Теоретический тур

Условия, решения и схема оценивания. 9 класс

Содержание

9.1. Сбросить балласт

В. Б. Игнатьев

Над экватором безатмосферной планеты радиуса R по круговой орбите высотой $0.03R$ двигается искусственный спутник. На экваторе планеты находится научная станция. В некоторый момент времени, когда спутник оказался строго над станцией, от него отделилась капсула со снаряжением общей массой 0.2 массы спутника. При расстыковке капсуле был сообщен импульс таким образом, чтобы она падала строго по радиусу исходной орбиты спутника, а сам спутник ускорился, сохраняя направление движения.

1. На какую максимальную высоту сможет подняться спутник?
2. На каком расстоянии от станции упадет капсула, если период обращения спутника на исходной орбите в 10 раз меньше звездных суток на планете?

Обе величины выразите в единицах R.

Решение. Пусть v_0 — исходная скорость спутника, v_1 — его скорость после отделения капсулы, а m — его масса. Запишем закон сохранения импульса для спутника с капсулой:

$$mv_0 = 0.2m \cdot 0 + 0.8m \cdot v_1.$$

Мы учли, что для падения вертикально вниз орбитальная скорость капсулы должна быть равна 0. Тогда $v_1 = 1.25v_0$.

Направление скорости спутника не изменилось, она осталась перпендикулярной направлению на планету, но выросла. Значит, точка разделения стала точкой перицентра новой орбиты спутника. В любой точке эллиптической орбиты скорость спутника может быть определена из уравнения

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)},$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса планеты, r — расстояние от центра планеты, до спутника, a — большая полуось орбиты. В перицентре $r = r_\text{р} = a(1-e)$ и формула приобретает вид

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{GM}{a(1-e)}(1+e)} = v_0\sqrt{1+e}.$$

Отсюда получаем эксцентриситет новой орбиты:

$$\sqrt{1+e} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16} = 0.5625.$$

Зная перицентрическое расстояние и эксцентриситет, можно определить расстояние в апоцентре:

$$\frac{r_a}{r_p} = \frac{1+e}{1-e} \quad \Rightarrow \quad r_a = r_p\frac{1+e}{1-e} = 1.03R\frac{25}{7} \approx 3.7R.$$

Тогда высота спутника в апоцентре составит $3.7R - R = 2.7R$.

При падении расстояние капсулы от центра планеты изменится всего на 3%, а значит, падение будет происходить с почти постоянным ускорением g. В начальный момент времени капсула находилась на высоте $H = 0.03R$, а спустя время t высота стала равна нулю. Тогда для равноускоренного движения

$$H = \frac{gt^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Ускорение свободного падения на поверхности планеты равно $g = GM/R^2$. Тогда

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.03R^3}{GM}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.03(R+H)^3}{GM\left(1+\frac{H}{R}\right)^3}} \approx \frac{\sqrt{0.06}}{\omega} = \frac{\sqrt{0.06}}{2\pi}T = 0.04T.$$

Здесь ω — исходная угловая скорость спутника, а T — его период обращения. Здесь мы вновь учли, что высота орбиты капсулы сильно меньше R. Звездные сутки на планете в 10 раз больше, значит, за время падения капсулы планета повернется на угол $360° \cdot 0.004 = 1.44°$. Этот угол соответствует дуге экватора

$$l = \frac{1.44}{57.3}R \approx 0.025R.$$

Именно на таком расстоянии от станции упадет капсула.

Критерии оценивания. **15**

К1. Определение скорости спутника как долю начальной круговой **3**

К2. Есть понимание формы новой траектории **2**

Точка расстыковки — перицентр новой орбиты, а максимальное расстояние будет в ее апоцентре.

К3. Система уравнений, необходимая для нахождения апоцентрического расстояния **2**

Законы сохранения энергии и момента импульса или им аналогичные.

К4. Найдена максимальная высота **2**

Если вместо высоты найдено расстояние до центра Земли, то 1 балл.

К5. Определено время падения капсулы в долях периода планеты **4**

К6. Найдено расстояние от станции до места посадки капсулы **2**

9.2. Давайте продлим вечер

А. Автаева

В будущем «совы» настояли на своем и решили продлить световой день, чтобы вечером еще было светло. Они отправили в одну из точек на орбите Земли, отстоящую от Земли на 60°, плоское овальное зеркало так, чтобы отраженное в нем Солнце целиком могло быть видно с Земли.

1. Нарисуйте расположение зеркала относительно Земли и Солнца.
2. Под каким углом к поверхности зеркала солнечные лучи падают на него?
3. Определите минимальные линейные размеры зеркала (зеркало овальное и расположено так, чтобы отражение Солнца было полностью видно с Земли), укажите максимальный и минимальный диаметры зеркала.
4. Оцените местное время захода за горизонт зеркального Солнца на экваторе.
5. Найдите звездную величину зеркального Солнца.
6. Как долго будет длиться полная фаза центрального затмения зеркального Солнца Луной?

Считайте орбиты Земли и Луны круговыми, пренебрегите потерями света при отражении от зеркала.

Решение.

1.

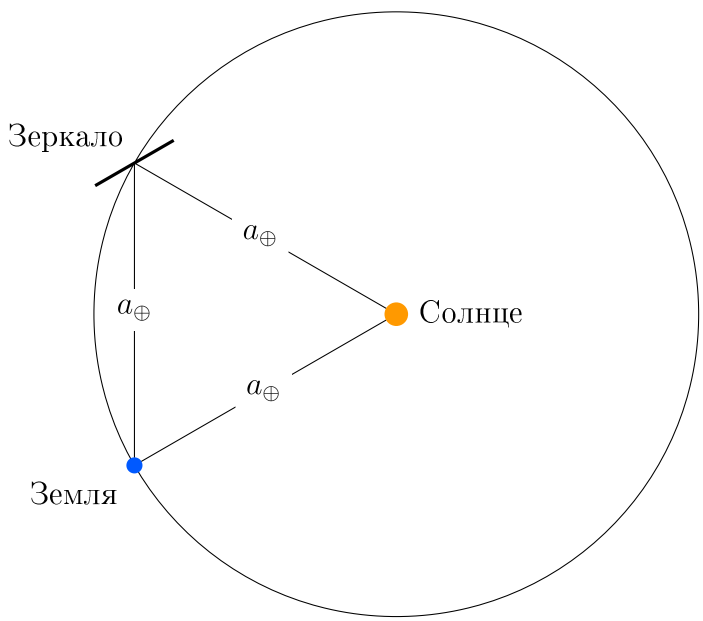


Рис. 1: Взгляд на систему Земля – Солнце с северного полюса.

2. Треугольник Земля — Зеркало — Солнце равносторонний. Зеркало плоское, значит, угол падения равен углу отражения. Следовательно, угол между поверхностью и лучом равен 60°.

3. Зеркало представляет собой эллипс (овал, рисунок 2) расположенный под углом к наблюдателю, значит, D — максимальный диаметр зеркала, d — минимальный диаметр зеркала. Для справки, овал — это плоская замкнутая строго выпуклая гладкая кривая.

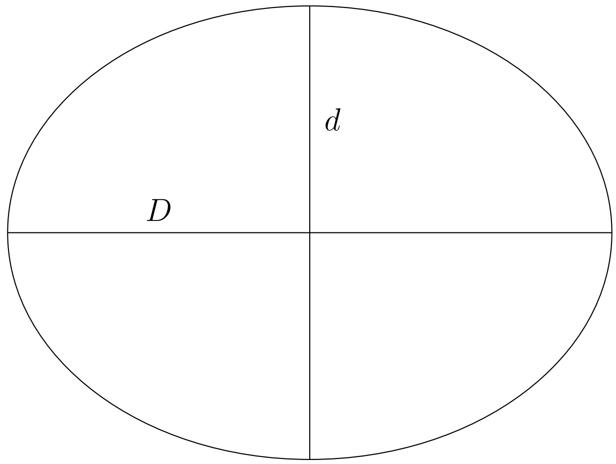


Рис. 2: Форма зеркала.

Наблюдатель видит зеркало круглым (см. рис. 3 и 4). Для того чтобы в зеркало помещалось все Солнце, но линейные размеры были минимальны — угловой размер зеркала должен соответствовать угловому размеру изображения Солнца.

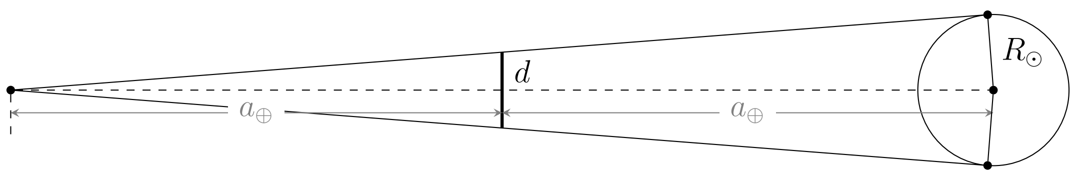


Рис. 3: Вид из плоскости эклиптики на систему Земля — зеркало — изображение Солнца.

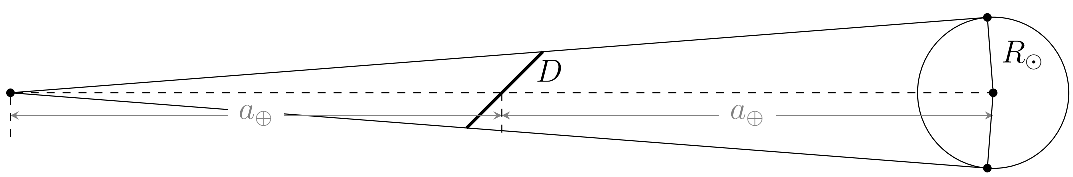


Рис. 4: Вид из полюса эклиптики на систему Земля — зеркало — изображение Солнца.

Изображение Солнца находится на расстоянии 2 а. е., так как солнечным лучам требуется пройти путь от Солнца до зеркала, а затем, после отражения, до Земли. Из равенства угловых размеров получаем

$$\frac{d}{1\,\text{а. е.}} = \frac{2R_\odot}{2\,\text{а. е.}} \quad \Rightarrow \quad d = R_\odot = 697\,000\,\text{км},$$
$$D = \frac{d}{\sin(60^\circ)} = 805\,000\,\text{км}.$$

4. Зеркальное Солнце отстает от реального на 60° по эклиптике, и в первом приближении движется по небу со скоростью равной скорости Солнца, то есть 15°/час. На экваторе в любое время года заход Солнца происходит в $18^{\mathrm{h}}\,00^{\mathrm{m}}$ по местному времени, а суточное движение происходит перпендикулярно плоскости горизонта. Значит, зеркальное Солнце заходит позже на 4 часа, в $22^{\mathrm{h}}\,00^{\mathrm{m}}$.

5. Заметим, что зеркало изменяет только направление движения солнечных лучей, не меняя их характеристик. Так как в зеркало видно полное изображение Солнца, то можно считать, что вместо зеркала в том направлении находится Солнце на расстоянии 2 а. е. Освещенность, создаваемая зеркалом, будет равна

$$I_{\mathrm{Img}} = \frac{L_\odot}{4\pi(2a_\oplus)^2}.$$

Звездную величину зеркального Солнца получим, сравнив его с обычным Солнцем:

$$m_{\mathrm{Img}} - m_\odot = 2.5 \lg \frac{I_\odot}{I_{\mathrm{Img}}}.$$

$$m_{\mathrm{Img}} = m_\odot + 2.5 \lg \left(\frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2} \cdot \frac{4\pi(2a_\oplus)^2}{L_\odot} \right) = m_\odot + 2.5 \lg 4 = -25.3^{\mathrm{m}}.$$

6. Затмение центральное, значит, Луна закрывает зеркальное Солнце так, что в некоторый момент времени их центры совпадали. Полная фаза затмения будет от положения 2 до положения 3 (см. рис. 5).

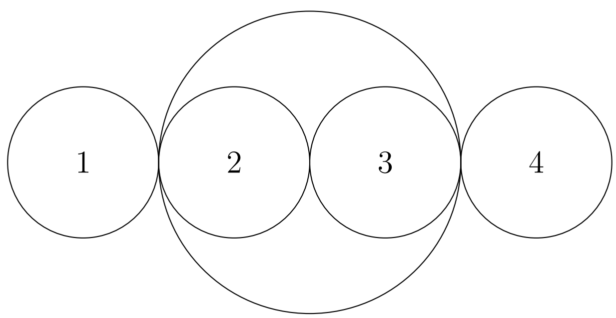


Рис. 5: Взаимное положение Луны и зеркального Солнца во время затмения.

Угловой размер зеркального Солнца в два раза меньше углового размера Луны. Угловая скорость зеркального Солнца относительно звезд равна $\omega_\odot = \frac{360^\circ}{365.25\ \text{дней}} \approx 0.04^\circ/\text{час}$, а угловая скорость Луны — $\omega_☾ = \frac{360^\circ}{27.3\ \text{дней}} \approx 0.55^\circ/\text{час}$. Скорость Луны относительно зеркального Солнца $\omega = \omega_☾ - \omega_\odot = 0.51^\circ/\text{час}$.

Пусть $\delta_☾$ и $\delta_\odot$ — угловые диаметры Луны и зеркального Солнца соответственно. Тогда во время полной фазы Луна перемещается на расстояние $\delta_☾ - \delta_\odot = \delta_\odot$. Продолжительность полной фазы затмения равна:

$$t = \frac{\delta_\odot}{\omega} = \frac{0.25^\circ}{0.51^\circ/\text{час}} \approx 0.49 = 29\,\text{мин}.$$

Критерии оценивания. **15**

К1. Правильное расположение зеркала относительно Земли и Солнца **1**

Если рисунок сделан зеркально симметрично без явного указания, что вид с Юга – 0 баллов

К2. Угол к поверхности **1**

Любой другой угол, даже если правильно – 0 баллов

К3. Определены минимальные линейные размеры зеркала **4**

Указание на то, что зеркало – это эллипс и с Земли выглядит как круг 1

Явно указывается и используется то, что изображение находится на 2 а. е. 1

Малая полуось эллипса 1

Большая полуось эллипса 1

К4. Определение момента захода Солнца **2**

Обоснование 1

Ответ 1

К5. Определение видимой звездной величины **3**

Утверждение, что зеркало меняет только направление лучей 1

Правильная формула 1

Правильное численное значение $-25.24^m \pm 0.15^m$ 1

К6. Определение длительности полного затмения **4**

Условие задачи позволяет выбрать несколько моделей решений. Например, наблюдатель находится на полюсе или в центре Земли. В этом случае участнику не нужно учитывать вращение Земли вокруг своей оси. Возможно участник разместил наблюдателя на экваторе. В этом случае необходимо учесть вращение Земли.

Решения, в которых участники искали длительность затмения во всей полосе полного затмения оценивается *максимум* в 1 балл

Описана модель, используемая для расчета 1

Определение пути, пройденного Луной относительно Солнца 1

Скорость Луны относительно Солнца 1

Получение численного ответа с учетом выбранной модели 1

9.3. В ожидании максимума

В. Б. Игнатьев

23 сентября для наблюдателя в Гринвиче ($\varphi = 51.5°$, $\lambda = 0^{\mathrm{h}}\,00^{\mathrm{m}}$) Церера взошла в $17^{\mathrm{h}}\,30^{\mathrm{m}}$. На сколько звездных величин блеск Цереры меньше максимально возможного? Через сколько суток она достигнет максимума блеска?
Орбиты Цереры и Земли считать круговыми и лежащими в одной плоскости. Радиус орбиты Цереры $a = 2.77$ а. е. Поглощением в атмосфере Земли, рефракцией, уравнением времени и суточным параллаксом пренебречь.

Решение.

Наблюдатель находится в Гринвиче, где гражданское (поясное) время при принятых нами допущениях совпадает с местным (и средним) солнечным. В день наблюдения в $18^{\mathrm{h}}\,00^{\mathrm{m}}$ Солнце, находящееся в точке осеннего равноденствия, заходит за горизонт в точке запада, а в точке востока оказывается точка весеннего равноденствия ♈ (рис. 6).

