



Заключительный этап

Условия, решения и схема оценивания. 9 класс

Содержание

9.7. Хранители полюса	2
9.8. Колечко-колечко.....	5
9.9. Променяли Солнце на Луну	8

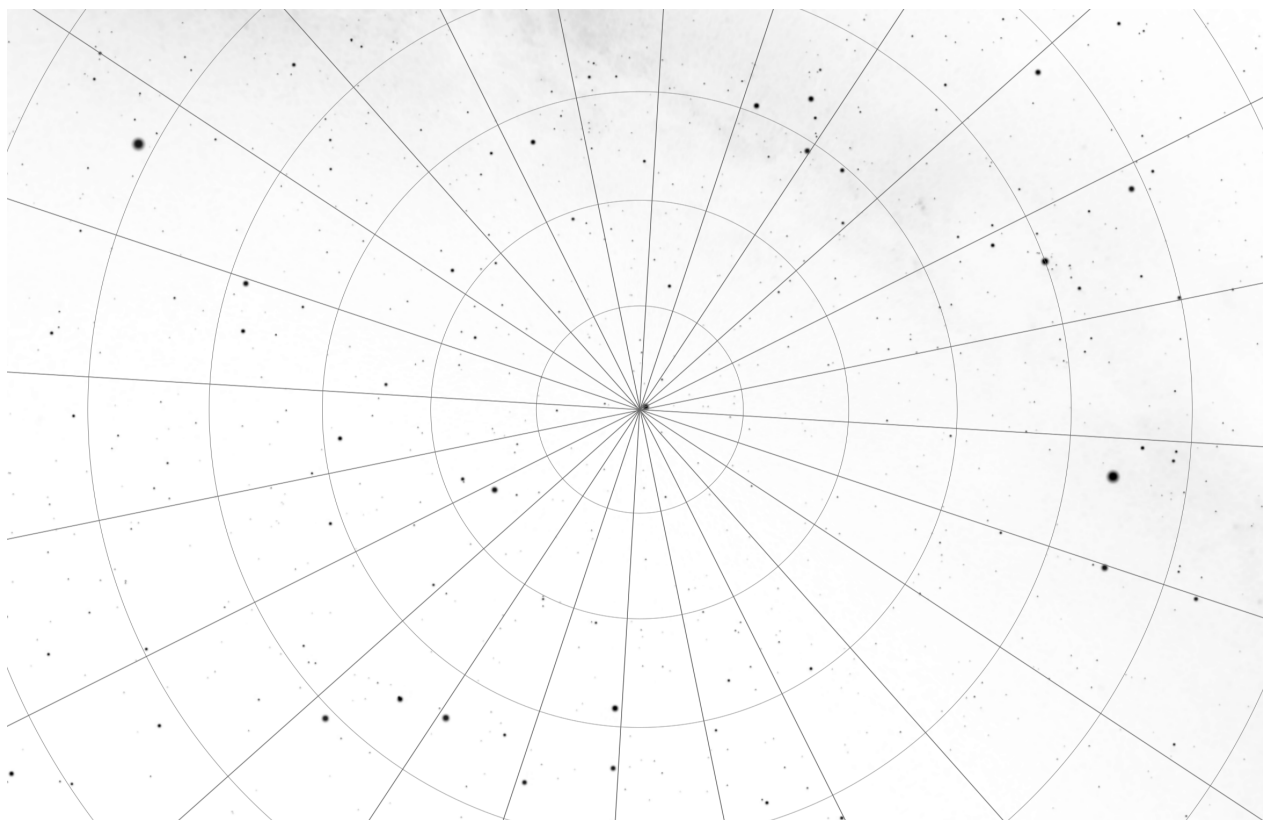
9.7. Хранители полюса

Е. Н. Фадеев

В древности звёзды γ и β Малой Медведицы (Феркад и Кохаб) указывали на Северный полюс мира, подобно тому как звёзды α и β Большой Медведицы указывают на полюс мира сейчас. Вам предоставлен фрагмент звёздной карты с нанесенными на неё линиями экваториальной системы координат. Суточные параллели нарисованы через каждые 10° , круги склонений — через 1^h .

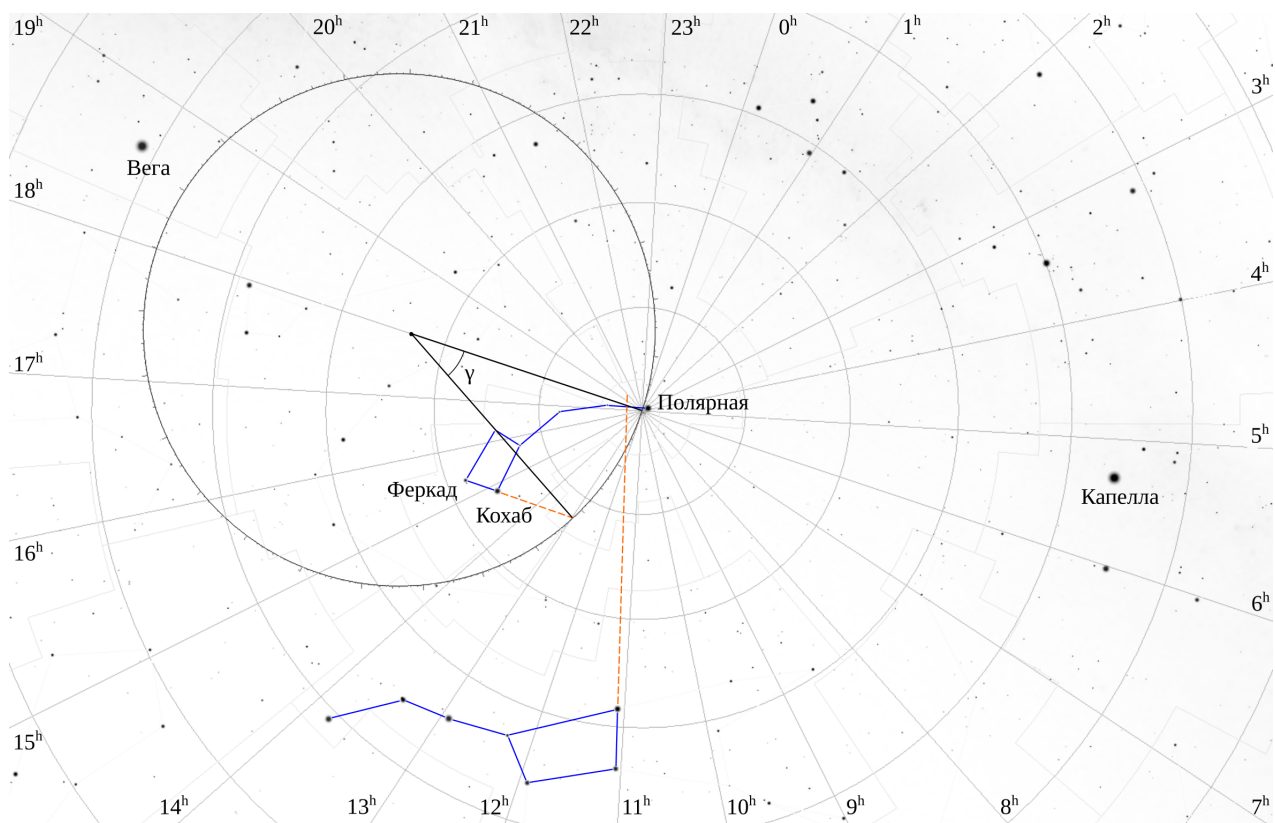
1. Как давно в последний раз Феркад и Кохаб указывали на полюс мира?
2. На каком угловом расстоянии от текущего положения он находился?
3. Выразите угловое расстояние от Кохаба до полюса мира в тот момент в долях расстояния между Кохабом и Феркадом.

