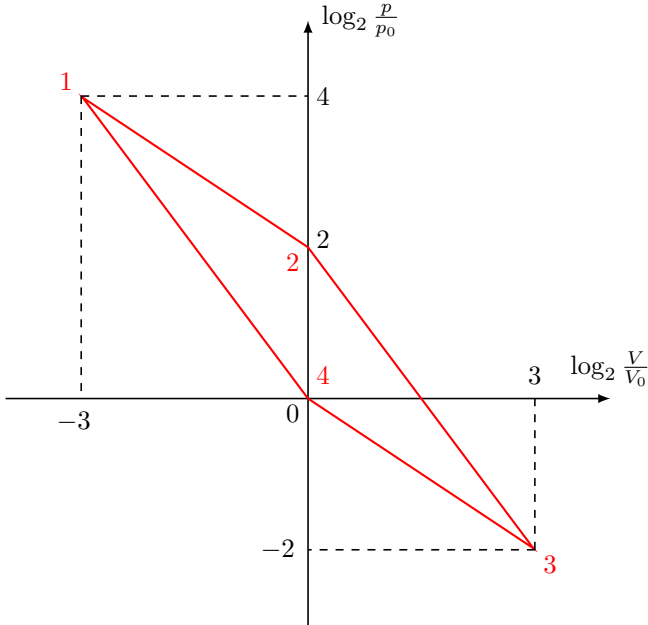
$$\log_2 \frac{p}{p_0} + \frac{4}{3} \log_2 \frac{V}{V_0} = \text{const}.$$

Аналогично уравнения процессов 1 – 2 и 3 – 4 в координатах  $(p, V)$  получается из найденного в предыдущем пункте с помощью уравнения состояния  $pV/T = \text{const}$ ,  $pV^{2/3} = \text{const}$ , в логарифмических координатах также получим прямые

$$\log_2 \frac{p}{p_0} + \frac{2}{3} \log_2 \frac{V}{V_0} = \text{const}.$$

Таким образом достаточно вычислить координаты точек 1, 2, 3, 4. Объемы уже найдены в предыдущем пункте. С помощью уравнения состояния получим  $p_1 = 16p_0$ ,  $p_2 = 4p_0$ ,  $p_3 = p_0/4$ .

Тогда координаты граничных точек процессов в координатах  $\log_2 \frac{V}{V_0}$  (абсцисса) и  $\log_2 \frac{p}{p_0}$  (ордината) равны: 1 (–3, 4), 2 (0, 2), 3 (3, –2), 4 (0, 0). График процесса имеет вид параллелограмма.



### Первый метод

На адиабатах теплота не отводится и не подводится. Для оставшихся двух процессов подведенное тепло  $Q = \Delta U + A$ , причем поскольку  $A = \Delta U$ , выполняется  $Q = 2\Delta U = 2C_V\Delta T$ , где  $C_V$  – теплоемкость газа при постоянном объеме. Тогда на участке 1–2 подводится тепло  $Q_+ = 2C_V(T_2 - T_1) = 4C_V T_0$ , а на участке 3–4 отводится тепло  $Q_- = 2C_V(T_3 - T_4) = 2C_V T_0$ , поэтому КПД

$$\eta = \frac{Q_+ - Q_-}{Q_+} = \frac{1}{2}.$$

### Второй метод

Найдём зависимость  $T(S)$  для процессов 1–2 и 3–4.

$$T_{3-4}(S) = T_4 \exp\left(\frac{S - S_4}{2\nu C_V}\right),$$

$$T_{1-2}(S) = T_1 \exp\left(\frac{S - S_1}{2\nu C_V}\right) = 2T_{3-4}(S).$$

Подставим в выражение для КПД:

$$\eta = \frac{\int_{S_1}^{S_2} T_{1-2} dS - \int_{S_4}^{S_3} T_{3-4} dS}{\int_{S_1}^{S_2} T_{1-2} dS} = \frac{2 \int_{S_4}^{S_3} T_{3-4} dS - \int_{S_4}^{S_3} T_{3-4} dS}{2 \int_{S_4}^{S_3} T_{3-4} dS} = \frac{1}{2}.$$

### Задача №11-Т3. Электростатическая левитация

Из симметрии системы относительно оси цилиндра следует, что сила электростатического взаимодействия между цилиндром и диском всегда направлена вдоль этой оси. Поскольку сила реакции опоры равна нулю, а диск неподвижен, сила  $F_0$  полностью уравновешена силой тяжести,  $F_0 = mg$ . Масса диска выражается через его плотность  $D$  и размеры как:

$$M = \pi R^2 d D.$$

Отсюда получим

$$\frac{4}{3} \frac{\rho^2 R^3 d}{\varepsilon_0} = \pi R^2 d D g,$$

а значит, плотность равна

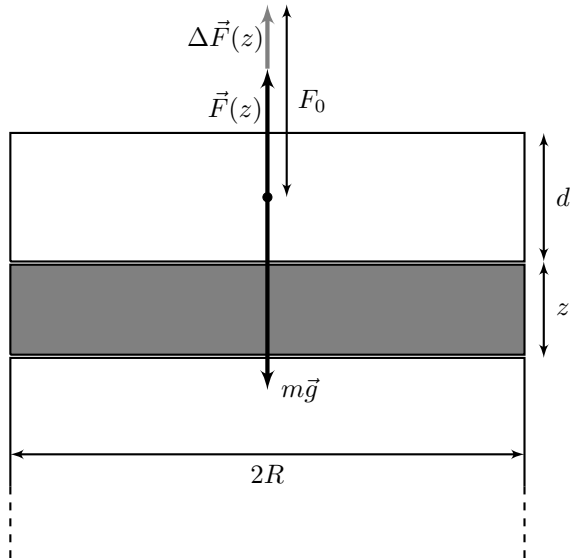
$$D = \frac{4}{3\pi} \frac{\rho^2 R}{\varepsilon_0 g}$$

При удалении диска от поверхности цилиндра действующая на него сила электростатического отталкивания уменьшается, поэтому возникает результирующая сила, направленная к цилиндру. Найти эту силу можно несколькими способами.