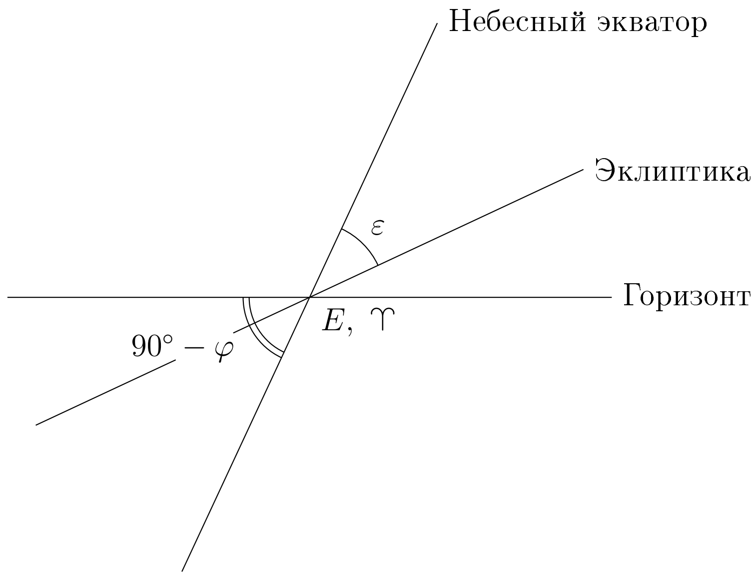


Рис. 6: Вид на точку востока в 18:00

Церера взошла в $17^{\mathrm{h}}\,30^{\mathrm{m}}$, когда точка ♈ еще находилась под горизонтом на глубине (рис. 7)

$$h = 0.5^{\mathrm{h}} \cos\varphi = 7.5° \cos\varphi \approx 4.7°.$$

Добавим к рисунку 7 эклиптику, которая проходит через точку ♈ и располагается под углом ε к небесному экватору. Церера находится одновременно на эклиптике и на горизонте, поэтому угловое расстояние от точки ♈ до Цереры составляет

$$L = \frac{h}{\cos(\varphi + \varepsilon)} = \frac{7.5° \cos\varphi}{\cos(\varphi + \varepsilon)} \approx 18°.$$

Нарисуем орбиты Земли и Цереры, как они были бы видны из северного полюса эклиптики (рис. 8). Радиусы этих орбит обозначим $a_{\oplus}$ и a соответственно. Напомним, что точка весеннего равноденствия в противостоянии к Солнцу, поэтому угол ♈ — Земля — Церера — это уже

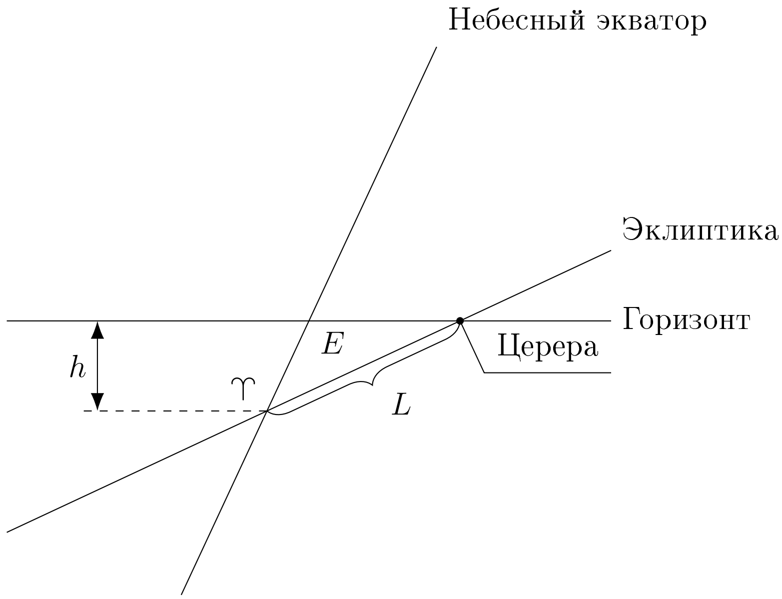


Рис. 7: Вид на точку востока в 17:30

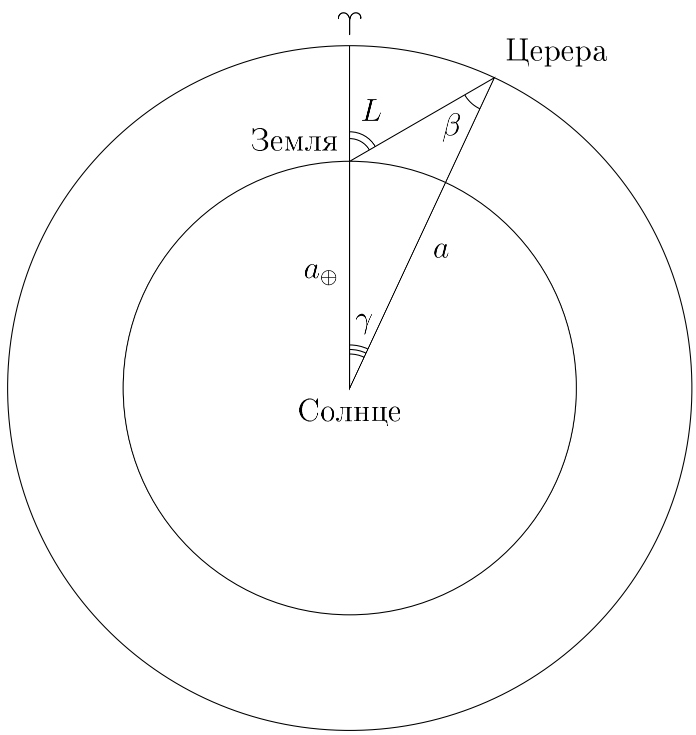


Рис. 8: Вид из полюса эклиптики

найденный нами угол L. Угол Земля — Церера — Солнце обозначим как β. В астрономии его часто называют фазовым углом. Угол Земля — Солнце — Церера обозначим γ.

Запишем теорему синусов для треугольника Солнце — Земля — Церера:

$$\frac{a}{\sin(180^\circ - L)} = \frac{a_\oplus}{\sin\beta}.$$

Выразим угол β:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{a_\oplus}{a}\sin(180^\circ - L)\right) = \arcsin\left(\frac{a_\oplus}{a}\sin L\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2.77}\sin 18^\circ\right) \approx 6.4^\circ.$$

Угол γ при Солнце можно найти из суммы углов треугольника.

$$\gamma = L - \beta = 11.6^\circ.$$

По теореме косинусов можно определить расстояние от Земли до Цереры.

$$R = \sqrt{a_\oplus^2 + a^2 - 2a_\oplus a\cos\gamma} = 1.8\,\text{а. е.}$$

В случае круговых орбит, максимальный блеск Церера будет иметь на минимальном к Земле расстоянии, то есть в противостоянии. В этот момент фаза карликовой планеты будет равна единице. Обратим внимание, что в момент восхода фаза Цереры будет равна $\Phi = \frac{1+\cos\beta}{2} \approx 0.997$, то есть настолько близка к единице, что разница возникает в третьем знаке. Таким отличием от единицы можно смело пренебречь.

Запишем формулу Погсона, сравнив звездные величины Цереры в противостоянии и рассматриваемый момент задачи.

$$m_{\max} - m = -2.5\lg\frac{R^2}{(a - a_\oplus)^2} = -5\lg\frac{R}{a - a_\oplus} \approx 0.04^{\mathrm{m}}.$$

Осталось ответить на последний вопрос задачи, через какое время у Цереры будет максимальный блеск, или, что то же самое, она будет в противостоянии. Вернемся к рисунку 8. Если смотреть из северного полюса эклиптики, то планеты двигаются против часовой стрелки. Угловая скорость Цереры меньше угловой скорости Земли, а поскольку она находится восточнее Солнца, то она недавно была в противостоянии. Синодический период Цереры

$$S = \frac{T\cdot T_\oplus}{T - T_\oplus} = \frac{a^{1.5}}{a^{1.5} - 1} \approx 1.28\ \text{года}$$

Церера была в противостоянии $t = S\gamma/360^\circ \approx 0.04$ года назад, и снова окажется там спустя $\Delta t = S - t = 1.24\,\text{года} \approx 452$ сут.

Критерии оценивания. **15**

К1. Угловое расстояние L между ♈ и Церерой **4**

К2. Расстояние между Церерой и Землей в момент наблюдения **4**

К3. Разность звездных величин **3**

Если не рассмотрен вопрос с фазой, то -1.

К4. Синодический период **2**

К5. Вычисление времени до следующего противостояния **2**

9.4. Цифровизация

М.В. Кузнецов, К.О. Чепурной

При помощи телескопа с диаметром $D = 20$ см, относительным отверстием $A = 1/10$ и ПЗС-матрицей была сделана фотография звезды. В таблице вам указано число отсчетов (фотонов) в каждом пикселе матрицы. На основании этих данных определите следующие величины:

1. фокусное расстояние телескопа;
2. размер одного пикселя ПЗС-матрицы;
3. звездную величину звезды

КПД приемника излучения составляет 86%, потери света в оптической системе — 10%. От звезды нулевой звездной величины поступает 10^6 фотонов на 1 см^2 в 1 секунду. Диаметр диска атмосферного дрожания звезды $1.1''$. Длительность выдержки фотографии — 10 секунд.

101	98	97	98	99	100	99
99	98	101	170	100	99	97
97	96	766	777	771	102	100
101	190	795	809	802	202	99
100	102	780	791	771	100	95
104	105	98	196	100	99	97
105	104	101	104	102	104	103

Решение. Относительное отверстие телескопа — это отношение диаметра объектива к его фокусному расстоянию F:

$$A = \frac{D}{F}$$

Следовательно, $F = 10 \cdot D = 200$ см. Это является ответом на **первый вопрос** задачи.

Перейдем ко **второму вопросу**. Для этого внимательно рассмотрим данную таблицу.

101	98	97	98	99	100	99
99	98	101	170	100	99	97
97	96	766	777	771	102	100
101	190	795	809	802	202	99
100	102	780	791	771	100	95
104	105	98	196	100	99	97
105	104	101	104	102	104	103

Таблица 1: Количество отчетов. Серым цветом выделена изображение звезды относительно фона.

Изображение звезды занимает на ПЗС-матрице область 3×3 пикселя. Выходит, что изображение звезды занимает больше, чем один пиксель. Причин для этого несколько. Первая состоят в том, что телескоп не строит точечное изображение звезды. Существует разрешающая способность объектива:

$$\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}\ \text{(рад)} \qquad \text{или} \qquad \theta'' = \frac{138}{D\ \text{(мм)}}.$$

Первая формула дает значение разрешающей способности объектива в радианах, и для нахождения числа нужно знать длину волны оптического диапазона. Обычно, в астрономии для длины волны оптического диапазона берут значение $\lambda = 550$ нм или 5500 Å. Можно воспользоваться и второй формулой, которая сразу дает значение разрешающей способности в угловых секундах.

Определим величину разрешающей способности объектива данного телескопа, обозначив ее за величину θ_1.

$$\theta_1'' = \frac{138}{200} \approx 0.7''.$$

Вторая причина, почему изображение звезды не является точечным, это качество атмосферы или атмосферное дрожание. Величина этого эффекта дана в условии задачи и равна $\theta_a = 1.1''$. Второй эффект является в полтора раза более сильным.

Поскольку, каждая величина является случайной, то мы можем отнестись к ним, как к случайным ошибкам. Тогда суммарный эффект будет

$$\theta_{\sum}'' = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_a^2} \approx 1.3''.$$

Определим, размер «неточечности» изображения на ПЗС-матрице, которая стоит в фокальной плоскости:

$$\theta_{\sum} = \frac{l}{F},$$

где l — диаметр пятна в фокальной плоскости телескопа. Тогда

$$l = \frac{\theta_{\sum}}{206\,265} \cdot F = \frac{1.3 \cdot 2 \cdot 10^6\,\text{мкм}}{206265} = 12.6\,\text{мкм}.$$

Снова вернемся к таблице с отчетами. Так как значения в каждом пикселе по горизонтали и вертикали на центральной оси звезды примерны равны, то размер звезды с хорошей точностью составляет 3 пикселя. Следовательно, размер одного пикселя

$$x = \frac{l}{3} = 4.2\,\text{мкм}.$$

Теперь перейдем к **третьему вопросу** задачи. Определим звездную величину звезды.

Казалось бы, нам нужно сложить число всех фотонов, которые попали в 9 выбранных пикселей. Это 7062 фотона. Но следует обратить внимание на то, что за пределами изображения звезды также имеются отсчеты. Этот шум, возникающий в матрице по очень разным причинам, должен быть во всех пикселях, в том числе и пикселях со звездой. Средняя величина фона неба составляет 100 фотонов на пиксель. Следовательно, от звезды мы зарегистрировали $N_0 = 6162$ фотона.

Вспомним, что в условии задачи было сказано, что КПД приемника излучения составляет 86%, потери света в оптической системе 10%. Тогда число фотонов, попавших на зеркало телескопа составляет

$$N = \frac{N_0}{0.86 \cdot 0.9} = 7960 \text{ фотонов}.$$

Выразим, от чего зависит число фотонов, попадающих на матрицу. Для этого в условии задачи дана еще одна подсказка. А именно, от звезды нулевой звездной величины поступает 10^6 фотонов на 1 см^2 в 1 секунду. Чем больше будет выдержка, тем больше фотонов будет зарегистрировано. Чем больше площадь зеркала (а не пикселя), тем больше будет фотонов на приемнике. Запишем зависимость в виде сравнения нашей звезды со звездой нулевой звездной величины. Последнюю будем обозначать индексом s – стандарт.

$$\frac{N_1}{N_s} = \frac{E_1}{E_s}\frac{\Delta t_1 \cdot S_1}{\Delta t_s \cdot S_s},$$

где $\Delta t_s = 1$ секунде, а $S_s = 1$ см^2. Выразим отсюда отношение освещенностей

$$\frac{E_1}{E_s} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{\Delta t_s \cdot S_s}{\Delta t_1 \cdot S_1}.$$

Через формулу Погсона получим разность звездных величин

$$m_1 - m_s = -2.5 \log\left(\frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{\Delta t_s \cdot S_s}{\Delta t_1 \cdot S_1}\right)$$

Подставим значения

$$m_1 = 0^m - 2.5 \log\left(\frac{7960}{10^6} \cdot \frac{1\text{сек} \cdot 1\ \text{см}^2}{10\ \text{сек} \cdot \pi \cdot (20/2)^2\ \text{см}^2}\right) = 14^m$$

Критерии оценивания. **15**

К1. Определение фокусного расстояния телескопа: формула + значение ... **1 + 1**

К2. Определение углового размера изображения звезды ... **3**

- Вычисление дифракционного размера ... 1
- Учет атмосферного диска дрожания ... 1
- Правильный способ учета двух эффектов ... 1

Если учитывается только один эффект, то за этап не более 1 балла, но остальные оцениваются в полной мере.

К3. Определение линейного размера «пятна» звезды ... **1**

К4. Определение линейного размера одного пикселя ... **1**

К5. Определение числа фотонов от звезды ... **5**

- Звезда занимает 9 пикселей ... 1
- Правильный подсчет числа фотонов в пикселях, занятых звездой ... 1
- Определение средней величины фона ... 1
- Вычитание среднего уровня фона из отсчетов звезды ... 1
- Учет потерь в приемнике и оптической системе ... 1

К6. Определение звездной величины звезды ... **3**

- Связь отношения освещенностей от числа отсчетов в пикселе ... 1
- Получение выражения для звездной величины ... 1
- Итоговый численный ответ с точностью 0.2^m ... 1

9.5. Таинственный клад

А. Ф. Шишкина

Юный астроном Саша любит играть с дедушкой в квесты. Однажды Саша получил от дедушки первую подсказку с таким содержанием:

«В тот момент, когда я закапывал клад, звезды № 1 и № 2 располагались так, что где бы ты ни был в этот момент, сумма высот этих звезд у тебя меньше либо равна моей. Склонения этих звезд X и Y. Остальная информация будет во второй подсказке.»

Вопрос № 1. По данным из первой подсказки помогите Саше определить широты, на которых может находиться клад. Ответ выразите через X и Y. В данном вопросе считайте, что звезды находятся недалеко друг от друга, а разница их прямых восхождений меньше, чем разница их склонений.

На следующий день Саша получил вторую подсказку:

«Эта информация приведет тебя точно к кладу. Я закопал клад 3 июля в $12^{\mathrm{h}}\,56^{\mathrm{m}}$ по московскому времени. В момент закапывания клада высоты звезд № 1 и № 2 были равны. Это звезды Ахернар и Фомальгаут».

В справочнике Саша нашел экваториальные координаты звезд:
Фомальгаут: прямое восхождение $22^{\mathrm{h}}\,57^{\mathrm{m}}\,39^{\mathrm{s}}$, склонение $-29°37'20''$;
Ахернар: прямое восхождение $01^{\mathrm{h}}\,37^{\mathrm{m}}\,43^{\mathrm{s}}$, склонение $-57°14'12''$.

Вопрос № 2. Определите координаты (широту и долготу) места, где закопан клад.

Вопрос № 3. На каком материке закопан клад?

Считайте, что экваториальные координаты звезд с течением времени не меняются.

Решение. Для начала введем понятие подзвездная точка — эта такая точка, в которой данная звезда находится в данный момент в зените. Тогда заметим несколько ее свойств:

1. Множество точек на Земле, из которых данная звезда видна на одной высоте — это окружность с центром в подзвездной точке данной звезды.
2. Широта подзвездной точки всегда равна склонению данной звезды.
3. Центр Земли, подзвездная точка и сама звезда лежат на одной прямой.
4. Чем дальше мы удаляемся от подзвездной точки, тем меньше будет высота этой звезды.

Используем эти свойства для решения задачи.

Пусть наши звезды — это $А$ и $Б$. Рассмотрим подзвездные точки обеих этих звезд, которые обозначим $А_1$ и $Б_1$.

Пусть мы находимся в какой-то точке $В$, которая не лежит на дуге $А_1Б_1$. Тогда заметим, что сумма длин дуг $\mathrm{А_1В}$ и $\mathrm{Б_1В}$ больше, чем длина дуги $\mathrm{А_1Б_1}$. Значит клад зарыт где-то на дуге $\mathrm{А_1Б_1}$, а возможная широта места, где закопан клад, лежит в промежутке от X до Y, т. к. X и Y — это широты подзвездных точек $\mathrm{А_1}$ и $\mathrm{Б_1}$. Ответ на первый вопрос получен.