Звезда	Прямое восхождение	Звезда	Прямое восхождение
Вега	18.6^h	Кохаб	14.8^h
Капелла	5.3^h	Феркад	15.3^h



Решение. В результате прецессии Северный полюс мира движется вокруг полюса эклиптики по малому кругу небесной сферы радиусом 23.4° с периодом около 26 000 лет. Координаты северного полюса эклиптики $\alpha_{PE} = 18^h$, $\delta = 66.6^\circ$.

Напомним астрономическую терминологию. Кругом склонения называется большой круг небесной сферы, проходящий через полюса мира. Вдоль него измеряются склонения. На иллюстрации круги склонений представлены в виде прямых, расходящихся из центра —



Северного полюса мира. Суточными параллелями называются малые круги небесной сферы, параллельные небесному экватору. Вдоль суточных параллелей перемещаются звезды в процессе суточного движения. Каждая суточная параллель имеет постоянное склонение. На рисунке суточные параллели показаны концентрическими окружностями.

Нам даны прямые восхождения двух ярких звёзд: Вега находится в левом верхнем углу, а Капелла — вблизи правой границы карты. Правильно отождествив звёзды и приняв во внимание, что прямые восхождения увеличиваются по часовой стрелке, найдём нужный круг склонений. Если участники обладают достаточными знаниями звездного неба, они могут использовать другие способы для градуировки системы координат.

Измерим линейкой расстояние x между суточными параллелями 60° и 70° . Оно равно 21 мм. В силу особенностей стереографической проекции, в которой сделана эта карта, расстоянием между каждой парой суточных параллелей различно. Тогда полюс эклиптики будет находиться на расстоянии $0.66x \approx 14$ мм от параллели 60° или на расстоянии $0.34x \approx 7$ мм от параллели 70° . Проведём окружность с центром в полюсе эклиптики и проходящую через полюс мира.

Звёзды Кохаб и Феркад — две наиболее яркие звезды в созвездии Малой Медведицы после Полярной. Они образуют донышко ковшика. Хотя далеко не всегда яркость звёзд в созвездии уменьшается в порядке $\alpha, \beta, \gamma \dots$ но в данном случае это правило выполняется. Те, кто не помнит на память какие именно звёзды в астеризме Малый Ковш носят такие названия, могут догадаться с помощью заданных в условии координат. Проведем линию от Феркада через Кохаб до пересечения с начерченным нами кругом. Угол между современным и древним положениями полюса мира с вершиной в полюсе эклиптике равен 30° . Значит, полюс мира

проходит это расстояние за время

$$t = \frac{30}{360} 26\,000 \approx 2170 \text{ лет,}$$

Получаем, что Феркад и Кохаб указывали на полюс мира около 146 года до нашей эры.

Измерим расстояние от древнего положения полюса мира до современного. Оно оказывается в 1.2 раза больше, чем расстояние от суточной параллели 80° до полюса. Тогда угловое расстояние между положениями полюса равно 12° .

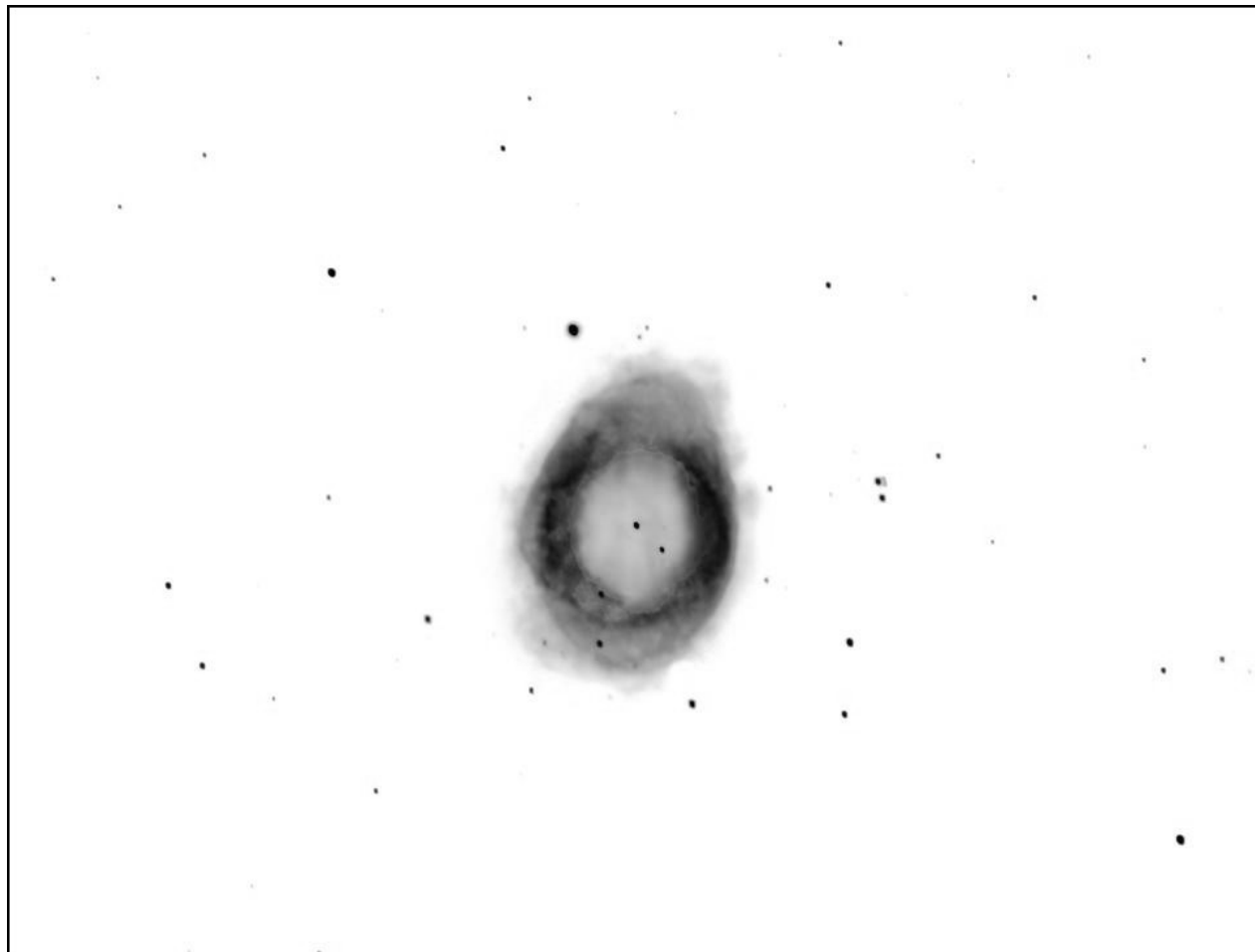
Расстояние от Кохаба до полюса составляло 2.4 расстояний Феркад — Кохаб.

