



4 В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Ответ: _____.

5 Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

Ответ: _____.

6 Найдите корень уравнения

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-6} = 81.$$

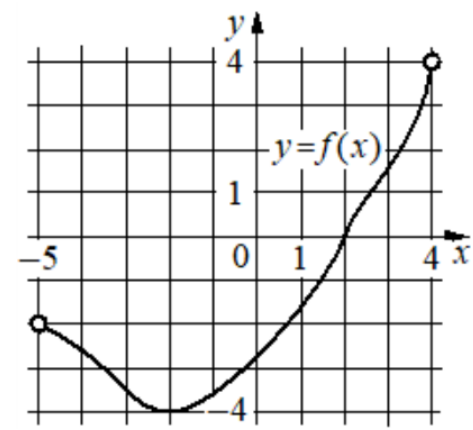
Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения

$$\frac{8 \sin 64^\circ \cdot \cos 64^\circ}{\sin 128^\circ}.$$

Ответ: _____.

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 4)$. Найдите корень уравнения $f'(x) = 0$.



Ответ: _____.

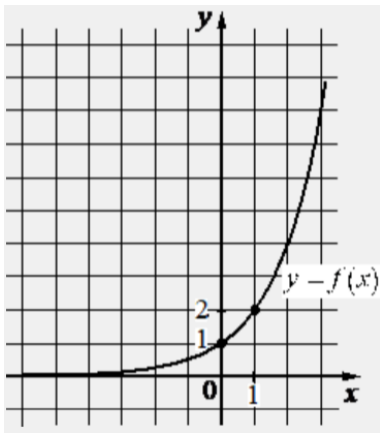
9 Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0 = 24$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 3$ м/с². За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее с момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 90 метров. Ответ дайте в секундах.

Ответ: _____.

10 На изготовление 540 деталей первый рабочий затрачивает на 12 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Ответ: _____.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(3)$.



Ответ: _____.

12 Найдите точку минимума функции $y = (x^2 - 17x + 17) \cdot e^{7-x}$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$\frac{9 \sin 2x - 32\sqrt{2} \sin x}{\sqrt{11} \sin x} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{7\pi}{2}; 5\pi]$.

14 В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 17$, $PB = 10$, $\cos \angle PBA = \frac{32}{85}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите объём пирамиды $PABC$.

15 Решите неравенство

$$1 + \frac{10}{\log_2 x - 5} + \frac{16}{\log_2^2 x - \log_2(32x^{10}) + 30} \geq 0.$$

16 В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 700 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годах должны быть по 400 тыс. рублей;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите сумму всех платежей после полного погашения кредита.



17 Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M , отличной от A . Лучи AO и AM пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P .

- а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.
 б) Известно, что $\sin \angle AOC = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K .
 Найдите отношение $QK:KA$.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x^2 + y^2) - ax + (a - 3)y + 1 = 0, \\ xy - 1 = y - x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

19 Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.

- а) Пусть $q = 55$. Найдите все возможные значения p .
 б) Пусть $p + q = 30$. Найдите все возможные значения q .
 в) Пусть $q^2 - p^2 = 2108$. Найдите все возможные корни уравнения.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.




















СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:

ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	13 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике (профиль) Результаты моих учеников на ЕГЭ 2024: Елена – 100 баллов Дака – 100 баллов Сева – 100 баллов Дмитрий – 100 баллов Андрей – 100 баллов Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1



Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	22	
2	82	
3	30	
4	0,75	
5	0,6	
6	0,4	
7	4	
8	-2	
9	6	
10	30	
11	8	
12	2	
13	а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$ б) $\frac{17\pi}{4}$	
14	120	
15	$(0; \frac{1}{8}] \cup [8; 32) \cup (32; +\infty)$	
16	953,6 тыс.	
17	2: 3	
18	$(-\infty; 0) \cup (16; +\infty)$	
19	а) -56; -16 б) 64 в) 6; 8	

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



13 а) Решите уравнение $\frac{9 \sin 2x - 3\sqrt{2} \sin x}{\sqrt{11} \sin x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{7\pi}{2}; 5\pi]$.

Handwritten solution:

а) $\begin{cases} 3 \sin x - 3\sqrt{2} \sin x = 0 \\ 11 \sin x > 0 \end{cases} \begin{cases} 11 \sin x > 0 \\ 1:11 \\ 3 \sin x \cos x = 3\sqrt{2} \sin x \\ \sin x > 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4 \sin x \cdot \cos x - 2\sqrt{2} \sin x = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$

$2 \sin x \cdot (2 \cos x - \sqrt{2}) = 0$

$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x > 0 \end{cases}$

Получили $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) $\frac{17\pi}{4}$

Reference material: ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ОКРУЖНОСТЬ, ИСТОЧНИКИ (ФИР, Досрочная волна (Резерв) 2024, Статград 26.01.2017), ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 17, PB = 10, \cos \angle PBA = \frac{32}{85}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 б) Найдите объем пирамиды $PABC$.