Рассмотрим второй вопрос. Сначала определим широту. Поскольку высоты звезд были одинаковыми, то значит мы отдалились на земле от точки $\mathrm{А_1}$ и от точки $\mathrm{Б_1}$ на равные расстояния.

Поэтому можно утверждать, что клад находится на середине дуги А$_1$Б$_1$, т. е. широта места, где находится клад, равна $(X+Y)/2$, т. е. в нашем случае широта равна $\varphi = -43°25'46''$.

Осталось найти долготу. Для этого нам нужно найти звездное время в этой точке и на гринвичском меридиане в момент закапывания клада. Сначала найдем солнечное время в Гринвиче:

$$T_{\text{гр}} = \text{Т}_n - n = 12^{\text{h}}\,56^{\text{m}} - 3^{\text{h}} = 9^{\text{h}}\,56^{\text{m}}.$$

Теперь найдем звездное время на гринвичском меридиане. Посчитаем количество дней, прошедших с дня летнего солнцестояния (22 июня) до даты закапывания клада. Получим 11 дней. За это время Солнце переместилось по эклиптике на $360/365.25 \cdot 11 \approx 10.8° \approx 11°$.

$$\alpha_c = 6^{\text{h}} + 11 \cdot 24/365 \approx 6.72^{\text{h}} \approx 6^{\text{h}}\,43^{\text{m}}.$$

Часовой угол Солнца в Гринвиче

$$t = T_{\text{гр}} – 12^{\text{h}} = 21^{\text{h}}\,56^{\text{m}}.$$

Тогда звездное время на Гринвиче:

$$S_{\text{гр}} = t + \alpha_c = 4^{\text{h}}\,39^{\text{m}}.$$

Так как клад находится на середине дуги А$_1$Б$_1$, то звездное время в данном месте есть среднее между звездными временами точек А$_1$ и Б$_1$. Для наблюдателя в т. А$_1$ в зените находится Ахернар, значит часовой угол этой звезды равен 0. Тогда звездное время в т. А$_1$:

$$S_{\text{А1}} = \alpha_1 + t_1 = 01^{\text{h}}\,37^{\text{m}}\,43^{\text{s}}.$$

Аналогично для точки Б$_1$:

$$S_{\text{Б1}} = \alpha_2 + t_2 = 22^{\text{h}}\,57^{\text{m}}\,39\text{s}.$$

Расстояние между звездами меньше 180°, значит, нас интересует середина меньшей дуги большого круга, на котором лежат наши подзвездные точки. Тогда звездное время в нашей точке:

$$S_{\text{к}} = (01^{\text{h}}\,37^{\text{m}}\,43^{\text{s}} + (22^{\text{h}}\,57^{\text{m}}\,39^{\text{s}} - 24^{\text{h}}))/2 = 0^{\text{h}}\,17^{\text{m}}\,41^{\text{s}} \approx 0^{\text{h}}\,18^{\text{m}}.$$

Определим долготу:

$$\lambda = S_{\text{к}} – S_{\text{гр}} = -4^{\text{h}}\,21^{\text{m}} = -65°15' = 65°15'\,\text{з. д.}$$

Мы получили, что клад закопан на континенте к югу от экватора в западном полушарии. Под такое описание из материков подходит только Южная Америка.

Критерии оценивания. **15**

К1. Вопрос № 1 . . . . . . **3**
- Обоснование 2
- Верный ответ 1

К2. Вопрос № 2 . . . . . . **11**
- Нахождение широты: обоснование 2
- Нахождение широты: верный ответ 1
- Солнечное время в Гринвиче 1
- Прямое восхождения Солнца в день закапывания клада 2
- Часовой угол Солнца 1
- Звездное время в Гринвиче 1
- Звездное время в точке клада 2
- Верное значение долготы 1

К3. Вопрос № 3 . . . . . . **1**

Верный ответ засчитывается только в случае соответствия координат, полученных в вопросе 2, и указанного географического места.

9.6. Сливающиеся белые карлики

В. Б. Игнатьев

Ученые обнаружили компактную двойную систему, состоящую из двух полностью одинаковых белых карликов, движущихся по круговым орбитам вокруг общего центра масс. Наблюдения показали, что расстояние до двойной $r = 59$ пк, а ее звездная величина $m = 13^{\mathrm{m}}$. Плоскость орбиты системы наклонена на $i = 85°$ к картинной плоскости. Температуры фотосфер звезд равны $T = 15\,000$ К, ускорения свободного падения на поверхности $g = 0.96 \cdot 10^6$ м/с^2. Орбитальный период двойной системы медленно уменьшается за счет излучения гравитационных волн. При каком значении орбитального периода эта двойная начнет наблюдаться как затменно-переменная система?

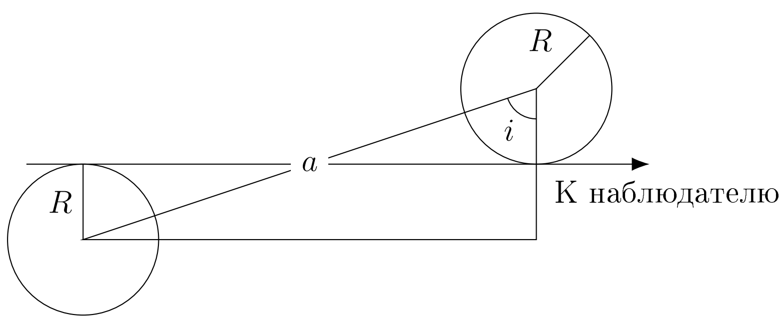
Болометрическими поправками и межзвездным поглощением пренебречь.

Решение. Третий закон Кеплера связывает орбитальный период P двойной с расстоянием между звездами a и массами компонент $\mathfrak{M}$:

$$P = \left[4\pi^2 \frac{a^3}{G(\mathfrak{M} + \mathfrak{M})}\right]^{\frac{1}{2}},$$

где G — гравитационная постоянная. С помощью рисунка определим, что затмения возможны, если a не больше

$$a = \frac{2R}{\cos i}.$$



Таким образом, для ответа на поставленный вопрос нам нужно определить массы и радиусы белых карликов. В целом, эти значения для белых карликов не слишком сильно разнятся, поэтому оценить искомое значение несложно. Масса типичного белого карлика примерно равна массе Солнца $\mathfrak{M}_\odot$, а радиус около 10000 км. Подставив эти значения, получим период 22 минуты.

Теперь решим задачу более точно. Ускорение свободного падения на поверхности белого карлика равно $g = G\mathfrak{M}/R^2$. Тогда

$$\mathfrak{M} = \frac{gR^2}{G}.$$

Радиус белого карлика можем найти из закона Стефана — Больцмана. Отношение светимостей белого карлика и Солнца можно записать в виде

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4.$$

Здесь величины, относящиеся к Солнцу, отмечены индексами $\odot$. Эта же величина может быть выражена с помощью абсолютных звездных величин белого карлика M и Солнца $M_\odot$:

$$\frac{L}{L_\odot} = 10^{-0.4(M-M_\odot)}.$$

Величина $M_\odot$ дана в справочных данных, а M можно найти, поскольку нам дана звездная величина двойной и расстояние до нее. Принимая во внимание, что вклад в блеск двойной вносят оба белых карлика, получим

$$M = m + 2.5\lg 2 + 5 - 5\lg r = 13 + 2.5\lg 2 + 5 - 5\lg 59 = 9.9^{\mathrm{m}}$$

Теперь мы можем рассчитать радиус белого карлика

$$R = R_\odot \left(\frac{T_\odot}{T}\right)^2 10^{-0.2(M-M_\odot)} = 695\,000 \left(\frac{5800}{15000}\right)^2 10^{-0.2(9.9-4.7)} \approx 9500\,\text{км}$$

и его массу

$$\mathfrak{M} = \frac{gR^2}{G} = \frac{0.96\cdot 10^6 (9.5\cdot 10^6)^2}{6.67\times 10^{-11}} \approx 1.3\times 10^{30}\,\text{кг} \approx 0.65 M_\odot$$

Мы видим, что радиусы этих белых карликов довольно типичные, а массы несколько меньше принятого нами в начале решения значения. Искомый период получается равным

$$P = \left[4\pi^2 \frac{a^3}{G\cdot 2\mathfrak{M}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[16\pi^2 \frac{R}{g\cdot\cos^3 i}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[16\pi^2 \frac{9.5\times 10^6}{0.96\times 10^6\cdot\cos^3 85^\circ}\right]^{\frac{1}{2}} \approx 26\,\text{мин.}$$

Критерии оценивания. **15**

К1. Зависимость периода двойной от массы звезд и большой полуоси **2**

Если учтена масса только одной звезды, этот этап не оценивается, но остальные оцениваются в полной мере.

Если в качестве большой полуоси используется половина расстояния между звездами, этот этап не оценивается, но остальные оцениваются в полной мере.

К2. Критерий для максимального размера a **2**

К3. Связь массы и радиуса белого карлика **2**

Если эта величина используется как известная, то этот этап не оценивается, а остальные оцениваются в полном объеме.

К4. Определение радиуса белого карлика **7**

Если эта величина используется как известная, то этот этап не оценивается, а остальные оцениваются в полном объеме.

Применение закона Стефана — Больцмана 1

Применение формулы Погсона для освещенностей 1

Связь видимой и абсолютной звездных величин 1

Учтено, что видимая звездная величина относится к двум звездам 1

Вывод формулы и вычисление значения радиуса . . . . . $2+1$

К5. Получение итогового ответа **2**

Теоретический тур

Условия, решения и схема оценивания. 10 класс

Содержание

10.1. Долгожданная новая

И.В. Игнатьев

Из наблюдений за повторной новой T CrB было установлено, что длина волны линии H_α в спектре красного гиганта с эффективной температурой 3560 К и светимостью 670 $L_\odot$ колеблется с амплитудой 0.52 Å, а в спектре белого карлика – с амплитудой 0.43 Å. Период обращения системы равен 228 дней, затмения в системе не наблюдаются. Орбиты звёзд круговые. Определите, чему может быть равен наклон плоскости орбит этой системы к картинной плоскости. Лабораторная длина волны линии H_α равна 6563 Å.

Решение.

Пусть индекс 1 относится к красному гиганту, а индекс 2 к белому карлику. Найдём лучевые скорости компонент:

$$v_r = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cdot c$$

Получим $v_{r1} = 23.8$ км/с, $v_{r2} = 19.7$ км/с. Полная скорость v выражается через лучевую скорость и наклон плоскости орбит следующим образом:

$$v = v_r / \sin(i)$$

В системе отсчёта одной из звёзд можем выразить расстояние между компонентами a:

$$a = \frac{T \cdot (v_{r1} + v_{r2})}{2\pi \sin(i)}$$

Запишем третий закон Кеплера:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)}$$

Подставляя a получим:

$$\frac{2\pi \sin(i)^3}{T \cdot (v_{r1} + v_{r2})^3} = \frac{1}{G(M_1 + M_2)}$$

Тогда понятно, что наклон зависит от масс компонент, причём чем меньше суммарная масса, тем больше должен быть наклон орбиты. Знаем, что масса белого карлика ограничена сверху пределом Чандрасекара ($M_{ch} \approx 1.4 M_\odot$). Отношение масс можем выразить через отношение скоростей:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_{r2}}{v_{r1}}$$

Теперь выразим наклон орбиты через массу белого карлика:

$$\frac{2\pi \sin(i)^3}{T \cdot (v_{r1} + v_{r2})^3} = \frac{1}{GM_2(1 + \frac{v_{r2}}{v_{r1}})}$$

$$\sin(i)^3 > \frac{T \cdot (v_{r1} + v_{r2})^3}{2\pi G M_{ch}(1 + \frac{v_{r2}}{v_{r1}})}$$

Отсюда получим ограничение на наклонение орбиты снизу:

$$i > 65.5^\circ$$

Теперь посмотрим, при каких i в системе будут отсутствовать затмения. Найдём радиус красного гиганта:

$$L_1 = 4\pi R_1^2 \sigma T_1^4$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T_1^4}} = 0.31 \text{ а.е.}$$

Тогда, считая что $R_2 << R_1$ для отсутствия затмений необходимо, чтобы:

$$\cos(i) > R_1/a = \frac{2\pi R_1}{T \cdot (v_{r1} + v_{r2})} \cdot \sin(i)$$

$$\tan(i) < \frac{T \cdot (v_{r1} + v_{r2})}{2\pi R_1}$$

Отсюда получаем ограничение сверху на наклонение орбиты:

$$i < 71.2^\circ$$

Итого, получаем, что наклонение орбиты лежит в следующем диапазоне:

$$65.5^\circ < i < 71.2^\circ$$

Возможная ошибка Участник может неправильно трактовать слово амплитуда, приняв, что это полное изменение (от максимума до минимума) для линии H_α, а не его половина. В таком случае, лучевые скорости получатся в два раза меньше, и составят $v_{r1} = 11.9$ км/с, $v_{r2} = 9.8$ км/с. Это никак не повлияет на решение, а влияет лишь на итоговый ответ. Диапазон изменится на:

$$i \in (27^\circ, 55.8^\circ)$$

Критерии оценивания. **15**

К1. Вычисление скоростей **3**
- Запись формулы эффекта Доплера 1
- Вычисление скоростей (числа) 2

  По 1 баллу за скорость

К2. Вывод соотношения на наклон, массы и скорости **2**
- Большая полуось как функция скоростей, наклона и периода 1
- Вывод итоговой формулы для $\sin(i)$ 1

К3. Нижняя оценка наклона **5**
- Идея о том, что масса белого карлика ограничена сверху как 1.4 $M_\odot$ 3
- Значение для нижней границы угла наклона (число) 2

К4. Вычисление радиуса красного гиганта (число) **1**

К5. Оценка верхней границы наклона **3**
- Критерий отсутствия затмения (формула) 1
- Вычисление верхнего ограничения на наклон 2

К6. Итоговый диапазон **1**

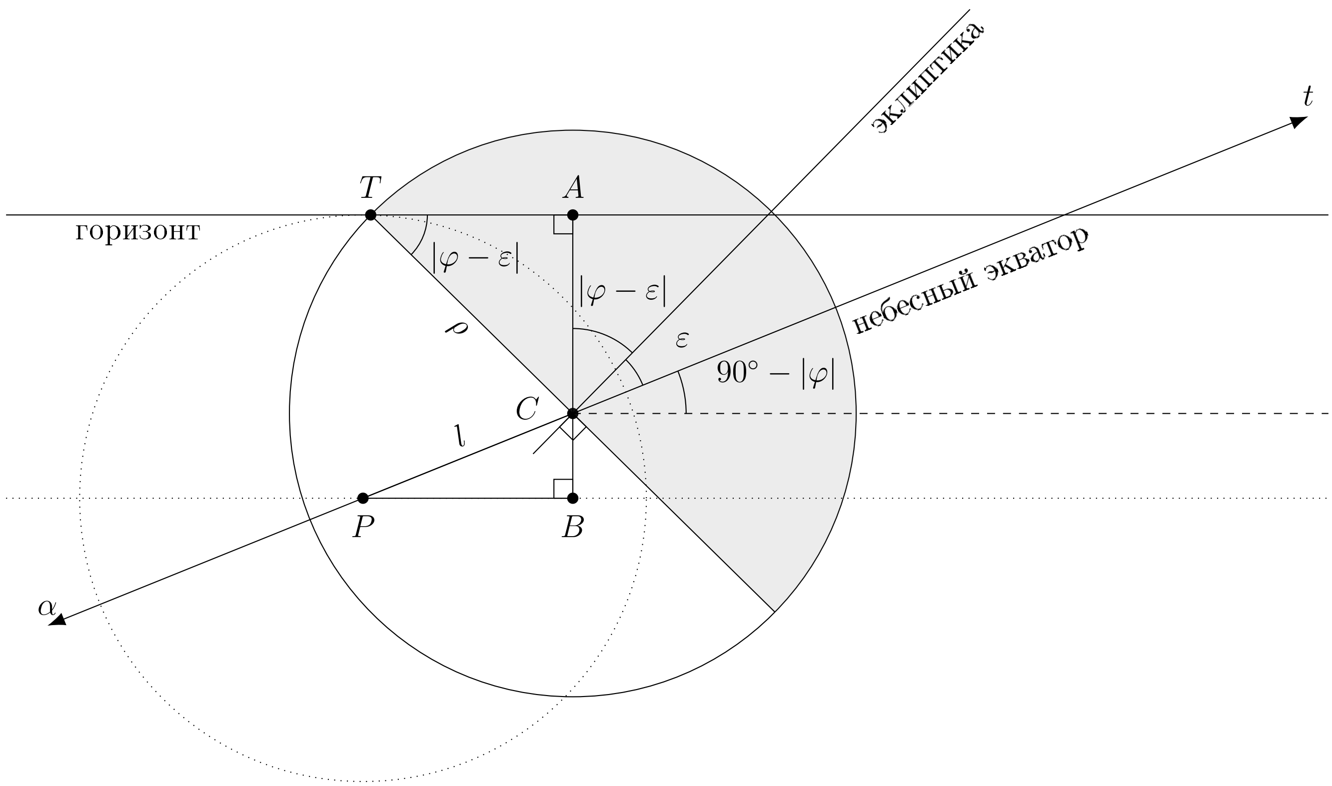
  Выставляется только при верном численном диапазоне

10.2. Минутное замешательство

А. Ребриков

Астроном наблюдал восход Луны 21 июня. Через 1 минуту после начала восхода, как только астроном увидел терминатор, он понял, что Луна находится точно в фазе первой четверти. На какой широте находится астроном, если он находится севернее тропиков? Наклоном орбиты Луны к эклиптике пренебречь.