#### Первый способ

Введём совпадающую с осью симметрии координатную ось  $Oz$  с началом в центре торца цилиндра, так что положение тонкого диска в пространстве задаётся координатой  $z$  центра его нижнего основания. Пусть диск сдвинут на небольшое расстояние  $z \ll R$  вдоль оси. Мысленно заполним всё свободное пространство между диском и цилиндром материалом цилиндра. Тогда сила  $F_0$ , действующая на диск, будет такой же, как и в положении прямо у торца цилиндра. Поэтому сила  $F_0$  уменьшилась на силу взаимодействия двух тонких дисков: исходного и вспомогательного высотой  $z$  и плотностью заряда  $\rho$ ,

$$F(z) = F_0 - \Delta F(z).$$



Вычислим силу взаимодействия двух тонких дисков, прислонённых друг к другу вплотную. Для всех точек одного из дисков, находящегося далеко от края, можно приближенно рассматривать второй диск как бесконечную плоскость, так что нормальная напряжённость электрического поля будет равна полю бесконечной плоскости с плотностью заряда  $\sigma = \rho z$ :

$$E_n = \frac{\rho z}{2\varepsilon_0}.$$

Это приближение не применимо только для точек на расстоянии порядка  $z$  от края диска, поэтому при малых  $z$  им можно пренебречь. Эта напряжённость действует на заряд на другом диске. Тогда

$$\Delta F = \frac{\rho z}{2\varepsilon_0} \cdot \pi R^2 d\rho = \frac{\pi \rho^2 d R^2}{2\varepsilon_0} z.$$

### Второй способ

Нормальная составляющая силы, действующей на небольшую плоскую площадку  $\Delta S$  с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ , связана с потоком электрического поля  $\Delta\Phi = E_n \Delta S$  через эту площадку (индекс  $n$  означает компоненту, нормальную к площадке):

$$\Delta F_n = \sigma E_n \Delta S = \sigma \Delta\Phi.$$

В нашем случае поверхностная плотность заряда постоянна и равна

$$\sigma = \rho d,$$

так что суммируя силы, действующие на разные участки поверхности диска, получим полную силу

$$F = F_n = \sigma\Phi = \rho d\Phi,$$

где  $\Phi$  – поток электрического поля через поверхность диска.

При перемещении диска вдоль оси изменяется и поток через него, так что поток и сила – функции координаты, то есть

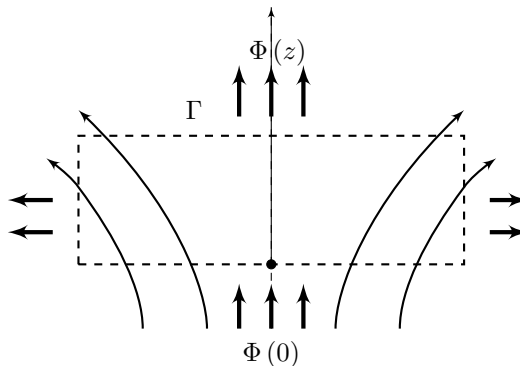
$$\Phi = \Phi(z); \quad F = F(z) = \rho d\Phi(z).$$

Для вычисления изменения потока используем теорему Гаусса. Рассмотрим цилиндр  $\Gamma$  радиуса  $R$ , высоты  $z \ll R$ , расположенный торцом к торцу с бесконечным цилиндром и соосный с ним. В отсутствие диска в  $\Gamma$  нет зарядов, так что суммарный поток через него должен быть нулевым. Выберем положительным направление потока в цилиндр  $\Gamma$ . Через торец, прилежащий к цилиндру, заходит поток  $\Phi(0)$ , через противоположный торец выходит поток  $\Phi(z)$ , а через боковую поверхность выходит поток  $E_r \cdot 2\pi Rz$ , где  $E_r$  – радиальная напряжённость полубесконечного цилиндра на расстоянии  $R$  от центра. Итак, теорема Гаусса для цилиндра  $\Gamma$  записывается следующим образом:

$$\Phi(0) - \Phi(z) - 2\pi RE_r z = 0,$$

откуда

$$\Phi(z) = \Phi(0) - 2\pi RE_r z.$$



Вычислим значение  $E_r$ . Заметим, что при добавлении второй половинки бесконечного цилиндра получается бесконечный уже в обе стороны цилиндр плотностью заряда  $\rho$  с разрезом высоты  $2z$ , поправка к радиальной напряжённости от которого пропорциональна смещению диска  $z$  и в рамках малых колебаний ( $z \ll R$ ) пренебрежимо мала. Таким образом, в первом приближении  $E_r$  составляет половину напряжённости  $E$  от бесконечного в обе стороны цилиндра с плотностью заряда  $\rho$ , которая может быть получена применением теоремы Гаусса:

$$E \cdot 2\pi Rl = \frac{\rho\pi R^2 l}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{\rho R}{2\varepsilon_0} \implies E_r = \frac{\rho R}{4\varepsilon_0}.$$

Окончательно для силы получим такое же выражение

$$F_z = \rho d \left( \Phi_0 - 2\pi R \frac{\rho R}{4\varepsilon_0} \right) = F_0 - \frac{\pi\rho^2 R^2 d}{2\varepsilon_0} z,$$

то есть тот же ответ, что и раньше.

Согласно второму закону Ньютона, запишем уравнение движения диска:

$$M\ddot{z} = -Mg + F(z) = -\frac{\pi\rho^2 d R^2}{2\varepsilon_0} z$$

или

$$\ddot{z} + \frac{\pi\rho^2 d R^2}{2M\varepsilon_0} z = 0.$$

Подставив сюда выражение для массы цилиндра через электростатическую силу  $M = F_0/g$ , получим

$$\ddot{z} + \frac{3\pi}{8} \frac{g}{R} z = 0,$$

что совпадает с уравнением гармонических колебаний с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\pi}{8} \frac{g}{R}}.$$

Однако важно принять во внимание упругое соударение диска с цилиндром, так как из-за него период уменьшается вдвое: проходит только одна половина полного колебания, а вторая, симметричная ей, нивелируется за счёт моментального разворота диска при соударении с цилиндром. Таким образом, так как положение устойчивого равновесия диска находится в точке  $z = 0$ , а движение в области  $z < 0$  невозможно, ответ не зависит от величины  $v_0$ . Окончательно

$$T = \pi \sqrt{\frac{8}{3\pi} \frac{R}{g}}.$$

Изменение радиуса диска приводит к изменению обеих движущих сил: силы тяжести и электростатической силы. Изменение силы тяжести равно

$$\Delta(mg) = g\Delta m = Dg\Delta V = \pi dDg\Delta R^2 = 2\pi dgDR\Delta R,$$

где учтено  $\Delta R \ll R$ .