Критерии оценивания.	25
К1. Градуировка координатной сетки	5
Правильно понято, где какие координатные круги	1
Найдены правильные опорные звезды с известными координатами	2
Правильная градуировка кругов склонений	2
К2. Определение положения прецессионного круга	7
Правильное положение полюса эклиптики	2
Правильно проведен прецессионный круг	3
Правильное направление движения полюса по прецессионному кругу	2
К3. Правильно найдены Кохаб и Феркад	1 + 1
Если правильно найдена только одна звезда, то дальнейшее решение не оценивается.	
К4. Ответ на первый вопрос — правильное время	5
К5. Ответ на второй вопрос — правильное расстояние от текущего полюса	3
К6. Расстояние от Кохаба до полюса в прошлом	3

9.8. Колечко-колечко...

Е. Г. Бойцов

Угловой размер планетарной туманности Кольцо на небе $1.5' \times 1'$. Сколько звезд 6^m и ярче попало на этот кадр? А 7^m и ярче? Оцените звездную величину самых тусклых звезд на фотографии. Межзвездным поглощением пренебречь.



Источник: [Reddit](#)

Решение. Хорошо известно, что объекты Мессье, а туманность Кольцо — это объект этого каталога под номером 57, сравнительно яркие, 6–9 звездной величины. Можно вспомнить, что звездная величина M 57 примерно равна 9^m . Однако, эта яркость распределена по довольно большой площади фотографии и напрямую сравнивать звезды с туманностью не получится. Разве что мы получили некоторый ориентир: самые тусклые звезды точно не могут быть ярче 9^m .

Размеры туманности на фотографии равны примерно 38×56 мм. Отношение этих величин примерно соответствует отношению данных в условии угловых размеров туманности, т. е. масштаб фотографии в обоих направлениях одинаковый составляет $0.26'/\text{см}$. Тогда наш кадр занимает на небе площадку $5.4' \times 4.1' = 0.0062$ квадратных градусов. Всего на небе 41250 квадратных градусов, то есть на кадре нам видна 1.5×10^{-7} часть неба.

Всего на небе видно около 6000 звезд шестой звездной величины и ярче. На одну такую звезду

приходится более тысячи площадок подобных нашей, поэтому вероятнее всего, что ни одна звезда 6^m и ярче не попала на нашу площадку.

Попробуем оценить, на сколько больше звезд 7^m и ярче можно увидеть на небе. Сначала предположим, что все звезды одинаковые и распределены в пространстве равномерно. В отсутствие поглощения мы можем их видеть до некоторого расстояния r , с которого они видны как звезды 6^m. На одну звездную величину слабее они будут видны с расстояния $r + \Delta r$ такого, что

$$\frac{r + \Delta r}{r} = 10^{0.2} \approx \sqrt{2.515}.$$

Число видимых звезд пропорционально объему сферы, в котором они расположены. Тогда

$$\frac{N(\leq 7)}{N(\leq 6)} = \left(\frac{r + \Delta r}{r}\right)^3 = 10^{0.6} \approx 3.98 \approx 4.$$

Если мы окружены звездами двух типов, то видимые до определенной звездной величины они заполняют разные сферические объемы, но изменению на одну звездную величину соответствуют аналогичные увеличения объемов и численности звезд. Точно такие же рассуждения можно проделать для любого числа различных наборов звезд, а значит, выведенная закономерность справедлива для всей совокупности звезд. Также заметим, что мы нигде не использовали конкретные звездные величины, то есть это правило универсально: звезд ярче величины $m+1$ больше, чем m в 4 раза. Это утверждение называют теоремой Зеелигера.

Отсюда делаем вывод, что звезд 7^m и ярче 24 000, то есть на каждую приходится 278 площадок. Следовательно, ожидаемое число таких звезд на фотографии тоже 0.

При этом мы можем найти 40-50 звезд. Это значит, что всего для наблюдения с такой проникающей способностью на небе около $N_t = 3 \times 10^8$.

Пусть $N = 6000$ — это число звезд ярче 6^m. Тогда $N_t = 4^x N$. Тогда

$$4^x = \frac{N_t}{N} \Rightarrow x = \log_4 \frac{N_t}{N} = \frac{\lg \frac{N_t}{N}}{\lg 4} \approx 7.8.$$

Вычисления с логарифмами здесь можно упростить, помня, откуда берется четверка:

$$4^x = 10^{0.6x} = \frac{N_t}{N} \Rightarrow x = \frac{\lg \frac{N_t}{N}}{0.6} \approx 7.8.$$

Значит на фотографии видны звезды до 13.8^m.

В действительности межзвездное поглощение приводит к тому, что мы видим меньше звезд, отчего с увеличением на звездную величину видим не в 4 раза больше звезд, а примерно в 2. Поэтому наша оценка получилась заниженной.