Решение. Сразу отметим, что Луна находится в точке осеннего равноденствия, ведь её наклонением по условию следует пренебречь. Она обгоняет Солнце по прямому восхождению, поэтому освещённая часть направлена со стороны уменьшения прямого восхождения, то есть увеличения часового угла. Именно в сторону увеличения часового угла двигается Луна, то есть действительно первым делом будет восходить освещённая часть Луны.



На рисунке проведены эклиптика, небесный экватор, терминатор луны, который перпендикулярен направлению на Солнце — эклиптике. Разберём ситуацию в общем случае. Для угла между небесным экватором и горизонтом важен модуль широты. Отметим, что угол между терминатором и горизонтом в любом случае равен $|\varphi - \varepsilon|$, модуль важен для тропических широт, где широта меньше 23.5°.

Обозначим за l путь, который прошла Луна вдоль экватора от начала восхода до момента, когда терминатор впервые коснулся горизонта; за ρ обозначим угловой радиус Луны. Отрезок AB равен ρ, так как это расстояние между линией параллельной горизонту в момент начала восхода Луны и горизонтом. С другой стороны, он равен сумме проекций двух отрезков: TC и PC. Эти проекции соответственно равны $AC = \rho \sin(|\varphi - \varepsilon|)$ и $BC = l \sin(90° - |\varphi|)$. Запишем формулами то, что мы упомянули выше про отрезок AB:

$$AB = AC + CB \implies \rho = \rho \sin(|\varphi - \varepsilon|) + l \sin(90° - |\varphi|) = \rho \sin(|\varphi - \varepsilon|) + l \cos(|\varphi|).$$

Подставим конкретные параметры. Мы не знаем расположение Луны относительно линии апсид, но знаем минимальное $r_{\min} = 356\,410$ км и максимальное $r_{\max} = 406\,700$ км расстояния до Земли и радиус Луны $R = 1738$ км. В таком случае

$$\rho = \frac{R}{r} \implies \rho = 16.76' \div 14.69'$$

Здесь и далее мы используем обозначение $a \div b$ для величины в диапазоне от a до b.

Учтём, что угловая скорость движения Луны меньше, чем у далёких звёзд. Их угловая скорость $\omega_0 = 15.04\,°/\text{ч}$. Посчитаем угловую скорость в минимальном и максимальном расстоянии по формулам

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{GM}{r_{\min}^3}}\sqrt{1+e} = 0.63\,°/\text{ч} \qquad \omega_{\min} = \sqrt{\frac{GM}{r_{\max}^3}}\sqrt{1-e} = 0.49\,°/\text{ч}$$

Мы здесь брали средний эксцентриситет, учёт его отклонений мало влияет на итоговый ответ. Теперь запишем выражение для пройденного пути и введем параметр k

$$l = \omega \cdot 1\ \text{мин.} = (\omega_0 - (\omega_{\min} \div \omega_{\max})) \cdot 1\ \text{мин.} = 14.41' \div 14.55' \implies k = \frac{l}{\rho} = 0.86 \div 0.99.$$

Перепишем соотношение

$$1 = \sin(|\varphi - \varepsilon|) + k\cos(|\varphi|).$$

Нам осталось исследовать корни этого уравнения. Самое время учесть конкретные ограничения из условия: северное полушарие и $\varphi > \varepsilon$, следовательно $|\varphi - \varepsilon| = \varphi - \varepsilon$, $|\varphi| = \varphi$ и уравнение примет вид

$$\begin{aligned}
1 &= \sin(\varphi - \varepsilon) + k\cos(\varphi) \\
&= -\sin(\varepsilon)\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\varepsilon) + k\cos(\varphi) \\
&= (-\sin(\varepsilon) + k)\cos(\varphi) + \cos(\varepsilon)\sin(\varphi) \\
&= (0.46 \div 0.59)\cos(\varphi) + 0.92\sin(\varphi)
\end{aligned}$$

Воспользуемся методом вспомогательного угла. Домножим наши выражения на некоторую константу D так, чтобы у нас получилось выражение с углом θ.

$$D = (0.46 \div 0.59)D\cos(\varphi) + 0.92D\sin(\varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) + \sin(\theta)\sin(\varphi) = \cos(\varphi - \theta)$$

Подберём константу так, чтобы выполнялось основное тригонометрическое тождество

$$1^2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = ((0.46 \div 0.59)D)^2 + (0.92D)^2 \approx (1.06 \div 1.19)D^2$$
$$D = \frac{1}{1.03 \div 1.09} = 0.92 \div 0.97.$$

Теперь сам угол, его

$$\mathrm{tg}(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{0.92D}{(0.46 \div 0.59)D} = \frac{0.92}{0.46 \div 0.59} = (1.56 \div 2.00) \implies \theta = 57.3° \div 63.4°.$$

Мы получили уравнение

$$\cos(\varphi - (57.3^\circ \div 63.4^\circ)) = 0.92 \div 0.97 \implies$$
$$\implies \varphi = (57.3^\circ \div 63.4^\circ) \pm \arccos(0.92 \div 0.97) = (57.3^\circ \div 63.4^\circ) \pm (14.1^\circ \div 23.1^\circ).$$

Нам подходят все корни для модуля широты, которая равна своему модулю. Если аккуратно проследить за тем, чему соответствуют границы диапазонов, получаем, что в случае минуса соответствующие вариации усиливают друг друга, и диапазон одного из ответов $\boxed{34.2^\circ \div 49.3^\circ}$. В случае плюса, вариации наоборот, компенсируют друг друга, из-за чего разброс сильно меньше, и его можно оценить как $\boxed{77.5^\circ \div 80.4^\circ}$ (в действительности же диапазоны будут соответственно $33.5^\circ \div 50.1^\circ$ и $76.4^\circ \div 80.8^\circ$; расхождения вызваны лишь ошибками округления, тем не менее наше замечание про разницу разбросов оказывается совершенно верным).

Критерии оценивания. **15**

K1. Расположение Луны и терминатора **3**
- Явно сказано, что Луна на эклиптике из-за пренебрежения наклонением орбиты . 1
- Луна ровно в точке осеннего равноденствия 1
- Указано, что терминатор перпендикулярен направлению на Солнце — эклиптике 1

K2. Угловые скорости **3**
- Вклад суточного вращения звёзд 1
- Вклад движения Луны относительно звёзд 1
- Полностью верное указание угловой скорости движения Луны по экватору 1

K3. Уравнение для широты из геометрии **3**
- Верный рисунок (отмечены углы/расстояния) 1
- Уравнение, связывающее широту, время после захода и угловой радиус Луны 2

K4. Решение уравнения **2**
- Решение уравнения в числах аналитически 2
- Доведение до вида $\mathrm{trig}(\varphi - \theta) = a$ с конкретными значениями θ и a

K5. Ответ **2**
- Два значения широты 1
- Отсутствие арифметических ошибок 1

K6. Учёт вариаций **2**
- Учёт отличия углового радиуса от среднего в уравнении 1
- Учёт отличия углового радиуса от среднего в ответе 1

10.3. Цифровизация

М.В. Кузнецов, К.О. Чепурной

При помощи телескопа с диаметром $D = 20$ см, относительным отверстием $A = 1/10$ и ПЗС-матрицей была сделана фотография звезды. В таблице ниже указано число отсчётов (фотонов), зарегистрированное в каждом пикселе матрицы. На основании этих данных определите:

A. Размер одного пикселя ПЗС-матрицы.

B. Видимую звёздную величину звезды.

C. Звёздную величину фона неба (на квадратную секунду), если 60% отсчётов в пикселях фона – это тепловые шумы и шумы считывания.

КПД приемника излучения составляет 86%, потери света в оптической системе – 10%. От звезды нулевой звёздной величины поступает 10^6 фотонов на 1 см^2 за 1 секунду. Диаметр диска атмосферного дрожания звезды составляет $1.1''$, длительность выдержки фотографии – 10 секунд.

101	98	97	98	99	100	99
99	98	101	170	100	99	97
97	96	766	777	771	102	100
101	190	795	809	802	202	99
100	102	780	791	771	100	95
104	105	98	196	100	99	97
105	104	101	104	102	104	103

Таблица 1: Количество отсчётов

Решение.

Внимательно рассмотрим данную таблицу.

101	98	97	98	99	100	99
99	98	101	170	100	99	97
97	96	766	777	771	102	100
101	190	795	809	802	202	99
100	102	780	791	771	100	95
104	105	98	196	100	99	97
105	104	101	104	102	104	103

Таблица 2: Количество отсчётов. Серым цветом выделены пиксели, на которые попадает изображение звезды.

Мы видим, что изображение звезды занимает на ПЗС-матрице область 3×3 пикселя.

То есть размер изображения звезды больше, чем один пиксель матрицы. Для этого есть сразу несколько причин. Первая причина состоит в том, что никакая оптическая система не может построить точечное изображение звезды, и размер изображения точечного объекта определяется разрешающей способностью объектива:

$$\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}\ (\text{рад}) \qquad \text{или} \qquad \theta'' = \frac{138}{D\ (\text{мм})}$$

Первый вариант формулы дает значение разрешающей способности объектива в радианах, и, чтобы найти ее численное значение нужно знать длину волны, на которой проводятся наблюдения. Обычно при визуальных наблюдениях используют среднее значение длины волны оптического диапазона $\lambda = 550$ нм или 5500 ангстрем. Можно воспользоваться и вторым вариантом формулы, который сразу дает значение разрешающей способности в угловых секундах.

Определим величину разрешающей способности объектива данного телескопа, обозначив ее как θ_1.

$$\theta_1'' = \frac{138}{200} \approx 0.7''.$$

Вторая причина, почему изображение звезды не является точечным, это качество атмосферы или атмосферное дрожание. Величина этого эффекта задана в условии задачи и равна $1.1''$. Второй эффект является в полтора раза более сильным.

Поскольку эти эффекты независимы друг от друга и величина каждого эффекта является случайной, мы можем работать с ними, как с независимыми источниками случайных ошибок. Тогда суммарный эффект определяется квадратичной суммой и будет равен

$$\theta_\Sigma'' = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_a^2} \approx 1.3''.$$

Определим размер «неточечности» изображения на ПЗС-матрице, которая расположена в фокальной плоскости телескопа:

$$\theta_\Sigma = \frac{l}{F},$$

где l – диаметр пятна в фокальной плоскости телескопа. Определим численно эту величину:

$$l = \frac{\theta_\Sigma}{206265} \cdot F = \frac{1.3 \cdot 2 \cdot 10^6 \text{мкм}}{206265} = 12.6 \text{ мкм}.$$

Снова вернемся к таблице с отсчетами. Так как значения отсчетов в каждом пикселе по горизонтали и по вертикали на центральной оси изображения звезды примерно одинаковы, мы можем считать, что звезда занимает практически все 9 пикселей целиком, и диаметр звезды с хорошей точностью равен 3 пикселям. Следовательно размер одного пикселя

$$x = \frac{l}{3} = 4.2 \text{ мкм}.$$

Теперь определим звёздную величину звезды.

На первый взгляд кажется, что нам нужно просто сложить число всех фотонов, которые попали в 9 выбранных пикселей – 7062 фотона. Но давайте обратим внимание, что значение отсчетов вне изображения звезды не равно нулю, и задумаемся, а почему так? Ответ простой, на него намекает четвертый вопрос задачи – эти отсчеты связаны с зарегистрированными фотонами от фона неба.

По пикселям вне изображения звезды легко понять, что средняя величина фона неба составляет 100 фотонов на пиксель. Следовательно, в центральных пикселях от самой звезды мы зарегистрировали $N_0 = 7062 - 900 = 6162$ фотона.

В условии задачи сказано, что КПД приемника излучения составляет 86%, а потери света в оптической системе – 10%. Тогда число фотонов от звезды, попавших на зеркало телескопа, составит

$$N = \frac{N_0}{0.86 \cdot 0.9} \approx 7960 \text{ фотонов}$$

Давайте определим, от каких параметров зависит число фотонов, попадающих на телескоп. Для этого в условии задачи дана еще одна подсказка – от звезды нулевой звёздной величины на 1 см^2 в 1 секунду поступает 10^6 фотонов.

Чем больше выдержка фотографии, тем больше фотонов будет зарегистрировано. Чем больше площадь зеркала (не пикселя), тем больше будет фотонов на приёмнике. Запишем эту зависимость в виде сравнения нашей звезды и звезды нулевой звёздной величины, параметры которой будем обозначать индексом s – стандарт:

$$\frac{N_1}{N_s} = \frac{E_1}{E_s} \frac{\Delta t_1 \cdot S_1}{\Delta t_s \cdot S_s}$$

где $\Delta t_s = 1$ сек, а $S_s = 1$ см^2. Выразив отсюда отношение освещённостей

$$\frac{E_1}{E_s} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{\Delta t_s \cdot S_s}{\Delta t_1 \cdot S_1},$$

можно через формулу Погсона получить разность звёздных величин

$$m_1 - m_s = -2.5 \log\left(\frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{\Delta t_s \cdot S_s}{\Delta t_1 \cdot S_1}\right).$$

Подставим значения:

$$m_1 = 0^m - 2.5 \log\left(\frac{7960}{10^6} \cdot \frac{1 \text{ сек} \cdot 1 \text{ см}^2}{10 \text{ сек} \cdot \pi \cdot (20/2)^2 \text{ см}^2}\right) = 14^m$$

Наконец, определим фон неба – звёздную величину квадратной секунды неба.

Угловой размер одного пикселя составляет

$$\gamma = \frac{x}{F} = \frac{4.2 \cdot 10^{-6} \text{ м}}{2 \text{ м}} = 2.1 \cdot 10^{-6} \text{ рад} = 0.43''$$

Нам дано по условию, что 60% отсчетов в пикселях фона – это тепловые шумы и шумы считывания, не связанные с фотонами, поступающими из внешнего пространства в оптическую систему. Значит, оставшиеся 40% отсчётов – это и есть отсчёты от фотонов, рассеянных атмосферой Земли, которые и создают фон неба. Значит, в каждый пиксель поступает 40 отсчётов от фона неба. А число таких фотонов, полученных оптической системой, равно

$$N_2 = \frac{40}{0.86 \cdot 0.9} \approx 52 \text{ фотона на пиксель}$$

Аналогично рассуждениям выше, определим звездную величину, которую создают фотоны фона, попавшие в один пиксель:

$$m_f = 19.5^m$$

Теперь эту величину надо привести к угловой площади неба в 1 квадратную секунду. Одна сторона пикселя имеет угловой размер $0.43''$. Значит, его угловая площадь – $0.18\ \square''$. Угловая площадь участка неба, фотоны которого попадают на этот пиксель, будет ровно такая же. Следовательно, поверхностная звёздная величина фона будет равна

$$m_{\square''} = m_f + 2.5\lg S = 17.7^m/\square''$$

Критерии оценивания. **15**

К1. Определение разрешающей способности объектива **1**

К2. Определение разрешающей способности телескопа с учетом атмосферы **2**

Если используется модель с выбором большей разрешающей способности 1

К3. Определение линейного масштаба «пятна» звезды **1**

К4. Определение величины одного пикселя **1**

К5. Определение общего числа фотонов от звезды без фона **2**

Число фотонов в 9 пикселях 1

Определение средней величины фона неба, вычет фона неба 1

К6. Определение звёздной величины звезды **4**

Учет потерь в приёмнике и оптической системе 1

Запись зависимости числа фотонов 1

Получение выражения для звёздной величины 1

Итоговый численный ответ с точностью 0.2^m 1

К7. Определение звёздной величины фона неба **4**

Определение числа фотонов фона на пиксель 2

Определение угловой площади участка на небе, соответствующего 1-му пикселю . 1

Итоговый численный ответ с точностью 0.2^m 1

10.4. Полярный спутник

В. Игнатьев, А. Ребриков

Спутник пролетает через зенит для наблюдателя на Северном полюсе Земли, причём скорость спутника в этот момент перпендикулярна направлению от наблюдателя. Высота орбиты спутника составляет половину радиуса Земли, а величина скорости совпадает с первой космической скоростью на поверхности Земли. Определите азимут, в направлении которого будет двигаться спутник после прохождения зенита для наблюдателя на экваторе.

Решение.

В первую очередь отметим, что расстояние от центра Земли до спутника

$$r = R_\oplus + \frac{1}{2}R_\oplus = \frac{3}{2}R_\oplus.$$

Посчитаем первую космическую скорость Земли:

$$v_I = \sqrt{\frac{GM}{R_\oplus}} = 7.9\,\text{км/с}.$$

Когда спутник будет наблюдаться в зените на экваторе, он будет в 90 градусах от текущего положения. Сейчас его скорость перпендикулярна направлению на центр Земли, то есть он точно находится на линии апсид (перицентр и апоцентр), следовательно, он будет находиться в фокальном параметре.