Перейдём к вычислению изменения электростатической силы. Сила, действующая на исходный диск, равна сумме сил, действующих на кольцо ширины  $\Delta R$  и на диск радиуса  $R'$ . Поэтому величина силы, действующей на диск радиуса  $R'$  будет меньше на величину силы электростатического отталкивания  $\Delta F$  кольца от цилиндра

$$F = F_0 - \Delta F.$$

Таким образом, нам нужно найти силу взаимодействия кольца ширины  $\Delta R$  и полубесконечного цилиндра. Это можно сделать различными способами.

### Прямое интегрирование

Система симметрична относительно оси  $z$  цилиндра, поэтому сила, действующая на кольцо, также будет направлена вдоль оси  $z$ . Найдём составляющую электрического поля  $E_z$ , которую полубесконечный цилиндр создает в некоторой точке на своей границе. Для этого выберем некоторый объем внутри цилиндра  $dV$ , он дает вклад в напряженность электрического поля

$$dE_z = -\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + (\vec{R} - \vec{r}')^2)^{3/2}} dV,$$

где элемент объема  $dV = dz dS$ , а интегрирование по  $\vec{r}'$  производится по диску  $|\vec{r}'| < R$ , а  $\vec{R}$  – радиус-вектор рассматриваемой точки на краю диска. Тогда электрическое поле имеет вид

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho \int dS \int_{-\infty}^0 dz \frac{z}{(z^2 + (\vec{R} - \vec{r}')^2)^{3/2}}.$$

Теперь интеграл по  $z$  можно вычислить элементарно:

$$-\int_{-\infty}^0 \frac{z dz}{(z^2 + (\vec{R} - \vec{r}')^2)^{3/2}} = -\int_{-\infty}^0 \frac{d(z^2/2)}{(z^2 + (\vec{R} - \vec{r}')^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + (\vec{R} - \vec{r}')^2}} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}'|}.$$

Таким образом, остается вычислить интеграл по площади диска

$$E_z = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int dS \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}'|}.$$

Тогда искомая сила будет иметь вид

$$\Delta F = q_1 E_z,$$

где  $q_1 = 2\pi\rho R\Delta R d$  – заряд кольца.

### Энергетический метод

Воспользуемся методом виртуальных перемещений. Возьмём вначале исходный диск радиуса  $R$ , прислонённый к торцу цилиндра, и мысленно передвинем его вдоль оси на расстояние  $\delta l$ . Тогда мы совершим работу, которую обозначим за

$$A = -F_0\delta l.$$

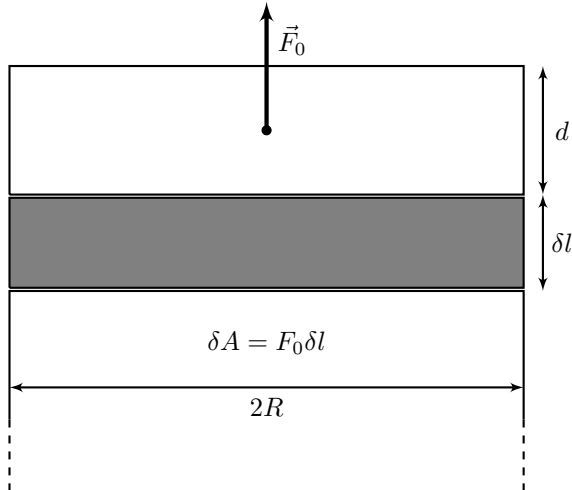
Эта работа идёт на изменение потенциальной энергии системы. Мысленно заполним освободившийся объём

$$V = \pi R^2\delta l$$

веществом цилиндра и получим исходную потенциальную энергию системы. Таким образом заключаем, что энергия взаимодействия уменьшилась на величину

$$\Delta E = -A,$$

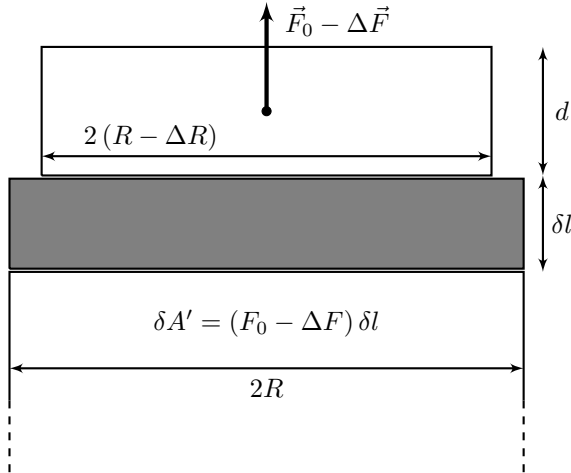
которая равна энергии взаимодействия двух тонких дисков радиусами  $R$  и  $R$ , вплотную прислонённых друг к другу.



Теперь аналогично применим метод виртуальных перемещений для диска меньшего радиуса  $R'$ . Пусть при перемещении его вдоль оси на расстояние  $\delta l$  мы совершили работу

$$A' = -F\delta l = -(F_0 - \Delta F)\delta l = -F_0\delta l + \Delta F\delta l.$$

Аналогично заметим, что по модулю эта работа равна энергии  $\Delta E'$  взаимодействия двух дисков: одного радиуса  $R$  и высоты  $\delta l$ , а другого радиуса  $R'$  и высоты  $d$ .



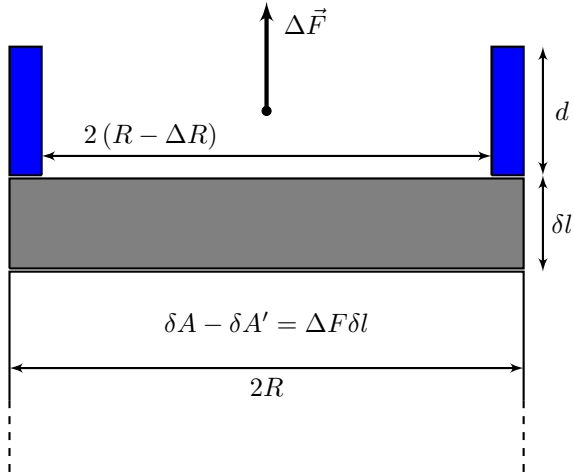
Для вычисления  $\Delta F$  вычтем одно из другого уравнения, полученные методом виртуальных перемещений:

$$\Delta F\delta l = A' - A = \Delta E - \Delta E'.$$

Заметим, что разность энергий

$$\Delta E - \Delta E'$$

равна энергии взаимодействия диска радиусом  $R$  и высотой  $\delta l$  с кольцом высоты  $d$ , внутренний и внешний радиусы которого равны  $R'$  и  $R$  соответственно. Эта энергия может быть вычислена напрямую. Поскольку  $\Delta R \ll R$ , все точки кольца расположены практически на границе диска, и задача сводится к задаче о вычислении потенциала равномерно заряженного диска на его краю.