Handwritten solution:

а) $BC \perp PA$ (по усл.)
 $BC \perp PC$ (т.к. PC - высота пирам.)

$BC \perp (PCA)$
 по теореме о перпендикулярности прямой и плоскости

Значит $BC \perp AC$
 в $\triangle ABC$ - прямоуголь.

б) ΔAPB : $AP = \sqrt{261}$
 ΔABC : $289 = AC^2 + BC^2$
 ΔBCP : $100 = PC^2 + BC^2$
 ΔAPC : $261 = AC^2 + PC^2$

$\begin{cases} AC^2 - PC^2 = 189 \\ AC^2 + PC^2 = 261 \end{cases}$

$2AC^2 = 450$
 $AC^2 = 225$
 $AC = 15$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 15}{2} \cdot 6 = 120$

Ответ: 120.

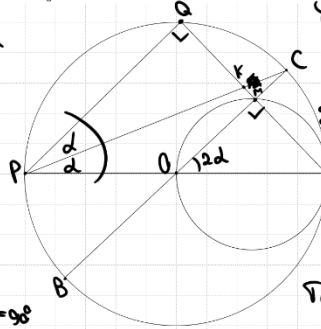
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3



17 Две окружности касаются внутренним образом в точке A , причём меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M , отличной от A . Лучи AO и AM пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P .

- а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.
 б) Известно, что $\sin \angle AOC = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K . Найдите отношение $QK:KA$.

а) $\angle AQP = 90^\circ$
 (опирается на AP -диаметр)
 $\angle AMO = 90^\circ$
 (опирается на AO -диаметр)
 Получим $PQ \parallel BC$
 т.к. $\angle AQP = \angle AMO = 90^\circ$
 (соосб.)



б) Пусть $\angle COA = 2\alpha$
 $\text{Tогда } CA = 2d$
 $\angle QPA = \angle COA = 2\alpha$
 (соосб.)
 $\angle CPA = \frac{1}{2} \angle COA = \alpha$
 $\text{Tогда } \angle QPK = 2\alpha - \alpha = \alpha$
 по т. о бис.
 $\text{Tогда } PK - \text{биссектриса } \triangle APQ$
 по т. о бис.
 $\frac{QK}{KA} = \frac{PQ}{PA} = \cos 2\alpha$
 $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \cos 2\alpha = \frac{2}{3}$
 Ответ: 2 : 3.

ИСТОЧНИКИ
 Ященко 2018
 Основная волна 2017

ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ

 Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается

ТЕОРЕМА О БИССЕКТРИСЕ

 Биссектриса делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам

СОСВЕТСТВЕННЫЕ УГЛЫ

 Если соответственные углы равны, то прямые параллельны (признак параллельности прямых)

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ
 1 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
 2 $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
 3 $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
 4 $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x^2 + y^2) - ax + (a - 3)y + 1 = 0, \\ xy - 1 = y - x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

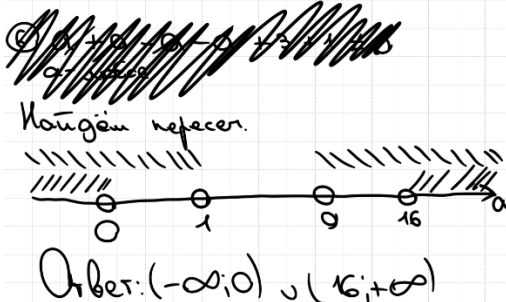
Упростим 2-е уравнение:
 $x \cdot y - 1 - y + x = 0$
 $y(x - 1) + (x - 1) = 0$
 $(x - 1) \cdot (y + 1) = 0$
 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$
 Подставим $\begin{cases} ax^2 + ay^2 - ax + ay - 3y + 1 = 0 \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$

$$\begin{cases} a \cdot 2 - a - a + 3 + 1 = 0 \\ -2 = -2 \quad \checkmark \end{cases}$$

$\begin{cases} x = 1 \\ ax^2 + ay^2 - ax + ay - 3y + 1 = 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} y = -1 \\ ax^2 + ay^2 - ax + ay - 3y + 1 = 0 \end{cases}$
 Если $a = 0$, то $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \\ y = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ 3 решения