Восстановим параметры орбиты спутника. Запишем интеграл энергии

$$v_0^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{GM}{R_\oplus}\left(2\frac{R_\oplus}{r} - \frac{R_\oplus}{a}\right).$$

Выделим слева и справа квадрат первой космической скорости:

$$v_I^2 = v_I^2\left(2\frac{R_\oplus}{r} - \frac{R_\oplus}{a}\right) \implies 1 = \frac{4}{3} - \frac{R_\oplus}{a} \implies a = 3R_\oplus.$$

Текущее расстояние меньше большой полуоси, значит, мы находимся в перицентре:

$$\frac{3}{2}R_\oplus = q = a(1-e) = 3R_\oplus(1-e) \implies 1 - e = \frac{1}{2} \implies e = 0.5.$$

Теперь найдём фокальный параметр

$$p = a(1-e^2) = a\frac{3}{4} = \frac{9}{4}R_\oplus$$

В момент, когда спутник будет пролетать в зените для наблюдателя на экваторе, на наблюдаемое с Земли направление движения спутника будет влиять только трансверсальная составляющая. Найдём её из закона сохранения момента импульса

$$v_0 q = v_\tau p \implies v_\tau = v_0\frac{q}{p} = \frac{2}{3}v_I = 5.3\,\text{км/с}.$$

Вообще, не проводя никаких вычислений, можно сказать, что пролетая над экватором спутник будет лететь примерно на юг, то есть на азимут примерно равный нулю. Однако, он в точности не равен нулю, ведь сам наблюдатель двигается.

Относительная скорость складывается из двух ортогональных компонент — скорость спутника и скорость наблюдателя. Можно посчитать верное решение разными способами. Один из вариантов — посчитать отдельно угловую скорость спутника на фоне далёких звёзд и угловую скорость зенита. Угловая скорость относительно далёких звёзд будет делиться на две компоненты — по направлению на юг и на запад. Посчитаем по определению, как разность трансверсальных скоростей (скорость обращения на экваторе есть $\omega_\oplus R_\oplus = 0.46\,\text{км/с} \neq v_I$ и направлена на восток). Также учтём, что для определения скорости относительно зенита, а не далёких звезд, нужно будет вычесть угловую скорость зенита, которая направлена на восток (действительно, ведь звёзды относительно зенита двигаются на запад, к заходу, следовательно зенит относительно звёзд в противоположную сторону, на восток). Заметим, что скорость спутника относительно зенита и скорость зенита относительно звёзд — обе направлены на запад (ведь мы беря относительную скорость вычитаем, тем самым меняем направление). Будем считать положительным направление на юг и на запад соответственно, тогда

$$\omega_{\text{юг}} = \frac{v_\tau}{p - R_\oplus} \quad \omega_{\text{запад}} = \frac{\omega_\oplus R_\oplus}{p - R_\oplus} + \omega_\oplus = \frac{\omega_\oplus R_\oplus + (p - R_\oplus)\omega_\oplus}{p - R_\oplus} = \frac{\omega_\oplus p}{p - R_\oplus}.$$

Как видно из этих формул, сами угловые скорости зависят от расстояния от наблюдателя до спутника, но вот их отношение — не зависит, и равно

$$\frac{\omega_{\text{запад}}}{\omega_{\text{юг}}} = \frac{\frac{\omega_\oplus p}{p - R_\oplus}}{\frac{v_\tau}{p - R_\oplus}} = \frac{\omega_\oplus p}{v_\tau} = \frac{\omega_\oplus}{v_\tau / p}.$$

Из-за чего направление движения спутника отклоняется на угол θ

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\omega_{\text{запад}}}{\omega_{\text{юг}}} = \frac{\omega_\oplus p}{v_\tau} = \frac{\frac{9}{4}\omega_\oplus R_\oplus}{\frac{2}{3}v_I} = \frac{27}{8}\frac{0.46\,\text{км/с}}{7.9\,\text{км/с}} \approx 0.19 \implies \theta \approx 11°.$$

Скорость повернута к западу, то есть спутник будет лететь в направлении азимута $\boxed{11°}$

Можно поступить иначе. Воспользуемся понятием переносной скорости: посчитаем трансверсальную скорость спутника в вращающейся системе отсчёта, связанной с наблюдателем, или, что в таком случае эквивалентно, в вращающейся системе отсчёта, связанной с центром Земли (действительно, в такой системе наблюдатель неподвижен). Переносной скоростью будет угловая скорость вращения Земли помноженная на расстояние от центра Земли до спутника:

$$u = p \cdot \omega_\oplus = 1.04\,\text{км/с}.$$

Из-за чего направление движения спутника отклоняется на угол θ

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u}{v_\tau} = \frac{p \cdot \omega_\oplus}{v_\tau} \implies \theta \approx 11°.$$

Направление спутника поворачивается против движения наблюдателя, в ту же сторону, что и далёкие звёзды. Как можно заметить, получилось абсолютно такая же формула и такой же ответ.

Учащийся может неверно перейти из одной системы отчета в другую, забыв, что система вращающаяся. Тогда у него должно получится следующее решение:

Скорость наблюдателя

$$u = \frac{2\pi R_\oplus}{\text{сутки}} = 0.46\,\text{км/с}.$$

Из-за чего направление движения спутника отклоняется на угол θ

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{u}{v_\tau} \implies \theta \approx 5^\circ.$$

Направление спутника поворачивается против движения наблюдателя, в ту же сторону, что и далёкие звёзды. То есть, к западу, то есть спутник будет лететь в направлении азимута 5°.

Иначе можно трактовать, что в таком решении не учитывается скорость движения зенита относительно далёких звёзд. Такое решение оценивается частичным баллом.

Критерии оценивания. **15**

К1. Параметры орбиты **4**
- Строгое обоснование, что точка над полюсом является перицентром орбиты 1
- Выражение для первой космической скорости 1
- Выражение для эксцентриситета орбиты 2

К2. Скорость в исследуемой точке **4**
- Вывод, что точка над экватором является фокальным параметром орбиты 1
- Выражение для фокального параметра 1
- Выражение для трансверсальной скорости 2

К3. Вычисление азимута **7**
- Переход во вращающуюся систему отсчёта 1
- Вычисление компонент относительной трансверсальной скорости 3
- Направление отсчёта азимута, иначе говоря, указание, что азимут $\in [0, 90^\circ]$ 1
- Формула для азимута 1
- Ответ 1

Комментарии к системе оценивания. При решении без учёта движения точки отсчёта азимута (без грамотного перехода во вращающуюся систему отсчёта) оценка за **К3** не превышает 2 баллов.

10.5. Давайте продлим вечер

А. Автаева

В будущем «совы» настояли на своем и решили продлить световой день, чтобы вечером еще было светло. Они отправили в одну из точек на орбите Земли, отстоящую от Земли на 60°, плоское овальное зеркало так, чтобы отраженное в нем Солнце целиком могло быть видно с Земли.

A. Нарисуйте схематично расположение зеркала относительно Земли и Солнца.

B. Под каким углом к поверхности зеркала на него падают солнечные лучи?

C. Определите минимальные размеры зеркала – посчитайте его наименьшие возможные большую и малую полуоси.

D. Оцените, в какой момент по местному времени на экваторе Земли происходит закат зеркального Солнца.

E. Найдите видимую звёздную величину зеркального Солнца.

F. Определите, сколько будет длиться полная фаза центрального затмения зеркального Солнца Луной (промежуток времени, в течение которого зеркального Солнца не будет видно).

G. Допустим, в каком-то месяце случилось кольцевое солнечное затмение. Какова вероятность, что в этом же месяце будет затмение зеркального Солнца? Свой ответ поясните.

Считайте орбиты Земли и Луны круговыми, пренебрегите потерями света при отражении от зеркала.

Решение.

Пункт 1.

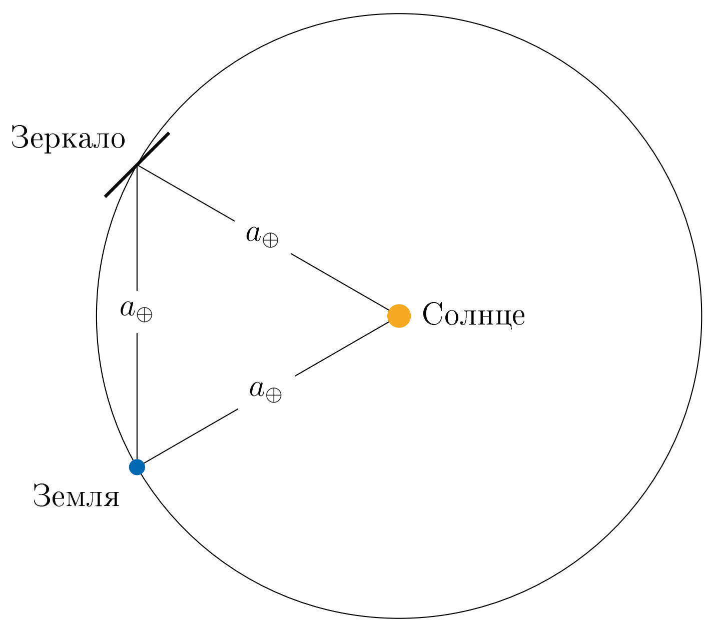


Рис. 1: Взгляд на систему Земля – Солнце с северного полюса.

Пункт 2. Треугольник Земля – Зеркало – Солнце равносторонний. Зеркало прямое, и через него видно отражение Солнца, значит, угол падения будет равен углу отражения. Следовательно, угол между поверхностью и лучом равен 60°.

Пункт 3. Зеркало представляет собой эллипс (овал, рисунок 2), расположенный под углом к наблюдателю. Значит: D – большая ось зеркала, d – малая ось зеркала.

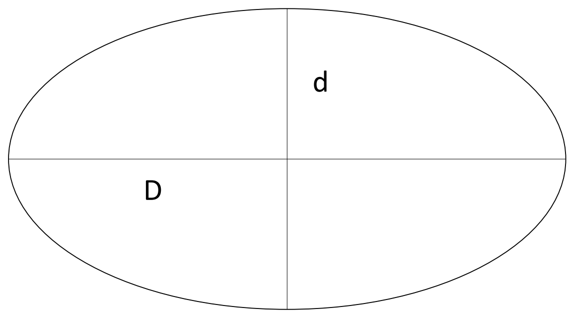


Рис. 2: Форма зеркала.

Наблюдатель видит зеркало круглым. См. рис. 3 и 4. Для того чтобы в зеркало помещалось все Солнце, но и линейные размеры были минимальны, угловой размер зеркала должен соответствовать угловому размеру изображения Солнца.

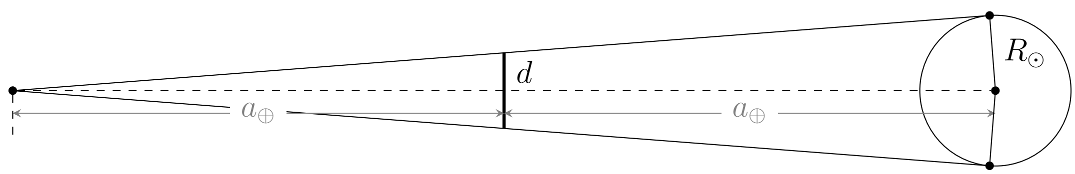


Рис. 3: Вид из плоскости эклиптики на систему Земля – зеркало – изображение Солнца.

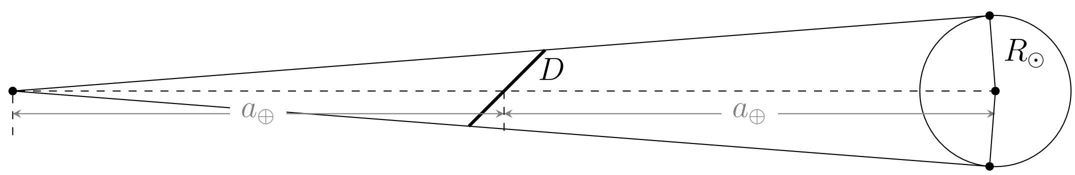


Рис. 4: Вид из полюса эклиптики на систему Земля – зеркало – изображение Солнца.

Изображение Солнца находится на расстоянии 2 а.е., так как солнечным лучам требуется пройти путь от Солнца до Зеркала и потом после отражения до Земли.

$$\frac{d}{1\ \text{а.е.}} = \frac{2R_\odot}{2\ \text{а.е.}} \Rightarrow d = R_\odot = 697000\ \text{км}$$

$$D = \frac{d}{\sin(60^\circ)} = 805000\ \text{км}$$

Решение представлено для случая наблюдения из конкретной точки на Земле (или при пренебрежении размером Земли). Для того, чтобы Солнце можно было наблюдать одновременно из любой точки на Земле, малая ось зеркала увеличивается примерно на величину диаметра Земли. Аналогично, большая полуось увеличивается согласно приведённой выше формуле.

Пункт 4. Зеркальное Солнце отстает от реального на 60° по эклиптике. Поэтому в первом приближении (так как требуется только оценка) можно сказать, что зеркальное Солнце движется но небу со скоростью, равной скорости Солнца, то есть 15°/час. На экваторе в любое время года заход Солнца происходит в 18 : 00 по местному солнечному времени, движение происходит в плоскости, перпендикулярной плоскости горизонта. Значит, Зеркальное Солнце заходит позже реального на 4 часа, в 22 : 00.

В реальности из-за наклона плоскости эклиптики к плоскости экватора время захода изменяется в пределах 22 : 00 ± 17 минут.

Пункт 5. Заметим, что зеркало изменяет только направление движения солнечных лучей, не меняя их характеристик. Поэтому, так как в зеркало видно полное изображение Солнца, можно считать, что вместо зеркала в том направлении на расстоянии 2 а.е. находится реальное Солнце.

$$I_{Img} = \frac{L_{\odot}}{4\pi(2a_{\oplus})^2}$$

$$m_{Img} - m_{\odot} = 2.5\log\frac{I_{\odot}}{I_{Img}}$$

$$m_{Img} = m_{\odot} + 2.5\log\frac{L_{\odot}\times 4\pi(2a_{\oplus})^2}{4\pi a_{\oplus}^2 L_{\odot}} = m_{\odot} + 2.5\log 4 = -25,24^m$$

Пункт 6. Первый вопрос. Затмение центральное, значит, относительно Луны зеркальное Солнце пройдет по диаметру Луны. Полная фаза затмения будет от положения 2 до положения 3, см. .

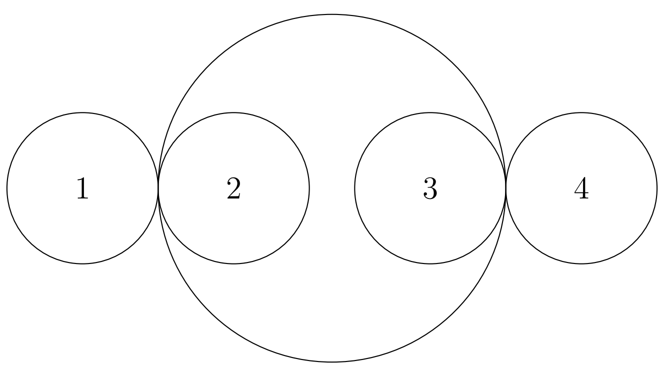


Рис. 5: Взаимное положение Луны и зеркального Солнца во время затмения.

Продолжительность полной фазы затмения отличается для наблюдателей, находящихся в разных точках земного шара. Для случая, когда наблюдатель находится на полюсе Земли, что также соответствует наблюдению из центра Земли, реализуется следующая ситуация:

Угловой размер зеркального Солнца в два раза меньше углового размера Луны. Угловое движение зеркального Солнца относительно звёзд равно $\omega_{\odot} = \frac{360°}{365.25 \text{ дней}} = 0.04°$/час, а $\omega_{☾} =$

$\frac{360°}{27.3\text{ дней}} = 0.55°/\text{час}$. Движение зеркального Солнца относительно Луны $\omega = \omega_{☾} - \omega_{\odot} = 0.51°/\text{час}$. Угловое растояние, которое должно пройти зеркальное Солнце относительно Луны, равно разности углового диаметра Луны и углового диаметра зеркального Солнца. Следовательно, продолжительность полной фазы затмения:

$$t = \frac{2\rho_{\text{Луны}} - 2\rho_{Sun}}{\omega} = 31\text{ мин.}$$

Это оценка дает минимальное время полной фазы центрального затмения.

Если наблюдатель находится в любой другой точке земного шара, требуется учесть угловую скорость Земли в данной точке. Максимальное значение для продолжительности такого затмения реализуется в случае, если наблюдатель находится на экваторе, а затмение происходит в зените.