Для диска с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$  участок площади  $dS$ , его вклад в потенциал будет иметь вид

$$d\varphi = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{r}'|},$$

а сам потенциал представляется в виде интеграла

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dS}{|\vec{R} - \vec{r}'|}.$$

Заметим, что задача свелась к в точности такому же интегралу, что и в первом методе.

Будем интегрировать в полярных координатах. Введём начало отсчёта в точке на краю диска, а за начальное направление (направление с нулевым углом) выберем направление касательной к окружности сечения диска. Положение точки на диске характеризуется двумя координатами: радиус-вектором  $r$  и углом поворота  $\theta$  радиус-вектора относительно начального направления. В терминах малых приращений  $dr$  и  $d\theta$  элементарный элемент площади записывается как

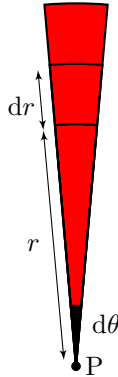
$$dS = r dr d\theta.$$

Тогда приращение потенциала от этого элемента площади (заряда) может быть записано как

$$d\varphi = k \frac{dq}{r} = k \frac{\sigma dS}{r} = k\sigma \frac{r dr d\theta}{r} = k\sigma dr d\theta.$$

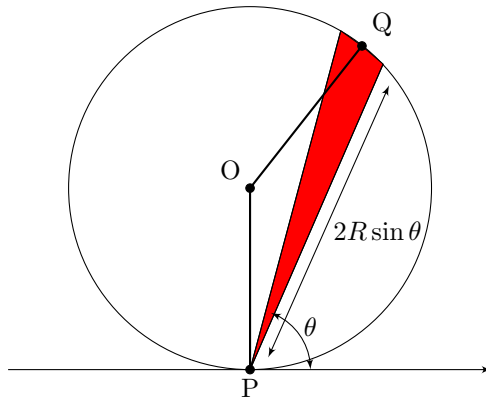
Нам необходимо взять интеграл по всему диску. Интегрировать будем по каждой из переменных по очереди.

### Первый способ



Вначале проинтегрируем по  $r$  и найдём потенциал, который образует в своей вершине треугольник с высотой  $r_{\max}(\theta) = 2R \sin \theta$  и малым основанием  $r_{\max}(\theta) d\theta$ . Этот потенциал равен

$$d\varphi = k\sigma \sin \theta d\theta = \frac{\sigma R}{2\pi\epsilon_0} \sin \theta d\theta.$$



Затем полученное выражение проинтегрируем по углу  $\theta$  в пределах от 0 до  $\pi$ , поскольку именно такие значения принимает  $\theta$  для точек диска:

$$\varphi = \frac{\sigma R}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta = \frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0}.$$

### Второй способ

Вначале проинтегрируем по  $\theta$  и найдём, какой потенциал образует часть дуги окружности радиуса  $r$  в центре закругления. Расстояние от него до любой точки дуги одинаково и равно  $r$ . Тогда потенциал  $d\varphi$  от дуги окружности радиуса  $r$  равен

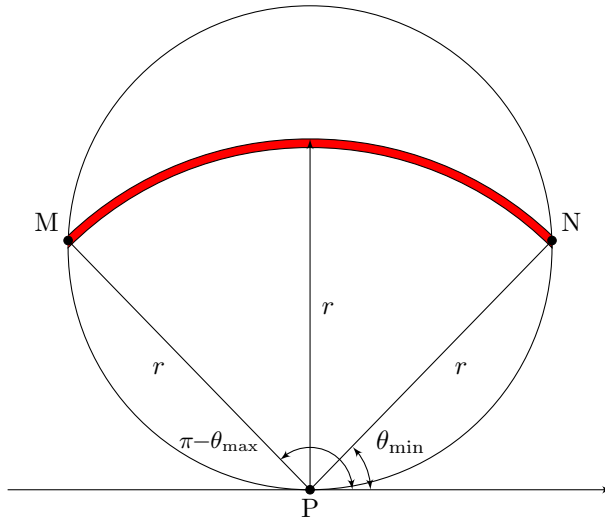
$$d\varphi = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r \, dr}{r} d\theta = \frac{\sigma \, dr}{4\pi\epsilon_0} \int_{\arcsin\left(\frac{r}{2R}\right)}^{\pi - \arcsin\left(\frac{r}{2R}\right)} d\theta = \sigma \frac{\pi - 2\arcsin\left(\frac{r}{2R}\right)}{4\pi\epsilon_0} \, dr.$$

Осталось лишь проинтегрировать по  $r$  в пределах от 0 до  $2R$ . Последнее значение соответствует наиболее удалённой от точки P точке диска.

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2R} \left( \pi - 2\arcsin\left(\frac{r}{2R}\right) \right) \, dr.$$

Воспользуемся техникой интегрирования по частям.

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left[ 2\pi R - 2r \arcsin\left(\frac{r}{2R}\right) \right]_0^{2R} + 2 \int_0^{2R} \frac{r/2R}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{2R}\right)^2}} \, dr = \\ &= -\frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{2R}\right)^2} \Big|_0^{2R} = \frac{\sigma R}{\pi\epsilon_0}. \end{aligned}$$



Итак, выражение для потенциала на краю тонкого диска имеет вид

$$\varphi = \frac{\sigma R}{\pi \varepsilon_0}.$$

Энергия взаимодействия диска с кольцом, которая равна работе искомого изменения силы, согласно определению потенциала, может быть выражена через произведение заряда кольца на потенциал на краю диска. В нашем случае эффективная поверхностная плотность заряда диска  $\sigma$  и эффективная линейная плотность заряда кольца  $\lambda$  равны

$$\sigma = \rho \delta l; \quad \lambda = d \Delta R.$$

Таким образом,

$$\Delta F \delta l = \varphi \delta q = \frac{\rho R}{\pi \varepsilon_0} 2\pi R d \Delta R \delta l,$$

или, сокращая,

$$\Delta F = \frac{2\rho^2 d R^2}{\varepsilon_0} \Delta R.$$

Наконец, определим положение равновесия диска  $R'$ . Для этого, аналогично пункту 2, вычислим значение  $F(z)$  электростатической силы  $F$  в точке  $z \ll R$ .