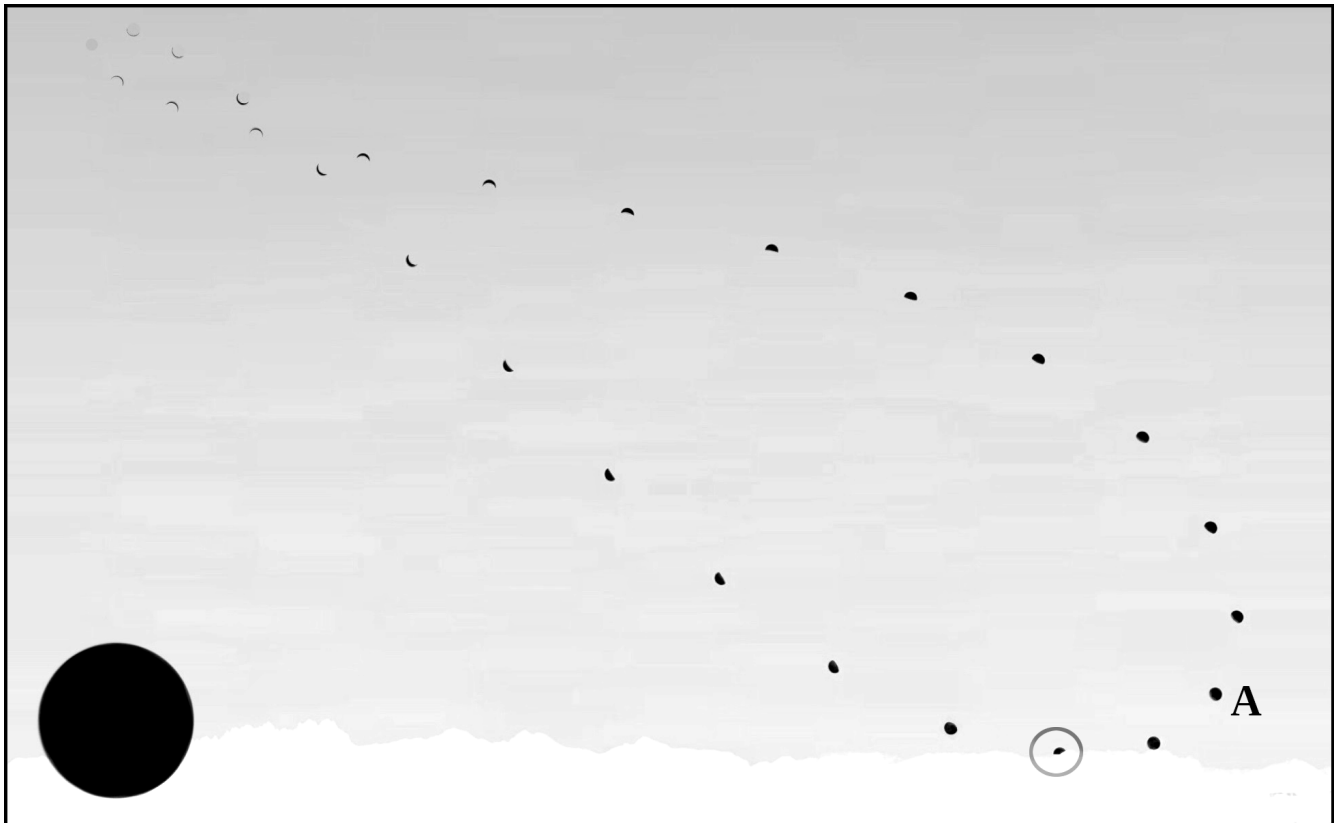
Критерии оценивания.	25
К1. Определение углового размера фотографии	7
Масштаб фотографии	3
Угловые размеры	2 + 2
К2. Число таких площадок на небе	3
Площадь всего неба	2
Вывод	1
К3. На фотографии 0 звезд 6 ^m и ярче	3
Сколько звезд 6 ^m и ярче на небе	1
Вывод	2
Если указана 1 звезда, то 1 балл. В остальных случаях 0 баллов.	
К4. Вывод теоремы Зеелигера	4
Данный результат может быть известен участнику и может быть засчитан без вывода.	
К5. На фотографии 0 звезд 7 ^m и ярче	4
Сколько звезд 7 ^m и ярче на небе	2
Вывод	2
Если указана 1 звезда, то 1 балл. В остальных случаях 0 баллов.	
К6. Определение звездной величины самых слабых звезд	4

9.9. Променяли Солнце на Луну

Т. В. Мигаль

Вам представлена лунная аналемма, снятая по тому же принципу, что и стандартная солнечная. В левом нижнем углу изображения дан диск Луны, увеличенный в 12 раз по сравнению с масштабом фото. Известно, что в период фотографирования Луны произошло летнее солнцестояние. Первой была сделана фотография Луны в полнолунии, отмеченная на рисунке кружком. Считать, что нижний край фотографии параллелен горизонту.

1. Определите полушарие Земли, в котором были сделаны фотографии.
2. Найдите широту места съемки.
3. Через какой интервал времени от начала съемки сделан кадр с Луной в положении **A**?
4. Луна на первом кадре заходит или восходит? Отметьте на фотографии точку запада или востока.
5. Определите эклиптическую широту Луны в точке **A** аналеммы.
6. Определите дату начала съемки.



Источник: [APOD](#)

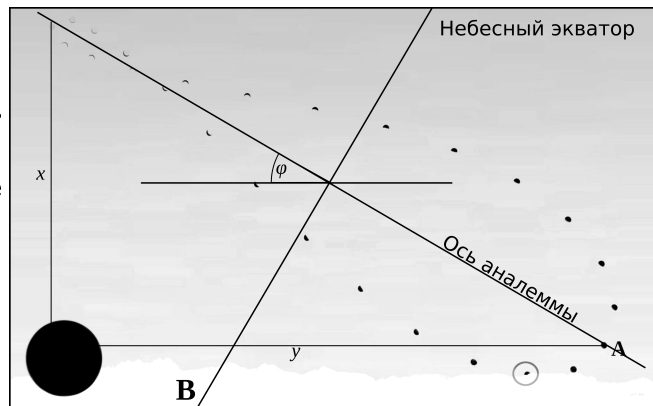
Решение.

Во время летнего солнцестояния Солнце имеет положительное склонение, в кадре Луна вблизи новолуния указывает соответствующее положение Солнца на небе в некоторый момент

съемки. Полная Луна вблизи летнего солнцестояния имеет отрицательное склонение, и положение Луны в этот момент также есть в кадре. Поскольку на аналемме положение Солнца (при положительном склонении) выше, чем положение полной Луны (при отрицательном склонении), то можно сделать вывод, что изображение получено в **северном** полушарии Земли.