Мгновенная угловая скорость Луны относительно зеркального Солнца уже будет отличаться от средней угловой скорости Луны:

$$\omega_{☾} = \frac{V_{☾} - V_{\text{пов}}}{d_{☾\oplus} - R_{\oplus}} = 360° \cdot \left(\frac{60R_{\oplus}}{29.5\text{сут}} - \frac{1R_{\oplus}}{1\text{сут}}\right)/(59R_{\oplus}) = 0.26°/\text{час}$$

Следовательно, продолжительность полной фазы затмения:

$$t = \frac{2\rho_{\text{Луны}} - 2\rho_{Sun}}{\omega} = 62\text{ мин.}$$

Пункт 7. Так как наклон орбит никто не убирал, два затмения в один месяц случиться не могут, так как у Луны только два узла орбиты – две точки, в которых пересекаются плоскости орбиты Луны и эклиптики, и эти узлы находятся в диаметрально противоположных точках орбиты. Зеркальное Солнце отстоит от реального на 60° по эклиптике, если узел находится в направлении на реальное Солнце, то передвинуться на 60° за месяц он не успеет.

Критерии оценивания. **15**

К1. Правильное расположение зеркала относительно Земли и Солнца **1**

Если рисунок сделан зеркально симметрично без явного указания, что вид с Юга – 0 баллов

К2. Угол к поверхности **1**

Любой другой угол, даже если правильно – 0

К3. Определены минимальные линейные параметры зеркала **3**

Указание на то, что зеркало – это эллипс, а с Земли выглядит как круг 1

Малая полуось эллипса 1

Большая полуось эллипса 1

К4. Определение момента захода Солнца как 22 часа **2**

К5. Определение видимой звёздной величины **3**

Утверждение, что зеркало меняет только направление лучей 1

Правильная формула 1

Правильное численное значение $-25.24^m \pm 0.25^m$ 1

К6. Определение длительности полного затмения **4**

Условие задачи позволяет выбрать несколько моделей решений. Например, наблюдатель находится на полюсе или в центре Земли. В этом случае участнику не нужно учитывать вращение Земли вокруг своей оси. Возможно, участник разместил наблюдателя на экваторе. В этом случае, необходимо учесть вращение Земли.

Решения, в которых участники искали длительность затмения во всей полосе полного затмения, оценивается максимум в 1 балл

Описана модель, используемая для расчета 1

Определение пути, пройденого Луной относительно Солнца 1

Относительная скорость 1

Получение численного ответа с точностью ± 3 мин с учетом выбранной модели . . . 1

К7. Обоснование ответа на последний вопрос задачи **1**

10.6. Сага о затмениях

В. Б. Игнатьев

Определите возможные значения временного интервала между двумя последовательными солнечными затмениями. Для каждого возможного значения интервала оцените вероятность того, что следующее затмение наступит именно через такой интервал. Считайте эксцентриситет лунной орбиты бесконечно малым. Эксцентриситетом земной орбиты пренебречь.

Решение.

Для наступления солнечных затмений должно выполнится два условия:

A. Луна должна находится в новолунии

B. Эклиптическая широта Луны $|\beta| \le \beta_{cr}$

$$\beta_{cr} = \rho_{\odot} + \rho_{☾} + p_{☾} - p_{\odot} = 88'42''$$

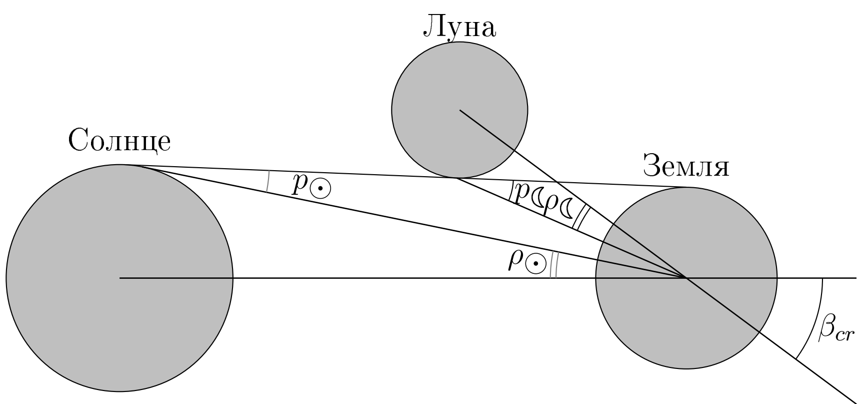


Рис. 6: Условия наступления частного солнечного затмения

В общем случае, последующее затмение может произойти через синодический период Луны или отрезок времени, кратный синодическому периоду. Не обязательно, что после какого-либо солнечного затмения последующее затмение произойдет ровно через один синодический период. Это зависит от второго условия наступления затмения. От того, где именно относительно узла находится Луна в момент исходного затмения, будет зависить положение Луны в момент последующего затмения.

Выпишем из справочных данных значение синодического периода Луны S и драконического периода Луны T_D:

$$S = 29.5306 \text{ суток} \qquad T_D = 27.2122 \text{ суток}$$

Максимальное удаление Луны от узла для наступления частного затмения

$$\sin l_{cr} = \frac{\sin \beta_{cr}}{\sin i} = \frac{\sin 88'42''}{\sin 5°09'} \qquad l_{cr} = 16.7°$$

Следовательно, полная длина диапазона L возможных значений положения Луны относительно узла составляет

$$L = 2 \cdot l_{cr} = 33.4°$$

Рассмотрим эту задачу для случая наступления солнечного затмения через **один синодический период**.

Определим область допустимых значений l нахождения Луны относительно узла, чтобы через синодический период снова было солнечное затмение.

За один синодический период Луна сместиться относительно узла на расстояние Δl_1

$$\Delta t_1 = S - T_D = 2.3184 \text{ суток}$$

$$\Delta l_1 = w_D \cdot \Delta t_1 = 30.67^\circ$$

Проинтерпретируем полученный результат. Если, первоначальное затмение было полным и Луна была в узле своей орбиты, то через синодический период Луна сместиться от узла более чем на 30° и затмения не будет. Но если Луна находится в самом начале интервала возможных расстояний от узла l, то возможна ситуация, что строго через один синодический период снова будет затмение, но уже в конце указаного диапазона

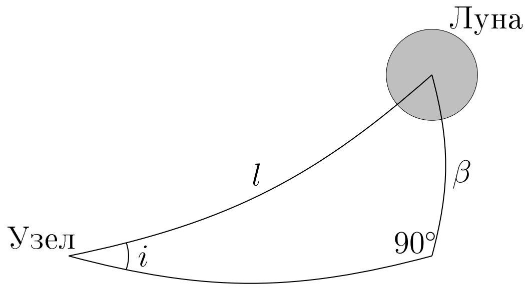


Рис. 7: Для определения величины l

Проанализировав изменение положения Луны за один синодический период мы пришли к выводу, что последующее затмение будет возможно, только если Луна изначально находилась в определенной области возможных положений.

$$x = L - \Delta l_1 = 33.40^\circ - 30.67^\circ = 2.73^\circ$$

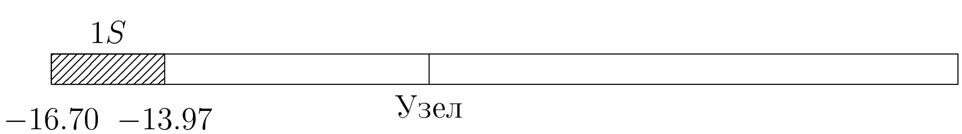


Рис. 8: Случай одного синодического периода. Заштрихованная область – это область, в которой должна находится Луна при первом затмении, что через один синодический период также было затмение.

Поскольку, изначальное положение Луны может быть случайным, то есть любым, то отношение длин(величин) диапазонов и будет давать вероятность распределения периодов последующих затмений.

Отсюда уже видна механика решения. Проанализуем периоды времени, кратные синодическому периоду до того момента, пока у нас не заполниться вся первоначальная область допустимых значений величины l.

Два синодический периода. Смещение относительно узла составить $\Delta l_2 = 2 \cdot \Delta l_1 = 2 \cdot 30.67° = 61.34°$. При таком смещении Луны от узла никакого затмения не будет.

Также произойдет с тремя и четыремя синодическими периодами. А вот при интервале времени в **пять синодических периодов** Луна окажется вблизи противоположного узла. Посчитаем этот случай.

Смещение составляет $\Delta l_5 = 5 \cdot \Delta l_1 = 153.35°$.

Предположим, что изначальное затмение произошло в самой далекой точки от узла, уже после его прохождения. Тогда после пяти синодических периодов

$$l_{max5} = 16.70° + 153.35° = 170.05°$$

То есть, Луна оказалась внутри области, где возможны солнечные затмения. Поскольку нас интересует возможные значения величины l исходного затмения, то нас устраивает диапазон

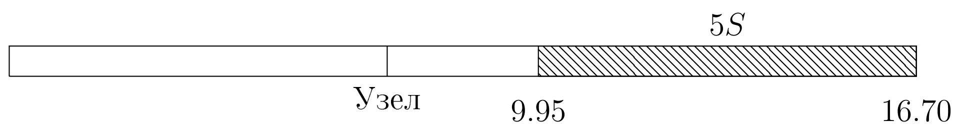


Рис. 9: Случай пяти синодических периодов. Заштрихованная область – это область, в которой должна находится Луна при первом затмении, что через пять синодический период также было затмение.

При **шести синодических периодах** смещение Луны составит $\Delta l_6 = 184.02°$. То есть Луна также будет у противоположного узла своей орбиты.

В этом случае нас устроит диапазон

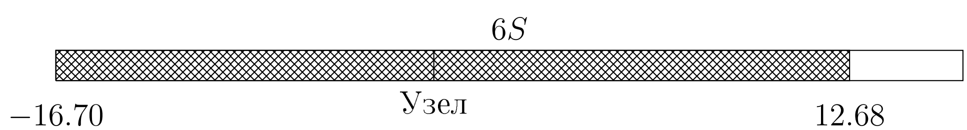


Рис. 10: Случай шести синодических периодов. Заштрихованная область – это область, в которой должна находится Луна при первом затмении, что через щесть синодический период также было затмение.

Обратите внимание, что диапазон для 1 и 6 синодических периодов пересекаются. Но, в условии задачи спрашивают про наступление последующего затмения. И если при изначальном затмении Луна была в области, где возможно наступление затмения через 1 и 6 синодических периодов, то последующее затмение – это затмение через 1 периодов.

Итоговый результат

Период	Вероятность
1S	8.2%
5S	20.3%
6S	71.5%

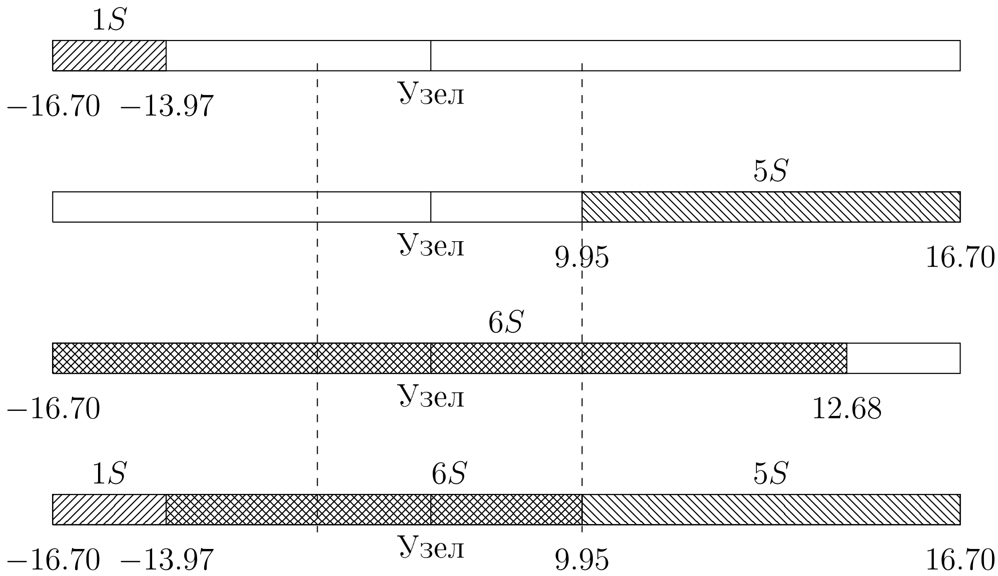


Рис. 11: Итоговое распределение

Сравним с расчетами последних 11 897 солнечных затмений.

Период	число затмений	Процент
1S	1 361	11.4%
5S	2 743	23.1%
6S	7 793	65.5%

Небольшие расхождения, которые мы видим, определяются эксцентриситетом лунной орбиты и не постоянной угловой скоростью. А также вековыми изменения параметров орбиты Луны.

Критерии оценивания. **15**

K1. Условие наступления солнечных затмений **2**
- Указано новолуние 1
- Указано условие на β 1

K2. Значения временных интервалов между последующими затмениями **4**
- для случая одного синодического периода 2
- для случая пяти синодического периода 1
- для случая шести синодического периода 1
- Указаны иные ответы . . . . . −1

За каждый не верный интервал оценка по данному критерию снижается на 1 балл. Общая оценка за критерий не может быть отрицательной.

K3. Определение допустимых значений l **6**
- для случая одного синодического периода 2
- для случая пяти синодического периода 2
- для случая шести синодического периода 2

K4. Определение вероятностей наступления каждого случая **3**
- Если не учтены области пересечения 1 и 6 синодического периода 1

Теоретический тур

Условия, решения и схема оценивания. 11 класс

Содержание

11.1. Пульсометр

П.А. Тараканов

Считая, что изменение блеска классических цефеид полностью обусловлено радиальными пульсациями, а эффективная температура цефеиды при этом остается постоянной, найдите, как средняя абсолютная звездная величина цефеиды M в некоторой фотометрической полосе зависит от периода ее пульсаций P, выраженного в сутках. Известно, что для периода, равного 20 суткам, средняя абсолютная звездная величина в той же полосе равна $M_0 = -6^m.0$.

Решение.

Поскольку звезды находятся в устойчивом гидростатическом равновесии, попытка вывести их из него приводит к возврату в исходное состояние: если звезду сжать, она расширится, если расширить — сожмется. При отсутствии диссипации энергии звезда будет сколь угодно долго колебаться около положения равновесия, и особенность цефеид (и других звезд, совершающих радиальные пульсации) в том, что в них есть механизм, компенсирующий диссипацию энергии в нужные моменты времени (превращающий тем самым звезду в автоколебательную систему). Оценим период таких колебаний, что можно сделать несколькими различными способами.

Пусть на поверхности звезды массы $\mathfrak{M}$ и радиуса R находится тонкий слой вещества массы m. Его движение вдоль радиуса r будет определяться уравнением

$$m\ddot{r} = -\frac{G\mathfrak{M}(r)m}{r^2},$$

где $\mathfrak{M}(r)$ — масса звезды, заключенная в пределах радиуса r.

Будем считать, что плотность звезды постоянна и равна ρ (что, конечно, неверно, но в интересующем нас случае важнее примерное постоянство плотности звезды у поверхности, а это в случае цефеид является вполне неплохим приближением). Перепишем уравнение движения с учетом этого и получим

$$\ddot{r} = -\frac{4\pi G\rho r^3}{3r^2} = -\frac{4\pi G\rho}{3}\cdot r$$

или

$$\ddot{r} + \frac{4\pi G\rho}{3}\cdot r = 0. \qquad (1)$$

Получившееся очень похоже на уравнение гармонического осциллятора $\ddot{r} + \omega^2 r = 0$, поэтому отсюда можно сделать вывод, что период колебаний

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} \propto \rho^{-1/2}. \qquad (2)$$

В принципе, уже на стадии записи уравнения движения можно заметить, что характерный период пульсаций должен совпасть с динамическим временем для звезды (и временем ее облета по низкой круговой орбите), после чего получить тот же результат.

Другой способ получения периода — метод размерностей. Поскольку колебания механические и температура, по условию, не меняется, сразу же можно сделать вывод, что период должен оказаться произведением G, $\mathfrak{M}$ и R в каких-то степенях, имеющим размерность времени. Пусть

$$[P] = [G]^\alpha \cdot [\mathfrak{M}]^\beta \cdot [R]^\gamma,$$

где квадратными скобками обозначена операция взятия размерности, а α, β, γ — некоторые неизвестные величины. Используя стандартные обозначения размерности длины, массы и времени L, M, T, получим, что

$$T^1 = \frac{L^{3\alpha}}{T^{2\alpha}\,M^\alpha} \cdot M^\beta \cdot L^\gamma,$$

откуда

$$\begin{cases} 3\alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha = 1 \end{cases}$$

и $\alpha = -1/2$, $\beta = -1/2$, $\gamma = 3/2$. Это означает, что $P \propto \mathfrak{M}^{-1/2} \cdot R^{3/2}$, что эквивалентно уже полученному нами выводу $P \propto \rho^{-1/2}$.

Теперь воспользуемся тем, что светимость звезды при постоянной эффективной температуре $\mathfrak{L} \propto R^2$. Нам надо связать между собой средние плотность и радиус цефеиды, для чего надо вспомнить, что светимости классических цефеид (средние) отличаются на порядки, а диапазон их возможных масс невелик. В рамках изотермической модели отсюда можно сделать вывод, что изменение средней плотности обусловлено только изменением среднего радиуса — проше говоря, считать массы цефеид примерно одинаковыми.