Переместим диск радиуса  $R'$  в точку  $z$  и мысленно заполним освободившееся пространство материалом цилиндра. Тогда можно сделать вывод о том, что электростатическая сила изменилась ровно на величину силы взаимодействия двух

тонких дисков разных радиусов. Аналогично идее пункта 2, получаем выражение для этой силы:

$$F(z) = F(0) - \frac{\rho z}{2\varepsilon_0} \pi R'^2 d\rho = F_0 - \Delta F - \frac{\pi d\rho^2 (R - \Delta R)^2}{2\varepsilon_0} z.$$

Запишем уравнение движения диска меньшего радиуса, полагая его массу равной  $m'$ .

$$m' \ddot{z} = F(z) - m'g = F_0 - \Delta F - \frac{\pi d\rho^2 (R - \Delta R)^2}{2\varepsilon_0} z - mg + 2\pi dgDR\Delta R.$$

С учётом

$$F_0 = mg$$

упростим уравнение, подставив выражение для плотности:

$$m' \ddot{z} = \pi d(R - \Delta R)^2 D \ddot{z} = -\frac{2\rho^2 dR^2}{\varepsilon_0} \Delta R - \frac{\pi d\rho^2 (R - \Delta R)^2}{2\varepsilon_0} z + 2\pi dgDR\Delta R$$

$$\ddot{z} = -\frac{2\rho^2}{\pi D\varepsilon_0} \Delta R - \frac{\rho^2}{2D\varepsilon_0} z + \frac{2g}{R} \Delta R = -\frac{3g}{2R} \Delta R - \frac{3\pi g}{8R} z + \frac{2g}{R} \Delta R = \frac{g}{2R} \Delta R - \frac{3\pi}{8} \frac{g}{R} z.$$

Положение равновесия  $z_0$  определяется условием

$$\ddot{z}(z_0) = 0,$$

так что  $z_0$  является решением уравнения

$$\ddot{z}(z_0) = \frac{g}{2R} \left( \Delta R - \frac{3\pi}{4} z_0 \right) = 0.$$

$$z_0 = \frac{4}{3\pi} \Delta R.$$

В отсутствие контакта с поверхностью цилиндра уравнение движения диска выглядит так:

$$\ddot{z} + \frac{3\pi}{8} \frac{g}{R} z - \frac{g}{2R} \Delta R = 0.$$

Это уравнение с точностью до аддитивной постоянной совпадает с уравнением гармонических колебаний с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\pi}{8} \frac{g}{R}},$$

так что общее решение может быть записано сразу.

$$z(t) = C_1 \sin \left( \sqrt{\frac{3\pi g}{8R}} t \right) + C_2 \cos \left( \sqrt{\frac{3\pi g}{8R}} t \right) + \frac{4}{3\pi} \Delta R.$$

Вычислим константы  $C_1$  и  $C_2$  с помощью начальных условий:

$$\begin{cases} z(0) = \frac{4}{3\pi} \Delta R = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) + \frac{4}{3\pi} \Delta R, \\ \dot{z}(0) = v_0 = \sqrt{\frac{3\pi g}{8R}} C_1 \cos(0) - \sqrt{\frac{3\pi g}{8R}} C_2 \sin(0). \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = v_0 \sqrt{\frac{8R}{3\pi g}}, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Итак, в отсутствие контакта с цилиндром диск совершает гармонические колебания вокруг положения равновесия  $z_0$  с циклической частотой  $\omega_0$ , а зависимость координаты  $z$  от времени выглядит как

$$z(t) = \frac{4}{3\pi} \Delta R + v_0 \sqrt{\frac{8R}{3\pi g}} \sin \left( \sqrt{\frac{3\pi g}{8R}} t \right).$$

Заметим, что модуль скорости  $v_0$  непосредственно определяют амплитуду колебаний. При малых  $v_0$  возможно описанное движение диска без контакта с поверхностью цилиндра, однако при больших амплитудах будут происходить упругие соударения и период колебаний изменится.

Вычислим критическое значение  $v_0$ , при котором начинают происходить соударения диска и цилиндра. Амплитуда синуса должна быть равна расстоянию от положения равновесия до ограничивающей поверхности  $z = 0$ .

$$v_0^{\text{крит}} \sqrt{\frac{8R}{3\pi g}} = \frac{4}{3\pi} \Delta R \Leftrightarrow v_0^{\text{крит}} = \sqrt{\frac{2g}{3\pi R}} \Delta R.$$

Тогда в случае  $v_0 < v_0^{\text{крит}}$  диск проходит полное колебания, а ответ для периода

$$T' = 2T = 2\pi \sqrt{\frac{8R}{3\pi g}}.$$

Рассмотрим случай  $v_0 > v_0^{\text{крит}}$ . Заметим, что одну половину колебаний (в неограниченную сторону — от цилиндра) диск проходит без внешних вмешательств. Рассмотрим ранее симметричную ей часть колебаний. При достижении координаты  $z = 0$  диск моментально разворачивается без потери энергии и совершает движение в обратную сторону. Вычислим время  $t_0$ , необходимое для

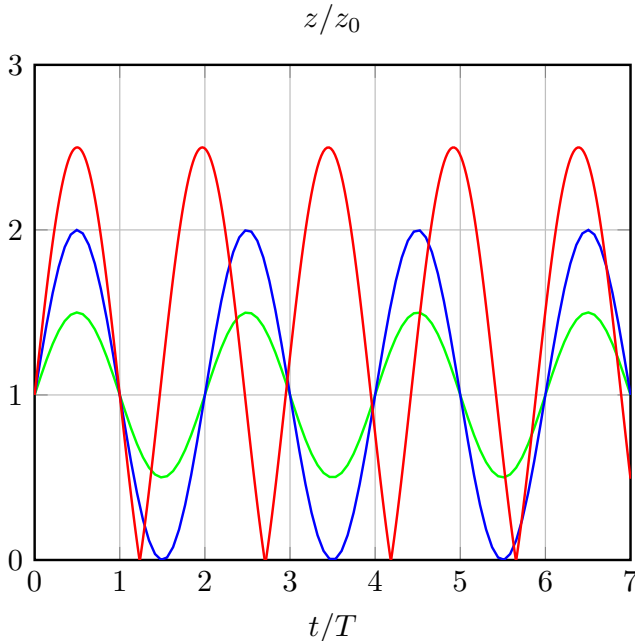
движения от  $z_0$  до  $z = 0$ .