Проведем ось аналеммы — линию, делящую пополам нижнюю и верхнюю петли. Заметим, что лунная аналемма также, как и солнечная, имеет форму восьмерки, что обусловлено наклоном орбиты Луны к экватору, а также ее эксцентриситетом.

Значит, как и у солнечной аналеммы, ось перпендикулярна экватору — отклонения, вызванные эксцентричностью и нелинейностью движения из-за наклона заметно меньше изменения склонения. Получаем, что ось аналеммы пересекает горизонт под углом, примерно равным широте. Это утверждение справедливо только при положении аналеммы вблизи точек востока или запада. Измерим два катета в прямоугольном треугольнике, гипотенузой которого является ось аналеммы, а один из катетов параллелен горизонту. Получим $x = 12.7$ см; $y = 22$ см. То есть широта равна



$$\arctg(x/y) \approx 30^\circ.$$

В реальности серия фотографий была снята на юге штата Нью-Мексико, на широте 31°

Фотографии для солнечной аналеммы делаются в одно и то же время по среднему солнечному времени, то есть раз в синодический период обращения Земли вокруг собственной оси и вокруг Солнца. Так же и с Лунной аналеммой — изображения были получены с промежутком в синодический период Луны и осевого вращения Земли.

$$\Delta T = \frac{T_{\odot} \cdot T_{\zeta}}{T_{\zeta} - T_{\odot}} = \frac{23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 4^{\text{s}} \cdot 27.3217^{\text{d}}}{27.3217^{\text{d}} - 23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 4^{\text{s}}} = 24^{\text{h}} 50^{\text{m}} 31^{\text{s}}.$$

Второе положение Луны на этом снимке находится левее первого. Проще всего это можно определить по порядку изменения лунных фаз. Снимок **А** был сделан 25-м, то есть спустя $24 \cdot \Delta T \approx 24^{\text{d}} 20^{\text{h}} 12^{\text{m}}$.

Проведем срединный перпендикуляр к оси аналеммы (см. рисунок). Это будет небесный экватор. Поскольку, как мы выяснили, наблюдения происходят в северном полушарии, то данное взаимное положение небесного экватора и горизонта соответствуют восточной части неба, а Луна на первом кадре восходит.

Будем считать, что угловой масштаб фото всюду одинаков. Это также можно подтвердить, измерив размер лунного серпа на аналемме в разных местах. Он окажется постоянным. Теперь измерим размер увеличенного диска Луны в углу коллажа. Он равен 30 мм. Размер

аналеммы по оси — 254 мм. Значит, угловой размер аналеммы равен:

$$d = 0.5^\circ \cdot \frac{254 \cdot 12}{30} \approx 51^\circ.$$

В самом южном положении склонение Луны равно $\delta_{moon} = -51^\circ/2 = -25.5^\circ$. Так как наклонение орбиты Луны к эклиптике много меньше наклона эклиптики к экватору, то наименьшее склонение у Луны наблюдается вблизи точки зимнего солнцестояния, а значит можно линейно переводить склонение в эклиптическую широту:

$$\beta_{moon} = \delta_{moon} + \varepsilon = -2^\circ.$$

Жюри приняло решение не оценивать шестой вопрос задачи.

Критерии оценивания.	25
К1. Определено полушарие Земли.....	3
К2. Найдена широта места съемки.....	6
Обоснование измерений.....	4
Измерения.....	2
К3. Найден интервал времени от начала съемки до точки А	5
Вычисление синодического периода.....	3
Верно определено направление движения Луны по аналемме.....	1
Вычислены интервала времени.....	1
К4. Положение Луны относительно горизонта.....	4
Полная Луна восходит.....	2
Если нет объяснения, то 1 балл.	
Правильно отмечена точка восхода.....	2
К5. Определена эклиптическая широта Луны в точке А	7
Обоснование измерений.....	3
Измерения.....	2
Если определен только масштаб снимка, то 1 балл.	
Определена эклиптическая широта Луны.....	2



Практический тур

Условия, решения и схема оценивания. 10 класс

Содержание

10.7. Базовая зависимость	2
10.8. Танцы с Бубном	12
10.9. Сгорел на работе	17

10.7. Базовая зависимость

В. Б. Игнатьев

В таблице ниже представлены данные из каталога Brandler et al. по некоторым наиболее ярким звёздам одного рассеянного скопления. Определите показатель степени зависимости «масса – светимость» для звёзд главной последовательности в диапазоне масс от $2 M_{\odot}$ до $5 M_{\odot}$ на примере данного скопления.

номер	$\lg L$	$Gmag$	$\lg T$	$\lg g$	$BPmag - Gmag$
1	2.50	5.20	4.126	3.979	-0.018
2	2.37	5.44	4.119	4.06	-0.022
3	2.34	5.43	4.117	4.076	-0.035
4	2.29	5.64	4.113	4.097	-0.04
5	2.22	5.75	4.107	4.129	-0.043
6	1.97	6.16	4.079	4.213	-0.04
7	1.93	6.30	4.073	4.223	-0.037
8	1.82	6.43	4.059	4.245	-0.03
9	1.76	6.60	4.05	4.255	-0.023
10	1.63	6.80	4.036	4.267	-0.019
11	1.63	6.84	4.029	4.271	-0.01
12	1.63	6.82	4.029	4.272	0.026
13	1.61	6.81	4.026	4.274	-0.005
14	1.56	6.90	4.018	4.278	-0.002
15	1.52	7.00	4.010	4.281	0.005
16	1.46	7.20	4.001	4.285	0.007
17	1.41	7.10	3.991	4.288	0.020
18	1.38	7.29	3.987	4.289	0.025
19	1.32	7.35	3.976	4.291	0.038
20	1.29	7.53	3.969	4.292	0.036
21	1.24	7.55	3.960	4.294	0.050
22	1.17	7.65	3.947	4.295	0.060
23	1.12	7.71	3.939	4.297	0.064
24	1.10	7.75	3.935	4.297	0.066
25	1.10	7.80	3.934	4.297	0.078
26	1.08	7.83	3.931	4.298	0.071
27	1.07	7.73	3.930	4.298	0.076
28	1.01	7.96	3.919	4.300	0.082
29	0.98	8.02	3.914	4.301	0.091

В таблице приведены следующие данные: порядковый номер; $\lg L$ – логарифм болометрической светимости звезды в единицах светимости Солнца; $Gmag$ – видимая звёздная величина в полосе G каталога GAIA; $\lg T$ – логарифм эффективной температуры звезды в кельвинах; $\lg g$ – логарифм ускорения свободного падения в фотосфере звезды в системе единиц СГС (сантиметр/грамм/секунда); $BPmag - Gmag$ – показатель цвета для полос $BPmag$ и $Gmag$ каталога GAIA.