Тогда, поскольку при фиксированной массе звезды $R \propto \rho^{-1/3}$, а плотность связана с периодом как $\rho \propto P^{-2}$, получаем, что

$$\mathfrak{L} \propto R^2 \propto \rho^{-2/3} \propto P^{4/3} \quad \text{или} \quad \mathfrak{L} = \mathrm{const} \cdot P^{4/3}.$$

Абсолютная звездная величина определяется как

$$M = -2.5 \lg \mathfrak{L} + \mathrm{const}$$

(все обозначенные как const константы в общем случае разные, такое обозначение позволяет не вводить в решение множество постоянных величин, используемых ровно один раз), поэтому зависимость между абсолютной звездной величиной и периодом будет иметь вид

$$M = -2.5 \lg(\mathrm{const} \cdot P^{4/3}) + \mathrm{const} = -2.5 \cdot \frac{4}{3} \cdot \lg P + \mathrm{const} = -\frac{10}{3} \lg P + \mathrm{C}.$$

Последнюю «накопившуюся» константу мы обозначим C, поскольку ее значение, в отличие от предшествующих, нам надо найти. Сделать это можно, подставив в полученное выражение данные о цефеиде с 20-суточным периодом:

$$C = M_0 + \frac{10}{3} \lg P_0 = -6 + \frac{10}{3} \lg 20 \approx -1.7.$$

Теперь мы готовы записать окончательный ответ:

$$M = -3^m.3 \lg P - 1^m.7.$$

Заметим, что полученный результат верен для фотометрической полосы J (средняя длина волны $1.2\,\mu$м).

Критерии оценивания. **15**

К1. Получение зависимости период – плотность **7**
- Обоснование способа **4**
- Получение верной зависимости **3**

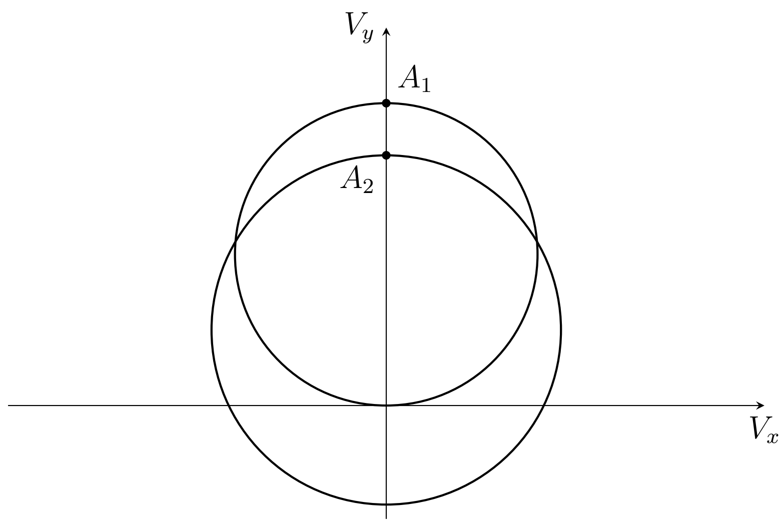
К2. Получение зависимости период – светимость **6**
- зависимость радиус – плотность **2**
- зависимость радиус – светимость **2**
- зависимость период – светимость **2**

К3. Верный численный ответ с разумной точностью **2**

11.2. Скоростное окружение

М.И.Волобуева

Годограф скорости некоторого малого тела Солнечной системы в декартовых гелиоцентрических координатах $(V_x; V_y)$ представляет собой окружность, касающуюся оси абсцисс в начале координат. В точке A_1, лежащей на оси ординат и не совпадающей с началом координат, тело абсолютно неупруго сталкивается с другим телом, двигавшимся по круговой орбите. Годограф скорости новой орбиты представляет собой окружность, радиус которой больше в $2/\sqrt{3}$ раз, а центр окружности и точка A_2, соответствующая моменту столкновения, также лежат на оси ординат между точками A_1 и началом координат.



Найдите эксцентриситеты орбит малого тела до и после столкновения, а также отношение массы первого тела к массе второго, если известно, что оба тела и до, и после столкновения двигались в плоскости эклиптики. Обратите внимание: рисунок сделан только для пояснения условия задачи, определять по нему количественные данные *нельзя*.

На всякий случай напомним, что годограф — геометрическое место точек, координаты которых равны компонентам некоторого переменного вектора (в частности вектора скорости).

Решение.

Годограф скорости начальной орбиты проходит через начало координат, то есть минимальная скорость на орбите равна нулю. Это соответствует параболической траектории. Таким образом, можно сразу ответить на вопрос об эксцентриситете начальной орбиты: $e_0 = 1$.

Новая орбита, очевидно, является эллиптической: годограф скорости для окружности ввиду постоянства модуля орбитальной скорости был бы окружностью с центром в начале координат, а годограф для гиперболической траектории представлял бы собой только *часть* окружности, так как гипербола заключена между своими асимптотами и вектор скорости не делает «полного разворота» на 360°.

Также отметим, что точки A_1 и A_2 являются максимально удаленными от начала координат точками соответствующих годографов, то есть соответствуют максимумам скорости. Таким образом, точка столкновения соответствует перигелию как для начальной, так и для новой орбиты. Кроме того, после столкновения скорость малого тела уменьшилась, но сохранила свое направление. Так как при неупругом столкновении суммарный импульс сохраняется, то это значит, что в момент столкновения скорости обоих тел были коллинеарны.

Определим, как изменилась скорость после столкновения. Для этого надо понять, как радиус годографа зависит от орбитальных параметров. В случае параболической траектории диаметр окружности годографа равен скорости в перигелии, то есть

$$R_0 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2GM_\odot}{d}} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{2d}}\,, \tag{3}$$

где d — расстояние от Солнца до точки столкновения.

Для эллиптической орбиты радиус годографа равен полусумме скоростей в афелии и перигелии:

$$R = \frac{V_a + V_p}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{GM_\odot}{a} \cdot \frac{1-e}{1+e}} + \sqrt{\frac{GM_\odot}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}} \right) = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a(1-e^2)}} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{d(1+e)}}\,. \tag{4}$$

Теперь из (3) и (4) можно найти эксцентриситет новой орбиты:

$$\frac{R}{R_0} = \sqrt{\frac{2}{1+e}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \qquad e = 0.5\,.$$

Осталось найти соотношение масс m_1/m_2. Второе тело до столкновения двигалось по круговой орбите со скоростью, равной $v = \sqrt{\frac{GM_\odot}{d}}$. Тогда скорость первого тела до столкновения была равна $v\sqrt{2}$, а после столкновения стала равной $v\sqrt{1+e} = v\sqrt{3/2}$.

Если скорости первого и второго тела до столкновения были сонаправлены, то из закона сохранения импульса имеем

$$m_1 v\sqrt{2} + m_2 v = (m_1 + m_2) v \sqrt{3/2}\,,$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{3/2} - 1}{\sqrt{2} - \sqrt{3/2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}} \approx 1.186\,.$$

Напротив, если столкновение произошло «в лоб», то

$$m_1 v\sqrt{2} - m_2 v = (m_1 + m_2) v \sqrt{3/2}\,,$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{3/2} + 1}{\sqrt{2} - \sqrt{3/2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}} \approx 11.742\,.$$

Итоговые ответы: начальный эксцентриситет $e_0 = 1$, итоговый эксцентриситет $e = 0.5$, отношение масс $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}}$.

Критерии оценивания. **15**

К1. Анализ начальной орбиты **2**
- Почему это парабола **1**
- Запись $e = 1$ в явном виде **1**

К2. Анализ конечной орбиты **7**
- Это эллипс **1**
- Радиус годографа через орбитальные параметры: обоснование **2**
- Радиус годографа через орбитальные параметры: результат **2**
- Ответ $e = 0.5$ **2**

К3. Соотношение масс **6**
- Закон сохранения импульса **1**
- Уравнение: выражение для скоростей **2**
- Уравнение: два случая **1**
- Ответ для m_1/m_2 . . . . . . **1+1**

11.3. Максимум света

П.А.Тараканов

Двойная звезда состоит из белого карлика с массой, равной 1.0 $\mathfrak{M}_\odot$, и звезды, покинувшей Главную последовательность, с массой 3.0 $\mathfrak{M}_\odot$ и эффективной температурой $T = 4.0 \cdot 10^3$ K. Известно, что орбитальный период системы равен 15 суткам, причем в ней отсутствует аккреция вещества на белый карлик со звезды-компаньона, орбиты компонент системы круговые. Оцените максимально возможную суммарную светимость такой двойной звезды, выразив ее в светимостях Солнца.

Решение.

Начнем с составления плана действий.

Аккреция в системе не идет, что означает, что большая по массе звезда (будем ее для определенности называть «основной») по размеру меньше своей полости Роша. Поскольку ее эффективная температура нам дана, это означает, что ее светимость определяется ее размерами, и максимальной она будет при достижении максимальных размеров — иначе говоря, нас интересует пограничный случай, когда звезда практически полностью занимает свою полость Роша. Поэтому нам надо найти большую полуось системы (это можно сделать, зная массы компонент и орбитальный период) и, зная массы компонент, найти характерные размеры полости Роша для основной компоненты. После этого мы сможем найти ее светимость и тем самым решить задачу, поскольку с имеющейся небольшой точностью исходных данных (в частности, эффективной температуры звезды) вкладом светимости белого карлика в общую светимость системы явно можно будет пренебречь.

Вычислим большую полуось системы a. Для этого воспользуемся III законом Кеплера

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}$$

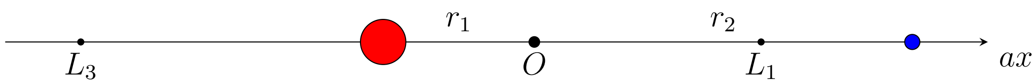
в системе единиц «астрономическая единица – масса Солнца – год» (в ней $G = 4\pi^2$). Тогда

$$a = \sqrt[3]{4 \cdot \left(\frac{15}{365}\right)^2} \approx 0.19 \text{ а.е.}$$

Теперь нам надо оценить размеры полости Роша основной звезды. Хорошо известное приближение для расчета положения первой точки Лагранжа тут, по-видимому, не годится: оно получено в предположении, что массы звезд существенно отличаются, что в нашем случае неверно. Поэтому попробуем решить задачу в общем виде.

Пусть радиусы орбит компонент с массами $\mathfrak{M}_1$ (основной компаньон) и $\mathfrak{M}_2$ вокруг общего центра масс равны r_1 и r_2 соответственно. Мы знаем, что $r_1 + r_2 = a$, а из условия, что это расстояния от центра масс, можем записать соотношение $\mathfrak{M}_1 r_1 = \mathfrak{M}_2 r_2$. Отсюда легко получить, что $r_1 = \frac{3}{4}\,a$ и $r_2 = \frac{1}{4}\,a$.

Ограничивающие полость Роша коллинеарные точки Лагранжа выделены тем, что для них суммарные ускорения, действующие на пробную частицу во вращающейся вместе с двумя основными телами системе отсчета, должны равняться нулю. Поэтому введем координату $a{\cdot}x$, задающую положение точки Лагранжа по отношению к центру масс, как на рисунке:



(тем самым величина x у нас станет безразмерной, выраженной в единицах большой полуоси) и запишем уравнение, задающее условие равенства суммарного ускорения нулю в точке L_1 (с координатой x_1):

$$-\frac{G\mathfrak{M}_1}{(r_1+ax_1)^2}+\frac{G\mathfrak{M}_2}{(r_2-ax_1)^2}+\omega^2 ax_1=0.$$

Угловая скорость вращения системы ω однозначно определяется орбитальным периодом, поэтому ее квадрат можно выразить как

$$\omega^2=\left(\frac{2\pi}{P}\right)^2=\frac{G(\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2)}{a^3}.$$

Подставив все, что мы уже знаем, в уравнение для суммарного ускорения, получим

$$-\frac{G\cdot 3\mathfrak{M}_2}{a^2\left(\frac{1}{4}+x_1\right)^2}+\frac{G\mathfrak{M}_2}{a^2\left(\frac{3}{4}-x_1\right)^2}+\frac{G\cdot 4\mathfrak{M}_2}{a^2}x_1=0$$

и обнаружим, что после сокращения всего, что можно, уравнение сводится к виду

$$-\frac{3}{\left(\frac{1}{4}+x_1\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{3}{4}-x_1\right)^2}+4x_1=0,$$

причем нас интересует его вещественный корень, удовлетворяющий условию $0<x_1<1$.

С одной стороны, это уравнение 5-й степени и решать его аналитически проблематично. С другой — нам нужна небольшая точность, так что найти ответ можно просто перебором по 0.1, а затем сгустив сетку перебора рядом с примерно найденным значением корня. Оно окажется равным $x_1\approx 0.36$.

Тем самым оценка на максимальный радиус основной звезды системы имеет вид $R=\left(\frac{1}{4}+0.36\right)a\approx 0.12$ а.е. Осталось вычислить ее светимость в светимостях Солнца, для чего мы воспользуемся стандартным соотношением

$$\frac{L}{L_\odot}=\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2\cdot\left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4\approx 1.5\cdot 10^2.$$

Поскольку светимости подавляющего большинства белых карликов меньше даже одной светимости Солнца, в суммарной светимости системы учитывать светимость белого карлика действительно нет никакого смысла. Крайне редко наблюдаются белые карлики с эффективными температурами до 10^5 K, однако малый радиус карлика приведет к тому, что даже в этом случае светимость не превысит единиц светимостей Солнца, что с имеющейся точностью исходных данных в итоговом ответе учитывать бесполезно.

Критерии оценивания. **15**

К1. Вывод о том, что характерные размеры основной компоненты порядка полости Роша **2**

К2. Вычисление большой полуоси системы через III закон Кеплера **2**

К3. Вывод о том, что известная формула для положения точки L_1 не верна в случае сравнимых масс компонент **1**

К4. Описание геометрии системы (текстом или рисунком) **1**

К5. Составление уравнения для нахождения положения точки L_1 и его верное приближенное решение с описанием способа решения **6**

- если используется та самая формула для положения точки L_1 . . . . **2**
- если учитывается только равенство гравитационных ускорений **2**
- если расстояние до L_1 оценивается как расстояние до центра масс **1**

К6. Вычисление светимости **2**

- избыточная точность **1**
- светимость не выражена в светимостях Солнца **1**

К7. Вклад белого карлика в общую светимость пренебрежимо мал (или корректный подсчет светимости карлика) **1**

11.4. Улетная задача

П.А.Тараканов

Как известно, среднее расстояние от Луны до Земли в среднем увеличивается на 4 см в год. Исходя из этого, оцените, на сколько увеличивается средняя продолжительность земных суток за один век.

Решение.

Как мы знаем, в общем случае в замкнутой системе сохраняется полный момент импульса. Полный момент импульса системы «Земля – Луна», которую с достаточной точностью можно считать замкнутой, состоит из трех компонент: момента импульса Луны, связанного с ее обращением вокруг Земли по орбите, момента импульса, связанного с вращением Земли вокруг своей оси, и момента импульса, связанного с вращением Луны вокруг своей оси. Сразу же можно заметить, что третий компонент крайне мал — масса Луны намного меньше массы Земли, вращается вокруг своей оси она существенно медленнее, так что для оценки им можно пренебречь. Тогда изменение момента, связанного с вращением Земли вокруг своей оси, должно равняться изменению орбитального момента Луны.

Заметим, что полная механическая энергия не сохраняется: механизм приливного торможения Земли «работает» за счет того, что перемещение приливных «горбов» не может происходить без диссипации энергии из-за вязкости (трения), что приводит к тому, что часть механической энергии системы переходит в тепловую. В принципе, воспользовавшись теоремой вириала, можно показать, что ровно половина потерянной Землей кинетической энергии вращения будет потрачена на увеличение потенциальной энергии системы «Земля–Луна» (проще говоря, на удаление Луны от Земли), а вторая половина — на нагрев Земли, но такой способ решения задачи, хотя и возможен, заведомо слишком сложен.

Запишем закон сохранения момента импульса, считая, что Луна движется вокруг Земли по круговой орбите с радиусом r (при движении по эллиптической орбите в задаче одного притягивающего центра орбитальный момент не меняется, так что мы тем самым ничего не испортим), а Земля имеет момент инерции, равный $I_\oplus = \varkappa M_\oplus R_\oplus^2$ (чему равен коэффициент $\varkappa$, обсудим чуть позже).

Полный момент импульса системы имеет вид:

$$J = \varkappa M_\oplus R_\oplus^2 \omega_\oplus + r M_☾ v_☾ = \text{const},$$

тут $\omega_\oplus$ — угловая скорость вращения Земли, а $v_☾$ — орбитальная скорость Луны, которую можно вычислить как $v_☾ = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r}}$. Тогда

$$J = \varkappa M_\oplus R_\oplus^2 \omega_\oplus + M_☾ \sqrt{GM_\oplus r}.$$

Так как суммарный момент — константа, увеличение одного из слагаемых должно полностью компенсироваться уменьшением другого. Для удобства вычислений найдем дифференциал обеих частей равенства. Поскольку суммарный момент — константа, то $dJ = 0$ и

$$\varkappa M_\oplus R_\oplus^2 d\omega_\oplus + \frac{M_☾}{2}\sqrt{\frac{GM_\oplus}{r}}\, dr = 0.$$

Это выражение связывает между собой малое изменение радиуса орбиты dr и малое изменение угловой скорости вращения Земли $d\omega_\oplus$.