$$z(t_0) = 0 = \frac{4}{3\pi} \Delta R + v_0 \sqrt{\frac{8}{3\pi} \frac{R}{g}} \sin \left( \sqrt{\frac{3\pi}{8} \frac{g}{R}} t_0 \right).$$

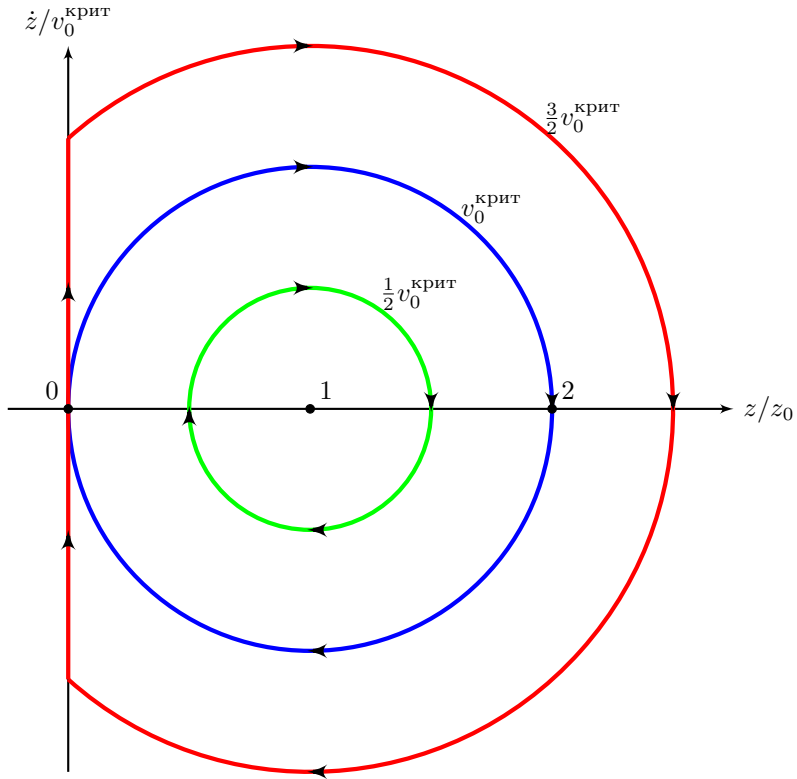
Тогда, применяя обратную тригонометрическую функцию,

$$t_0 = \sqrt{\frac{8}{3\pi} \frac{R}{g}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{2}{3\pi} \frac{g}{R}} \frac{\Delta R}{v_0} \right).$$

Ниже можно увидеть графики зависимостей координаты диска от времени для разных начальных скоростей.



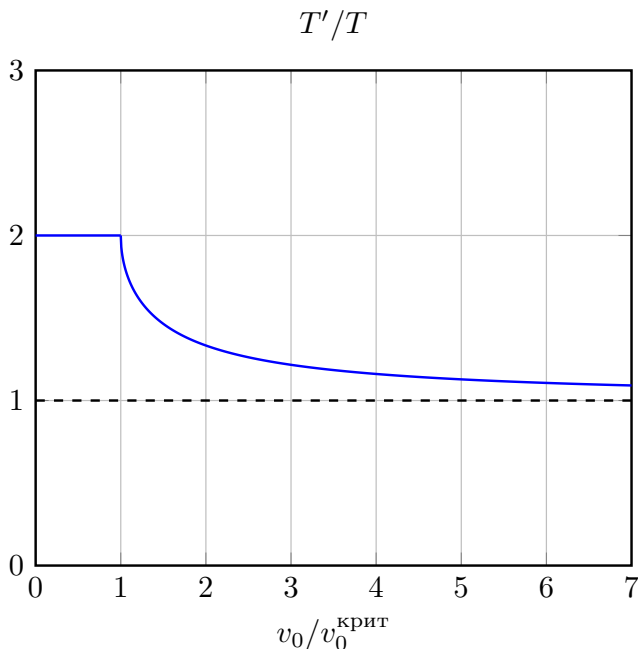
В качестве наглядной иллюстрации изобразим движение при разных  $v_0$  на фазовой диаграмме  $(z/z_0; \dot{z}/v_0^{\text{крит}})$ . При превышении критической скорости колебанию начинает соответствовать только часть полной окружности, вследствие чего период сокращается.



С учётом симметричности фазовой диаграммы относительно оси  $\dot{z} = 0$ , мы наконец имеем ответ для периода.

$$T' = \begin{cases} 2T = 2\pi\sqrt{\frac{8}{3\pi}\frac{R}{g}} & \text{при } v_0 \leq \sqrt{\frac{2}{3\pi}\frac{g}{R}}\Delta R; \\ T\left(1 + \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3\pi}\frac{g}{R}}\frac{\Delta R}{v_0}\right)\right) = \sqrt{\frac{8}{3\pi}\frac{R}{g}}\left[\pi + 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3\pi}\frac{g}{R}}\frac{\Delta R}{v_0}\right)\right] & \text{при } v_0 > \sqrt{\frac{2}{3\pi}\frac{g}{R}}\Delta R. \end{cases}$$

Изобразим график зависимости периода  $T'$  от значения  $v_0$ .



#### Задача №11-Т4. Конденсатор Глюка

Покажем ниже, что при напряжениях источника меньших  $U_1$ , капля не растекается и конденсатор Глюка представляет собой обычный плоский конденсатор ёмкостью  $C_1$ . Заметим, что вклад капли в ёмкость отсутствует из-за того, что она по условию маленькая.

При напряжениях источника больших, чем  $U_1$  конденсатор Глюка представляет собой два параллельно соединённых конденсатора ёмкостями  $C_1$  и  $C_2$ . Конденсатор  $C_2$  имеет в качестве одной обкладки нижнюю плоскость, а его вторая обкладка – это растёкшаяся капля проводящей жидкости. Обозначим площадь растёкшейся капли  $S$ , тогда:

$$C_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{h}.$$

Проанализируем, чему может быть равна площадь растёкшейся капельки в зависимости от постоянного напряжения источника  $U$ , используя энергетический подход, и докажем сделанные выше утверждения. Напряжение источника можно считать постоянным, так как по условию оно изменяется плавно. Рассмотрим систему, состоящую из источника, конденсаторов и растёкшейся капельки. Найдём, как энергия системы зависит от площади растёкшейся капельки:

$$W = W_{\text{ист}} + W_{\text{конд}} + W_{\text{пов}} = -qU + \frac{q^2}{2C_0} + 2\sigma S,$$

где  $q$  – заряд, протёкший через источник,  $C_0$  – общая ёмкость системы трёх конденсаторов,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения.