Параллакс звездного скопления составляет $\pi = 7.4$ миллисекунды дуги. Абсолютная звёздная величина Солнца в полосе G каталога GAIA равна $+4.8^m$. Осевым вращением звезд пренебречь.

Решение.

Для решения задачи нужно получить классическую зависимость «масса–светимость» для звёзд главной последовательности. Она имеет вид:

$$L \sim M^\gamma$$

γ - показатель степени, разный для различных диапазонов масс. И участникам нужно найти показатель степени для указанного в условии диапазона масс.

На первом этапе стоит проверить, что все предоставленные звезды относятся к главной последовательности, так как яркие звезды могут быть и красными гигантами или двойными звездами. На втором этапе, что все они находятся в нужном нам диапазоне масс. Эту нужно сделать, чтобы не обрабатывать и получать зависимость для правильной выборки данных.

Для того, чтобы проверить, что все звезды являются звездами главной последовательности построим диаграмму звездная величина – цвет. Если все верно, то получится плавная линия. Если какие-то точки будут заметно выбиваться, то эти звезды не принадлежат главной последовательности.

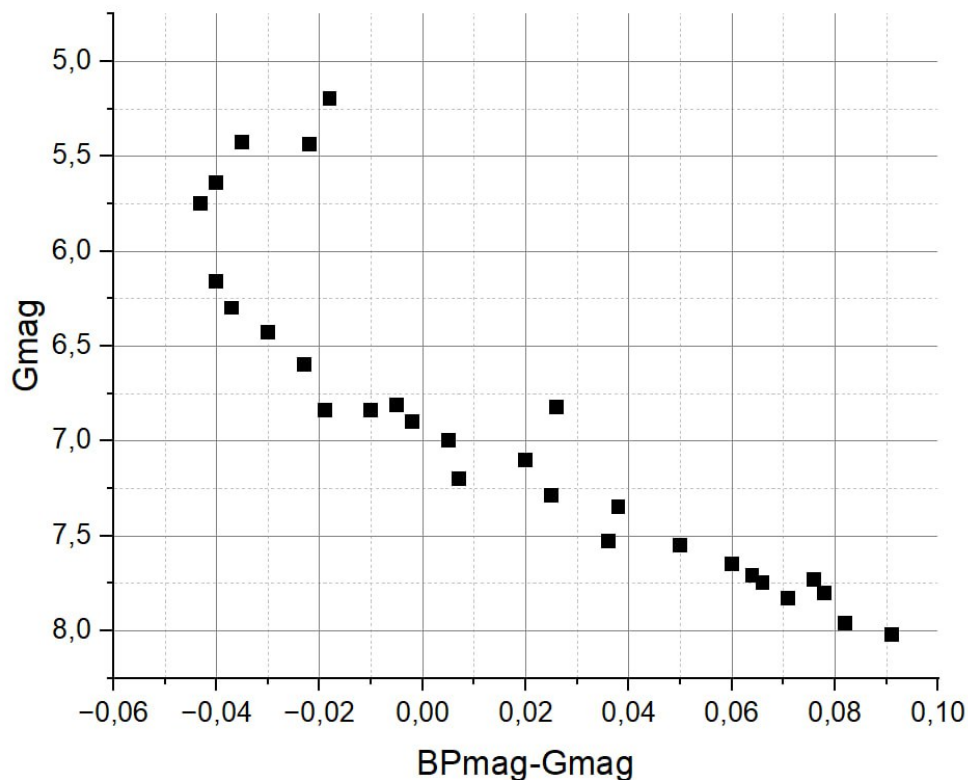


Рис. 1: Построенная диаграмма звездная величина-цвет.

Проведем анализ диаграммы. На ней хорошо видны звезды главной последовательности, точка поворота - ухода звезд с главной последовательности. Звезды под номерами 1-5 формируют точку поворота и уже не принадлежат главной последовательности и находятся на следующей

эволюционной стадии. Точка 12 сильно выделяется над полученной главной последовательностью, это может быть двойная система, состоящая из двух примерно одинаковых по массе, и соответственно цвету, звезд. А может быть звезда фона, которая наложилась в картинной плоскости на рассматриваемое скопление.

Участник может построить аналогичный график, выбрав по вертикальной оси $\lg L$. Точки, которые нужно отбросить не изменятся.

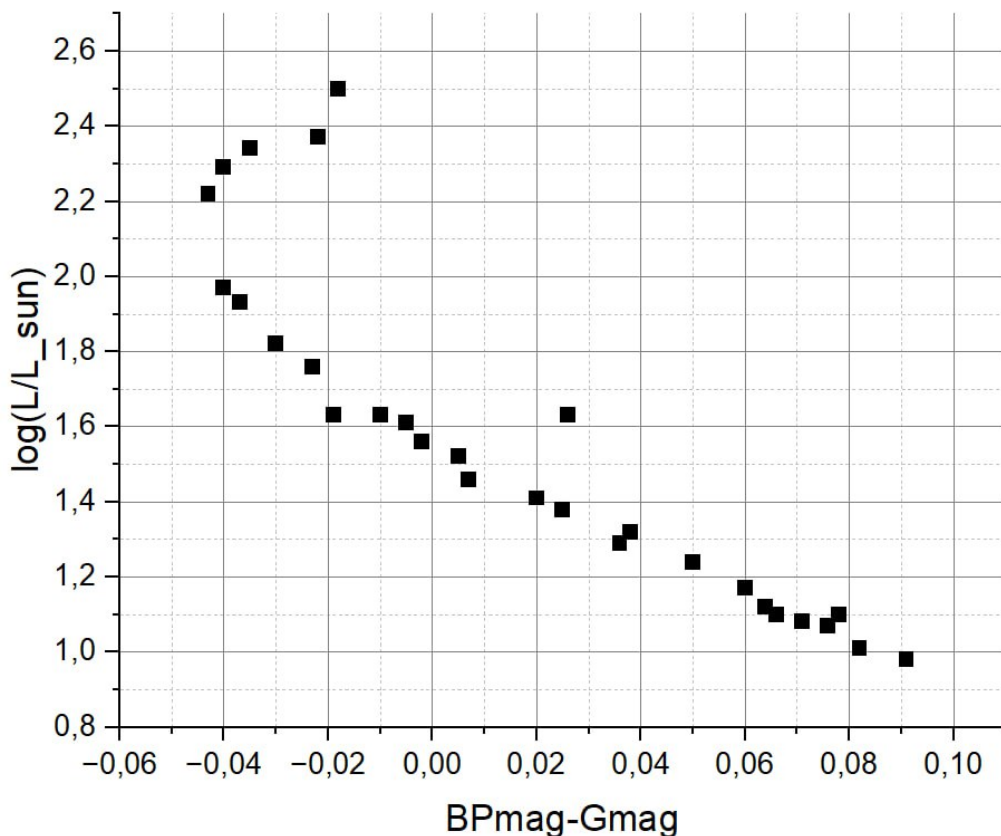


Рис. 2: Построенная диаграмма звездная величина-цвет.