Если $a \neq 0$, то к в-е урав-е ① и ②
 Если $a \neq 0$, то к в-е урав-е ① и ②
 Система имеет по 2 решения
 $(1, -1)$ не решение системы
 решение системы

Получаем
 ① $2a > 0$
 ② $2a > 0$
 ③ $a \cdot 1^2 + a \cdot (-1)^2 - a \cdot 1 + a \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) + 1 \neq 0$
 $a \neq 0$
 ④ $(a - 3)^2 - 4 \cdot a \cdot 1 > 0$
 $a^2 - 6a + 9 - 4a > 0$
 $a^2 - 10a + 9 > 0$
 $(a - 1)(a - 9) > 0$
 ⑤ $(a)^2 - 4 \cdot a \cdot 4 > 0$
 $a^2 - 16a > 0$
 $a \cdot (a - 16) > 0$



Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

- 19** Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.
- Пусть $q = 55$. Найдите все возможные значения p .
 - Пусть $p + q = 30$. Найдите все возможные значения q .
 - Пусть $q^2 - p^2 = 2108$. Найдите все возможные корни уравнения.

ИСТОЧНИКИ
Основная школа (Рефер) 2019

Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Пусть $q = 55$. Найдите все возможные значения p .
 б) Пусть $p + q = 30$. Найдите все возможные значения q .
 в) Пусть $q^2 - p^2 = 2108$. Найдите все возможные корни уравнения.

Источники:
Основная школа (Рефер) 2019

а) $x^2 + px + 55 = 0$
по теореме Виета:
 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = 55 \end{cases}$
 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = 55 \end{cases}$
 $x_1 = 1$ или $x_1 = 5$
 $x_2 = 55$ или $x_2 = 11$
 Тогда $p = -56$ или $p = -16$
 Ответ: -56 и -16

б) $x^2 + px + q = 0$
по теореме Виета:
 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$
 $x_1 + x_2 - x_1 - x_2 = -p + q = 30 + 1$
 $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 31$
 Учитывая, что x_1, x_2 - натуральные числа.
 Получим:
 $\begin{cases} x_1 - 1 = 1 \\ x_2 - 1 = 31 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 - 1 = 31 \\ x_2 - 1 = 1 \end{cases}$
 $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 32 \end{cases}$
 $q = 2 \cdot 32 = 64$
 Ответ: 64

в) $(q - p)(q + p) = 2108$
 $2108 = 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 31$

по т. Виета:
 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$
 $\begin{cases} -x_1 - x_2 = p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$
 $(q - p)(q + p) = 2108$
 $(x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2)(x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2) = 2108$
 Множителю в левой части уравнения отнимается друг от друга на четное число $(2x_1 + 2x_2)$
 \Rightarrow множителю одной четности, т.е. оба четные либо оба нечетные
 ИО 2108 - четное \Rightarrow множителю четные

Также нефакторизуемая степень.

Получаем:
 $(x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 - 4x_1x_2 = 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 31$
 $(2 \cdot 31)^2 - (2 \cdot 17)^2 = 2108$ или $(2 \cdot 31 + 17)(2) = 2108$
 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_1 + x_2 = 62 \quad | +1 \\ x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 = 34 \quad | +1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 = 1054 \quad | +1 \\ x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 = 2 \quad | +1 \end{cases}$
 $\begin{cases} (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 63 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 35 \end{cases}$ или $\begin{cases} (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1055 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 3 \end{cases}$
 Если $x_1 = 2$
 $x_2 = 36$ \times Если $x_1 = 2$
 $x_2 = 4$ \times
 Если $x_1 = 6$ \checkmark Если $x_1 = 4$
 $x_2 = 8$ \times
 Если $x_1 = 8$ \checkmark
 $x_2 = 6$
 Если $x_1 = 35$
 $x_2 = 2$ \times
 Ответ: б) 6 и 8

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 31



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах a , b и $в$	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте $в$ и обоснованно получен верный ответ в пункте a или b	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах a и b	2

ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>в</i>	
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>а</i> или <i>б</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрудзора от 04.04.2023 № 233/552, зарегистрирован Минюстом России 15.05.2023 № 73314)

«81. Проверка экзаменационных работ включает в себя:

1) проверку и оценивание предметными комиссиями ответов на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом <...>, в том числе устных ответов, в соответствии с критериями оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрудзором <...>

По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют первичные баллы за каждый ответ на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в первичных баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрудзором.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о первичных баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 13–19, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 13–19 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только

ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.