Здесь энергия  $W_{\text{ист}} = -qU = -C_0U^2$ , так как при зарядке конденсаторов через источник протекает заряд  $q = C_0U$  и запасённая в источнике энергия **уменьшается**.

Общая ёмкость системы трёх конденсаторов, когда опорный  $C$  соединён последовательно с конденсатором Глюка (который представляет собой параллельное соединение  $C_1$  и  $C_2$ ):

$$C_0 = \frac{C(C_1 + C_2)}{C + C_1 + C_2}.$$

Для удобства будем выражать энергию поверхностного натяжения не через площадь, а через ёмкость  $C_2$ :

$$W_{\text{пов}} = 2\sigma S = \frac{2\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0} C_2.$$

Тогда, зависимость энергии системы от ёмкости  $C_2$  (по сути, от площади растёкшейся капли), описывается выражением:

$$W(C_2) = -\frac{C(C_1 + C_2)U^2}{2(C + C_1 + C_2)} + \frac{2\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0} C_2.$$

В равновесии значение  $C_2$  будет таким, чтобы энергия системы была минимальна. Найдём, при каком значении  $C_2$  будет минимум, используя производную и приравняв её нулю

$$W' = -\frac{C^2U^2}{2(C + C_1 + C_2)^2} + \frac{2\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0} = 0.$$

Отсюда находим, что в случае расплюснутой капли, ёмкость образованного ею конденсатора  $C_2$  зависит от напряжения источника  $U$  как

$$C_2 = CU \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{4\sigma h}} - C - C_1.$$

Так как вторая производная всегда положительна, найденная точка действительно минимум:

$$W'' = \frac{C^2 U^2}{(C + C_1 + C_2)^3} > 0.$$

Заметим, что значение  $C_2$  (и площади  $S$ ) больше либо равно нулю при

$$U \geq 2 \frac{C + C_1}{C} \sqrt{\frac{\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0}} = U_1.$$

Поведение системы устроено следующим образом. При напряжениях источника от 0 до  $U_1$  минимум энергии системы соответствует нулевой площади растёкшейся капельки, а конденсатор Глюка имеет постоянную ёмкость  $C_1$ . При напряжениях источника  $U > U_1$ , растёкшаяся капелька имеет площадь такую, что ёмкость  $C_2$  можно вычислить по указанной выше формуле. Напряжение на конденсаторе Глюка постоянно:

$$U_{\text{Глюк}} = \frac{C_0 U}{C_1 + C_2} = \frac{CU}{C + C_1 + C_2} = \sqrt{\frac{4\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{2}{3} U_1 = \text{const.}$$

Напряжение на опорном конденсаторе при напряжении на источнике  $U = 2U_1$  равно

$$U_C = U - U_{\text{Глюк}} = 2U_1 - \frac{2}{3} U_1 = \frac{4}{3} U_1.$$

Для определения коэффициента поверхностного натяжения воспользуемся найденным выше напряжением

$$U = 2 \sqrt{\frac{\sigma h}{\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{2}{3} U_1.$$

Отсюда

$$\sigma = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 U_1^2}{9h} \approx 0,479 \text{ Н/м.}$$

Очень похоже на то, что Глюк использовал ртуть!

### Задача №11-Г5. Две половинки

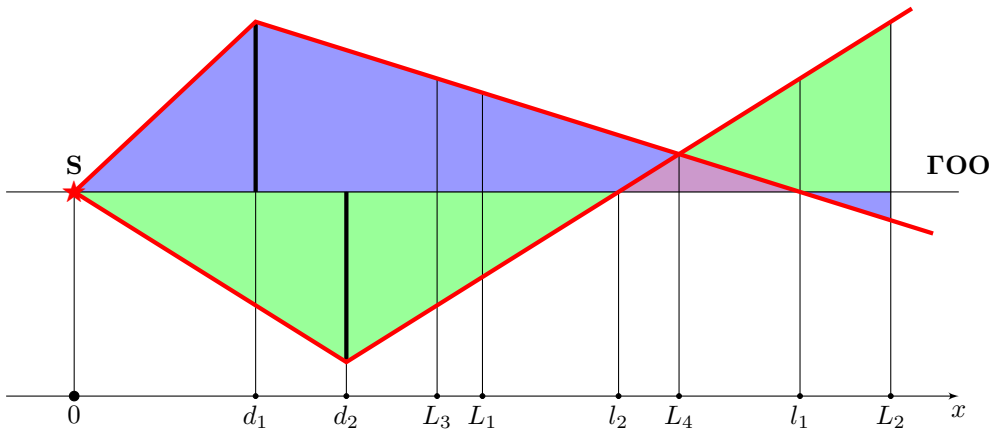


Рис. 1

Каждая из половинок линзы будет давать изображение, расстояние до которого можно найти по формуле тонкой линзы. Пусть  $l$  – искомое, тогда из:  $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$  и  $l = d + f$  получим  $l = \frac{d^2}{d - F}$ .

Расстояния  $l_1$  и  $l_2$  от источника до его изображений в верхней и нижней половинках линзы равны:

$$l_1 = 16F/3 \quad \text{и} \quad l_2 = 4F.$$

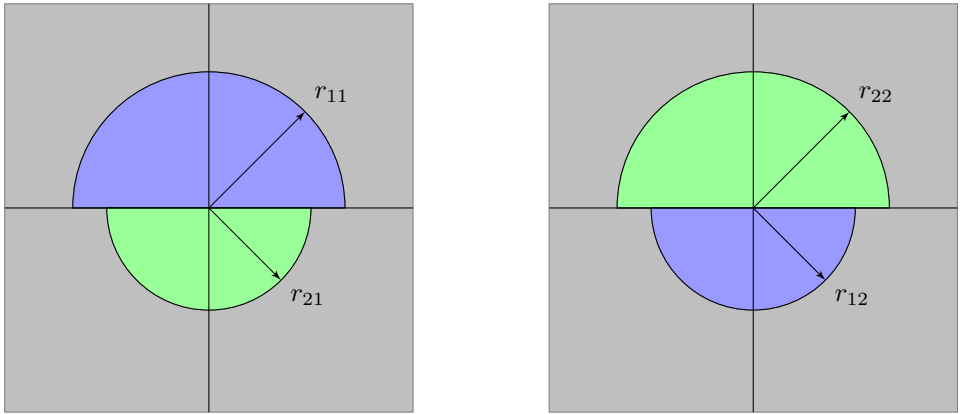


Рис. 2

При  $L_1 = 3F$  и  $L_2 = 6F$  пучки идут по разные стороны от ГОО, поэтому на экране возникнет равномерно освещенное изображение в виде двух полуокругов разного радиуса, величина которых может быть получена из рассмотрения подобных треугольников. В обоих случаях радиус нижнего полуокруга меньше, чем у верхнего: для  $L_1 = 3F$  отношение радиусов равно

$$\frac{r_{\text{в}}}{r_{\text{н}}} = \frac{l_1 - L_1}{l_1 - d_1} \frac{l_2 - d_2}{l_2 - L_1} = \frac{7}{6},$$

а при  $L_2 = 6F$

$$\frac{r_{\text{в}}}{r_{\text{н}}} = \frac{L_2 - l_2}{l_2 - d_2} \frac{l_1 - d_1}{L_2 - l_1} = 6,$$

На рисунке 2 полуокруги показаны схематически.