Далее участник при решении задачи может действовать следующими способами для всех оставшихся в рассмотрении точек.

Версия в лоб.

Для всех оставшихся точек сделаем следующие действия.

- А. Из логарифма температуры вычислить значение температуры фотосферы звезды, а из логарифма светимости – светимость в светимостях Солнца.
- В. Определим радиус звезды R при помощи закона Стефана-Больцмана $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$
- С. Из $\lg g$ логарифма ускорения свободного падения получим саму величину g
- Д. Из величины ускорения свободного падения вычислим M массу звезды
- Е. Далее еще раз отсеем те звезды, которые находятся вне диапазона $2 - 5 M_{\odot}$

Ф. Вычислим логарифм массы $\lg M$ и построить зависимость $\lg L - \lg M$

Г. Отсеем точки не укладывающиеся в зависимость. Это будут точки от звезд фона либо двойных звезд.

Оставим этот путь для участников, которые обладают нелимитированным количеством времени.

Рациональный подход

Стоит заметить, что на последнем этапе нужно значение логарифма массы звезд, потому что логарифмируя зависимость масса-светимость можно получить линейную зависимость, коэффициент которой сразу дает искомую в задаче величину. Следовательно нет смысла уходить от логарифмов в сторону степенных зависимостей, а проще и удобнее получить общую формулу.

Запишем формулу для ускорения свободного падения и прологарифмируем ее:

$$g = \frac{GM}{R^2}, \quad \rightarrow \quad \lg g = \lg G + \lg M - 2 \lg R$$

Запишем закон Стефана-Больцмана и прологарифмируем ее:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4, \quad \rightarrow \quad \lg L = \lg(4\pi\sigma) + 2 \lg R + 4 \lg T$$

Из второго выражения выразим $\lg R$ и подставим во первое, выразив в нем $\lg M$

$$\lg g = \lg G + \lg M - (\lg L - \lg(4\pi\sigma) - 4 \lg T) = \lg(4\pi\sigma G) + \lg M - \lg L + 4 \lg T$$

Следовательно:

$$\lg M = \lg g + \lg L - 4 \lg T - \lg(4\pi\sigma G)$$

Стоит обратить внимание, что ускорение свободного падения g^* дано в величинах системы СГС, следовательно размерность величины сантиметр на квадратную секунду. В системе СИ это величина g будет на два порядка меньше.

$$\lg g = \lg g^* - 2$$

Также заметим, что светимость дана в светимостях Солнца. Следовательно, финальная формула будет выглядеть следующим образом:

$$\lg M = \lg g^* + \lg(LL_{\odot}) + \lg L_{\odot} - 4 \lg T - \lg(4\pi\sigma G) - 2 = \lg g^* + \lg(LL_{\odot}) - 4 \lg T + 14.32 + 26.59$$

$$\lg \frac{M}{M_{\odot}} = -30.3$$

Альтернативный способ получения необходимых соотношений возможен, если выразить единицы в массах и светимостях Солнца.

Запишем формулу отношения ускорений свободного падения звезды и Солнца и прологарифмируем ее:

$$g = \frac{GM}{R^2}, \quad \rightarrow \quad \frac{g}{g_{\odot}} = \lg \frac{M}{M_{\odot}} - 2 \lg \frac{R}{R_{\odot}}$$

Запишем отношения светимостей через закон Стефана-Больцмана и прологарифмируем ее:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4, \quad \rightarrow \quad \lg \frac{L}{L_{\odot}} = 2 \lg \frac{R}{R_{\odot}} + 4 \lg \frac{T}{T_{\odot}}$$

Следовательно, если использовать логарифмические величины из таблицы, выражение будет иметь вид :

$$\lg \frac{M}{M_{\odot}} = \lg \frac{g}{g_{\odot}} + \lg \frac{L}{L_{\odot}} - 4 \lg \frac{T}{T_{\odot}} = \lg g + \lg \frac{L}{L_{\odot}} - 4 \lg T - \lg g_{\odot} + 4 \lg T_{\odot}$$

Возьмем значения величин о Солнце из справочных данных, переведем их в систему СГС:

$$\lg g_{\odot} = \lg \left(\frac{GM_{\odot}}{R_{\odot}^2} \right) = \lg \left(\frac{6.67 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{33}}{(6.9 \cdot 10^{10})^2} \right) \lg (2.74 \cdot 10^4) \approx 4.44$$

$$4 \lg T_{\odot} = 4 \lg (5800) \approx 15.05$$

И итоговое выражение для расчета будет:

$$\lg \frac{M}{M_{\odot}} = \lg g + \lg \frac{L}{L_{\odot}} - 4 \lg T - 4.44 + 15.05 = \lg g + \lg \frac{L}{L_{\odot}} - 4 \lg T + 10.61$$