Аналогичным образом выразим $d\omega_\oplus$ через изменение периода вращения Земли T. Поскольку $T \cdot \omega_\oplus = 2\pi$ (по окружности точка проходит именно столько радианов за период), дифференцируя, получаем $T d\omega_\oplus + \omega_\oplus dT = 0$, а отсюда следует, что

$$d\omega_\oplus = -\frac{dT}{T} \cdot \omega_\oplus = -\frac{2\pi dT}{T^2}.$$

Объединяя полученные результаты, запишем

$$\varkappa M_\oplus R_\oplus^2 \frac{2\pi dT}{T^2} = \frac{M_☾}{2} \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r}}\, dr$$

откуда

$$dT = \frac{T^2}{2\pi \varkappa M_\oplus R_\oplus^2} \cdot \frac{M_☾}{2} \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r}}\, dr.$$

В принципе, можно сразу подставлять сюда численные данные, но можно и немного упростить себе вычисления, преобразовав выражение к виду

$$dT = \frac{T}{\varkappa M_\oplus R_\oplus v_{\text{экв}}} \cdot \frac{M_☾}{2} \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r}}\, dr = \frac{T}{2\varkappa R_\oplus} \cdot \frac{M_☾}{M_\oplus} \cdot \frac{v_☾}{v_{\text{экв}}}\, dr,$$

где $v_{\text{экв}}$ — линейная скорость движения точек на экваторе Земли (из-за вращения Земли вокруг своей оси), а $v_☾$ — орбитальная скорость Луны.

Осталось определиться со значением коэффициента $\varkappa$. Если бы Земля была однородным шаром, то этот коэффициент равнялся бы $\frac{2}{5}$, но в реальности плотность Земли максимальна в ее центре и убывает к поверхности, что немного уменьшает результат. Весьма точная оценка — $\varkappa = 0.3$.

Теперь подставляем данные, учитывая, что нас интересует оценка (т.е. вполне хватит одной значащей цифры), орбитальная скорость Луны (примерно 1 км/с) в 2 раза больше линейной скорости точек на экваторе Земли, а отношение масс Земли и Луны равно $8 \cdot 10^1$. Нас интересует изменение продолжительности суток за 100 лет, поэтому $dr = 4$ м:

$$dT = \frac{8.6 \cdot 10^4 \text{ с}}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-1} \cdot 6.4 \cdot 10^6 \text{ м}} \cdot \frac{2}{8 \cdot 10^1} \cdot 4 \text{ м} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Это и есть ответ. Заметим, что он в точности совпадает с реальными данными о замедлении вращения Земли, получаемыми с помощью радиоастрометрических наблюдений.

Критерии оценивания. **15**

К1. Запись и использование закона сохранения момента импульса **5**
- Использование закона сохранения энергии **2**

К2. Момент инерции Земли **3**
- однородный шар (2/5) **2**
- другой коэффициент при правильной размерности **1**

К3. Учет или обоснованный неучет эллиптичности орбиты Луны **1**

К4. Вычисление $d\omega$ и dT (при правильных предыдущих действиях) **3**

К5. Вычисление ответа **3**
- результат с заведомо завышенной точностью (3 значащих цифры или более) **–1**
- правильный счет для неправильной модели, при условии получения правдоподобного ответа **2**
- правильный счет для неправильной модели с неправдоподобным ответом . **1**
- $dT < 0$ или порядка 1 секунды или более **0**

Нечто феерическое (потенциальная энергия Луны mgh, подсчет удаления по закону Хаббла и т.п.) — общие **0** баллов за задачу.

11.5. Элементарная задача

П.А.Тараканов

В спектрах звезд Вольфа-Райе обычно наблюдается серия линий поглощения с лабораторными длинами волн 4551 Å, 5411 Å, 10123 Å, возникающих при взаимодействии излучения с атомами некоторого химического элемента, находящимися в некотором конкретном состоянии. Определите элемент, являющийся источником этих линий, состояние атомов этого элемента, а также опишите состояния, в которые переходят атомы при поглощении излучения.

В спектре того же элемента в том же состоянии имеются и другие линии, длины волн которых заключены между двумя крайними длинами волн серии выше. Почему они в аналогичных условиях обычно не наблюдаются?

Решение.

Что известно про звезды Вольфа-Райе? Это либо массивные звезды на поздних стадиях эволюции с повышенным содержанием гелия, либо самые массивные звезды Главной последовательности, в спектрах которых также заметны линии гелия. Логично предположить, что именно гелию указанная в условии задачи серия и принадлежит.

В каком состоянии он там может находиться? Эффективные температуры звезд Вольфа-Райе очень высоки, минимальная граница соответствует примерно $3 \cdot 10^4$ K, и это означает, что обнаружение там неионизованного гелия (HeI) маловероятно (тут полезно вспомнить, что звезды из основной «полосы нестабильности» на диаграмме Герцшпрунга-Рассела пульсируют в конечном счете из-за того, что температуры их фотосфер близки к характерной температуре ионизации гелия, а это заметно более холодные звезды (например, классические цефеиды — желтые гиганты). Полная ионизация (HeIII) исключена: образование линий требует наличия переходов электронов в атомах между уровнями, если все электроны оторваны от ядер, то и переходить будет нечему.

Тем самым наиболее подходящий кандидат — однократно ионизованный гелий (HeII). Убедимся, что наше предположение правильно. Вспомним, что для водородоподобных атомов (у которых на внешней орбитали находится только один электрон, интересующий нас HeII к ним относится) справедлива формула Ридберга, позволяющая вычислить длины волн, соответствующих переходам электронов с i-ого на k-ый уровень в атоме, которую в наиболее удобном для нас сейчас виде можно записать как

$$\lambda_{ik} \approx \frac{912\ \text{Å}}{Z^2} \left| \frac{1}{i^2} - \frac{1}{k^2} \right|^{-1},$$

где Z — зарядовое число ядра (в случае HeII $Z = 2$).

Рассмотрим, наверное, более реалистичный для участника олимпиады случай: формула Ридберга для атома водорода известна, а вот конкретный вид зависимости от Z для случаев, отличных от $Z = 1$, участник не помнит. Тогда зависимость можно восстановить из следующих соображений.

Размер электронных орбиталей в атомах (в частности, размер первой боровской орбиты) и, как следствие, характерная энергия электрона на некоторой орбитали определяются принципом неопределенности Гейзенберга, утверждающего, что неопределенность некоторой компоненты импульса электрона Δp_x и неопределенность соответствующей координаты Δx не могут быть меньше некоторого порогового значения. Вспомнив, как устроена модель Бора, заметим, что это означает, что радиус орбитали r и соответствующий ей модуль импульса p должны быть связаны соотношением $r \cdot p = \text{const}$. Считая, что электрон летает по круговой орбите вокруг ядра с зарядом, пропорциональным Z, получаем, что его импульс пропорционален круговой скорости, а та, в свою очередь, пропорциональна $\sqrt{Z/r}$. Отсюда $r \cdot \sqrt{Z/r} = \text{const}$, а это означает, что $r \propto 1/Z$. Энергия электрона на данном уровне $E \propto Z/r \propto Z^2$. Это означает, что энергии всех уровней в атоме с зарядом ядра Z возрастут в Z^2 раз, а соответствующие переходам между уровнями длины волн, наоборот, уменьшатся в Z^2 раз, что уже отражено в выписанной выше формуле.

Осталось подобрать конкретные переходы. Для этого сначала вычислим (можно очень грубо) длины волн, соответствующие ионизации HeII с некоторого уровня:

$$\lambda_{i\infty} \approx 228\ \text{Å} \cdot i^2.$$

Важно заметить, что длина волны, соответствующая ионизации с уровня i, должна быть меньше всех длин линий, соответствующих переходам с уровня i на более высокие уровни k, поэтому надо найти максимальное i, для которого $\lambda_{i\infty}$ будет меньше всех известных нам длин волн серии. Решение соответствующих неравенств (или просто обычный перебор) показывают, что $i = 4$. Остается лишь убедиться (что проще всего также сделать перебором), что три данные в условии длины волны с хорошей точностью соответствуют $k \in \{5, 7, 9\}$ (в обратном порядке). Таким образом, серия соответствует однократно ионизованному гелию, который поглощает фотоны, в результате чего оставшийся у него единственный электрон переходит с 4-го на 5-й, 7-й или 9-й уровни.

Осталось дать ответ на последний вопрос задачи. Очевидно, что речь идет о переходах на 6-й и 8-й уровень, именно они «пропущены». Но если представить эти номера как $k = 2n$ и подставить их в формулу Ридберга для $i = 4$ (и $Z = 2$)

$$\lambda_{4k} \approx \frac{912\ \text{Å}}{4} \left| \frac{1}{(2 \cdot 2)^2} - \frac{1}{(2 \cdot n)^2} \right|^{-1} = 912\ \text{Å} \left| \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right|^{-1},$$

то можно заметить, что у нас получатся длины волн, соответствующие линиям бальмеровской серии водорода H_α и H_β. Таким образом, эти две линии попросту блендируются линиями водорода, что делает их наблюдение и отождествление куда более проблематичным, чем у их «соседей» по серии.

Напоследок заметим, что эта серия линий обычно носит название серии Пикеринга или Пикеринга-Фаулера, которые предполагали, что они являются водородными, но с «полуцелыми» номерами уровней. То, что это линии гелия, было показано Бором, и стало существенным аргументом в поддержку модели атома Бора.

Критерии оценивания. **15**

Здесь в подпунктах перечислены подкритерии, из которых складывается итоговая оценка по критерию.

K1. Вывод о том, что линии принадлежат HeII **4**
- понимание, что в звездах WR должны быть линии He **2**
- вывод, что это не HeI и HeIII **1**
- запись окончательного вывода **1**

K2. Указание на то, что можно использовать формулу Ридберга и её запись **6**
- водородоподобный атом ⇒ формула Ридберга **1**
- зависимость λ от номеров уровней **1**
- зависимость от Z (вывод/запись известного результата) **4**
  - Z^0 .... **0**
  - Z^{-1} **2**
  - $Z^n, n \neq \{-2, -1, 0\}$ **1**
  - Z^{-2} **4**

K3. Подбор нужных уровней **2**

K4. Ответ на последний вопрос **3**

11.6. Яффе в профиль

А.В.Веселова

В модели Яффе, описывающей сферически-симметричное распределение материи в галактике, масса, заключенная в пределах расстояния r от центра симметрии системы, зависит от этого расстояния как

$$M(r) = 4\pi\rho_0\, a^3 \cdot \frac{\frac{r}{a}}{1+\frac{r}{a}}\,.$$

Здесь ρ_0 — некоторая характерная плотность, a — масштабный параметр системы.

A. Получите формулу зависимости плотности материи в галактике от расстояния до центра симметрии системы $\rho(r)$.

B. Получите зависимость скорости на круговой орбите от расстояния $V_c(r)$. Как выглядит зависимость при $r \to +\infty$ и при $r \to 0$?

C. Представим, что в поле тяготения такой галактики в одной плоскости и в одном направлении по круговым орбитам движутся две звезды. Радиус орбиты первой равен $2a$, радиус орбиты второй — a. Чему равна максимальная наблюдаемая лучевая скорость второй звезды при наблюдении с первой?

Решение.

A. По условию внутри сферы с радиусом r заключена масса $M(r)$. Рассмотрим дополнительный слой толщиной dr. Его масса, с одной стороны, равна разности $dM = M(r+dr) - M(r)$, с другой стороны, она равна объему слоя, умноженному на характерную плотность: $4\pi r^2 dr \cdot \rho(r)$. Получаем равенство

$$dM = 4\pi r^2 dr \cdot \rho(r), \quad \frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r),$$

$$4\pi\rho_0 a^3 \cdot \frac{\frac{1}{a}\left(1+\frac{r}{a}\right) - \frac{r}{a^2}}{\left(1+\frac{r}{a}\right)^2} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad \rho(r) = \frac{\rho_0 a^2}{r^2\left(1+\frac{r}{a}\right)^2} = \frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(1+\frac{r}{a}\right)^2}\,.$$

Такое распределение плотности действительно соответствует модели Яффе и представляет собой частный случай распределения вида

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{a}\right)^\alpha \left(1+\frac{r}{a}\right)^{\beta-\alpha}}\,, \quad \alpha = 2,\ \beta = 4.$$

B. Распределение плотности сферически-симметричное. В таком случае орбиты свободно движущихся тел являются плоскими, что придает осмысленность рассмотрению круговых орбит. Далее, в сферически-симметричном распределении материи выполняется теорема Ньютона: если материальная точка находится на расстоянии r от центра системы, то она движется в поле тяготения массы, расположенной в сфере радиуса r; действие внешних слоев скомпенсировано. Тогда зависимость круговой скорости от расстояния задается соотношением

$$V_c(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0 a^2}{1+\frac{r}{a}}}\,.$$

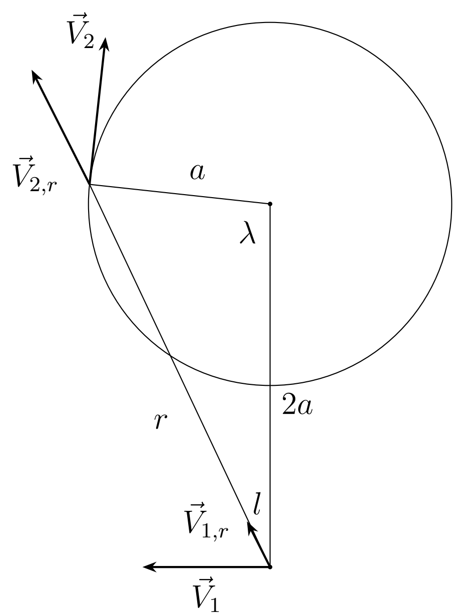
При $r \to 0$ второе слагаемое в знаменателе становится малым,

$$V_c(r) \approx \sqrt{4\pi G\rho_0 a^2} \cdot \left(1 - \frac{r}{2a}\right)$$

и величина скорости стремится к константе $V_c(0) = \sqrt{4\pi G\rho_0 a^2}$.

При $r \to +\infty$ в знаменателе можно пренебречь 1 по сравнению со вторым слагаемым, тогда $V_c(r) \to \sqrt{\dfrac{4\pi G\rho_0 a^3}{r}}$. Практически спадание происходит по кеплерову закону, поскольку полная масса при $r \to +\infty$ остается конечной.

C. Нарисуем схему движения звезд в плоскости их орбит. Наблюдаемая лучевая скорость равна разности лучевых скоростей наблюдаемой звезды и наблюдателя. Пусть l — угол для наблюдателя между направлением на наблюдаемый объект и на центр галактики, λ — угол с вершиной в центре галактики между направлениями на звезды.



Лучевая компонента скорости наблюдателя составляет $V_{1,r} = V_1 \sin l$, лучевая компонента скорости второй звезды равна $V_{2,r} = V_2 \cos(l + \lambda - 90^\circ) = V_2 \sin(l + \lambda)$. Теорема синусов для образованного звездами и центром системы треугольника приводит к равенству

$$\frac{\sin(180^\circ - \lambda - l)}{2a} = \frac{\sin l}{a} \quad \Rightarrow \quad \sin(l + \lambda) = 2\sin l.$$

В итоге наблюдаемая лучевая скорость составит

$$V_r = V_{2,r} - V_{1,r} = (2V_2 - V_1)\sin l.$$

Значения орбитальных скоростей зависят только от радиуса орбит. Следовательно, максимальное значение наблюдаемой скорости будет соответствовать максимальному значению $\sin l$, то есть касательному направлению луча зрения к орбите второй звезды. При этом $\sin l = \dfrac{a}{2a} = 0.5$.

Запишем выражения для круговой скорости на указанных радиусах орбит:

$$V_2 = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0 a^2}{1+\frac{a}{a}}} = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0 a^2}{2}}\,; \quad V_1 = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0 a^2}{1+\frac{2a}{a}}} = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0 a^2}{3}}\,.$$

Итоговое выражение для наблюдаемой лучевой скорости:

$$V_{r,\max} = V_2 - 0.5V_1 = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0 a^2}{2}} - 0.5\cdot\sqrt{\frac{4\pi G\rho_0 a^2}{3}} = \sqrt{4\pi G\rho_0 a^2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$

Критерии оценивания. **15**

К1. Определение зависимости плотности от расстояния ... **5**

- верная обоснованная связь между ΔM, ΔV, ρ ... **3**
- дифференцирование или использование малости приращения ... **1**
- обоснованное получение итоговой верной формулы для плотности ... **1**

Зависимость средней плотности от расстояния: за пункт выставляется не более 2 баллов.

К2. Скорости на круговой орбите ... **4**

- верная запись формулы для круговой скорости ... **1**
- верная асимптотика при $r \to 0$ ... **1**
- верная асимптотика при $r \to +\infty$ ... **2**
  - предел 0 без указания на спад $\sim 1/\sqrt{r}$ ... **1**

К3. Определение максимальной лучевой скорости ... **6**

- верные формулы круговых скоростей для обеих орбит ... **1**
- верные обоснованные формулы для проекций скоростей ... **1+1**
- обоснованное определение элонгации при $V_{r,\max}$ ... **2**
- получение и упрощение верного выражения для $V_{r,\max}$ ... **1**

Неучет скорости наблюдателя: не более 2 баллов.