При перемещении экрана от расстояния  $2F$  вправо несложно заметить, что в некотором положении радиусы полуокругов совпадут в промежутке от  $2F$  до  $l_2$ .

Искомое расстояние находим из пропорции, отражающей равенства двух коэффициентов подобия треугольников:

$$\frac{l_1 - d_1}{L_3 - d_1} = \frac{l_2 - d_2}{L_3 - d_2} \implies L_3 = \frac{d_2 l_1 - d_1 l_2}{l_1 - l_2 - d_1 + d_2}.$$

Искомое расстояние:

$$L_3 = 8F/3.$$

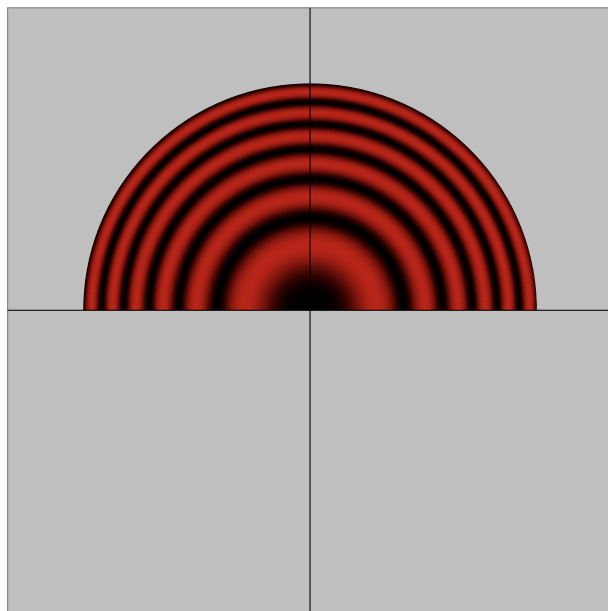


Рис. 3

Если закрепить экран на расстоянии  $L_4 = 40F/9$  от источника, то пучки света от полулинз точно накладываются друг на друга в верхней полуплоскости экрана.

Изображения источника  $S$  в положениях  $l_1$  и  $l_2$  можно рассматривать как два когерентных вторичных источника  $S_1$  и  $S_2$ , фазы которых в точке отрезка между ними на ГОО отличаются на  $\pi$  из-за прохождения световой волны через фокус в  $S_1$ .

Следовательно, в центре полукруга наблюдается тёмное пятно (рисунок 3). При движении от центра картины к краю разность фаз источников будет изменяться, поэтому возникнет чередование светлых и тёмных полуколец.

Радиус полукруга можно найти из подобия треугольников:

$$\frac{r}{D/2} = \frac{L_4 - l_2}{l_2 - d_2} \implies r = \frac{D}{9}.$$

Назовем вершину полукруга точкой А, а его центр – точкой О и рассмотрим сечение области пересечения световых лучей от половинок линзы плоскостью, проходящей через оптическую ось перпендикулярно разрезу (рисунок 4). Рас-

стояния от изображений источника до центра картины равны  $S_1O \equiv b = 4F/9$  и  $S_2O = 2b = 8F/9$ .

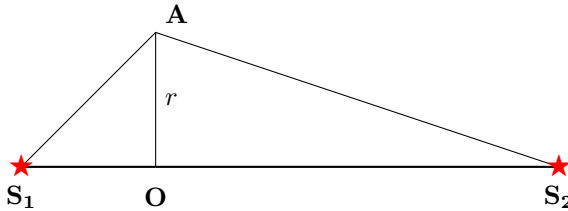


Рис. 4

Как уже отмечалось, в точке  $O$  разность фаз между лучами, пришедшими через нижнюю и верхнюю половину линзы, равна  $\Delta\varphi_O = \pi$ . Эта разность увеличивается на  $2\pi$  при переходе к каждой следующей темной полосе.

Разность фаз между этими лучами на краю картины – в точке  $A$  – определяется разностью хода лучей:  $\Delta\varphi_A = \pi + 2\pi[S_1A - (S_1S_2 - S_2A)]/\lambda$ . С другой стороны, она изменилась по сравнению с  $\Delta\varphi_O$  на  $2\pi k$ , где  $k$  – число светлых полос в картине, на каждой из которых происходит рост и убывание наблюдаемой освещенности. Ясно, что это и есть ответ на вопрос 5.

$$\text{Значит, } k\lambda = S_1A + S_2A - S_1S_2 = S_1A + S_2A - 3b.$$

По рисунку 4, применяя теорему Пифагора, выражаем расстояния:

$$k\lambda = \sqrt{4b^2 + r^2} + \sqrt{b^2 + r^2} - 3b.$$

Для данных по условию  $b \gg r$  и, с учетом формулы  $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x$ , находим:  $3r^2 \approx 4kb\lambda$ . Таким образом, искомое значение:  $k = \frac{3r^2}{4b\lambda} \implies k = \frac{D^2}{48\lambda F}$ . Для заданных числовых значений получаем, что

$$k = \frac{5^2 \cdot 10^{-4}}{48 \cdot 0,65 \cdot 10^{-6} \cdot 4} \approx 20.$$

**Примечание.** Отметим, что вычисление без приближения малости отклонения от оси дает  $k \approx 20,032$ , то есть в принципе можно считать, что на краю картины есть еще один – правда, очень тонкий – интервал значений радиуса, на котором освещенность будет возрастать. Тогда ответом на вопрос 5 будет  $k = 21$ . Такой ответ (при наличии соответствующего объяснения) тоже следует считать правильным. Хотя на практике «увидеть» эту полосу будет очень сложно.