номер	$\lg L$	Gmag	$\lg T$	$\lg g$	BPmag-Gmag	$\lg M$
1	2.50	5.20	4.126	3.979	-0.018	0.585
2	2.37	5.44	4.119	4.06	-0.022	0.564
3	2.34	5.43	4.117	4.076	-0.035	0.558
4	2.29	5.64	4.113	4.097	-0.04	0.545
5	2.22	5.75	4.107	4.129	-0.043	0.531
6	1.97	6.16	4.079	4.213	-0.04	0.477
7	1.93	6.30	4.073	4.223	-0.037	0.471
8	1.82	6.43	4.059	4.245	-0.03	0.439
9	1.76	6.60	4.05	4.255	-0.023	0.425
10	1.63	6.80	4.036	4.267	-0.019	0.363
11	1.63	6.84	4.029	4.271	-0.01	0.395
12	1.63	6.82	4.029	4.272	0.026	0.396
13	1.61	6.81	4.026	4.274	-0.005	0.39
14	1.56	6.90	4.018	4.278	-0.002	0.376
15	1.52	7.00	4.010	4.281	0.005	0.371
16	1.46	7.20	4.001	4.285	0.007	0.351
17	1.41	7.10	3.991	4.288	0.020	0.344
18	1.38	7.29	3.987	4.289	0.025	0.331
19	1.32	7.35	3.976	4.291	0.038	0.317
20	1.29	7.53	3.969	4.292	0.036	0.316
21	1.24	7.55	3.960	4.294	0.050	0.304
22	1.17	7.65	3.947	4.295	0.060	0.287
23	1.12	7.71	3.939	4.297	0.064	0.271
24	1.10	7.75	3.935	4.297	0.066	0.267
25	1.10	7.80	3.934	4.297	0.078	0.271
26	1.08	7.83	3.931	4.298	0.071	0.264
27	1.07	7.73	3.930	4.298	0.076	0.258
28	1.01	7.96	3.919	4.300	0.082	0.244
29	0.98	8.02	3.914	4.301	0.091	0.235

Теперь заметим, что звезды под номерами 22 и больше имеют массу меньше, чем $2 M_{\odot}$ ($\lg M = 0.301$), и для построения графика нам не подходят. Так же видно, что звезда 10 скорее всего является звездой фона, так как она лежит ниже главной последовательности и заметно выше в графике зависимости масса-светимость, поэтому эту точку необходимо отбросить.

Итоговая выборка звезд будет выглядеть следующим образом

номер	$\lg L$	Gmag	$\lg T$	$\lg g$	BPmag-Gmag	$\lg M$
6	1.97	6.16	4.079	4.213	-0.04	0.477
7	1.93	6.30	4.073	4.223	-0.037	0.471
8	1.82	6.43	4.059	4.245	-0.03	0.439
9	1.76	6.60	4.05	4.255	-0.023	0.425
11	1.63	6.84	4.029	4.271	-0.01	0.395
13	1.61	6.81	4.026	4.274	-0.005	0.39
14	1.56	6.90	4.018	4.278	-0.002	0.376
15	1.52	7.00	4.010	4.281	0.005	0.371
16	1.46	7.20	4.001	4.285	0.007	0.351
17	1.41	7.10	3.991	4.288	0.020	0.344
18	1.38	7.29	3.987	4.289	0.025	0.331
19	1.32	7.35	3.976	4.291	0.038	0.317
20	1.29	7.53	3.969	4.292	0.036	0.316
21	1.24	7.55	3.960	4.294	0.050	0.304

Строим график зависимости $\lg L$ от $\lg M$.

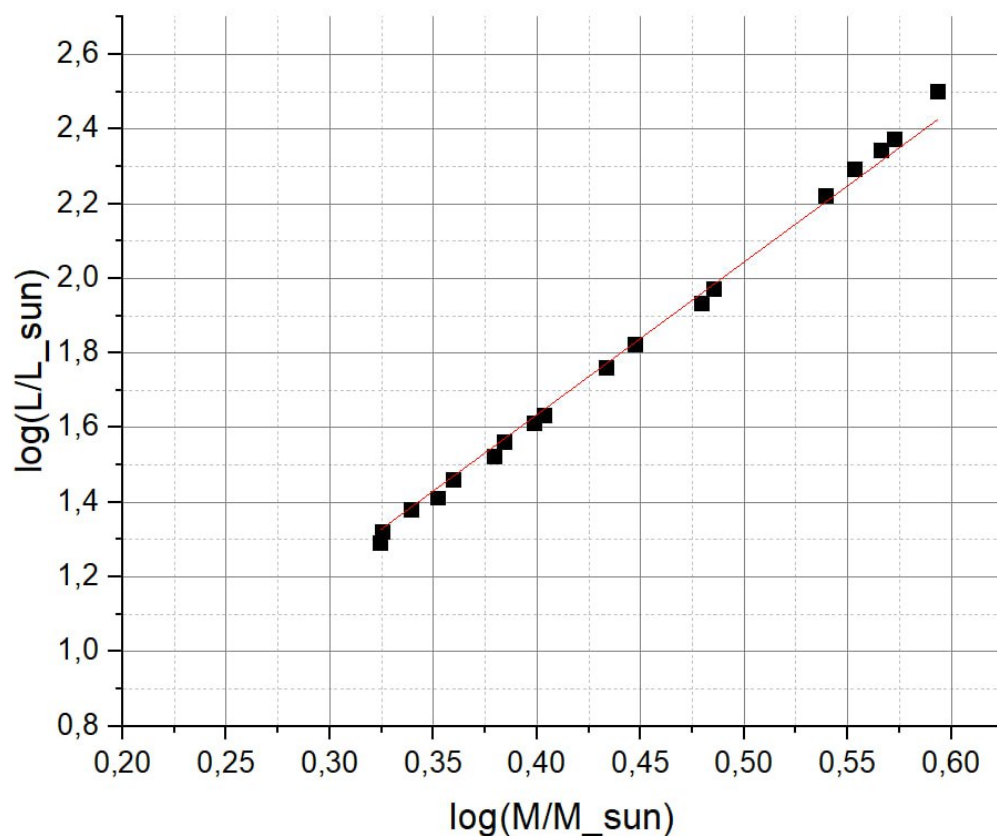


Рис. 3: зависимость $\lg L$ от $\lg M$.

Определить значение показателя степени лучше всего при помощи метода наименьших квадратов (МНК). Очень важно отметить, что мы строим линейную зависимость вида $y = Ax + B$, в которой свободный член зависимости $B = 0$. Построенная зависимость должна содержать точку ($L = 1 L_{\odot}$; $M = 1 M_{\odot}$), что в логарифмических осях соответствует точке $(0; 0)$.

Получаем значение показателя степени: случай без свободного члена $\gamma = 4.086$. Случай определения зависимости со свободным членом, $\gamma = 4.134$ свободный член $b = -0.003$ Теперь, в качестве факультативного анализа построим графики для случаев, если точки не будут выброшены.

A. Случай, если ни одна точка не выброшена.

Случай определения без свободного члена - $\gamma = 4.044$.

Случай определения зависимости со свободным членом, показатель степени $\gamma = 4.267$, свободный член $b = -0.041$

B. Случай, если выброшены только точки 1-5.

Случай определения без свободного члена - $\gamma = 3.833$.

Случай определения зависимости со свободным членом, показатель степени $\gamma = 4.161$, свободный член $b = -0.007$

C. Случай, если выброшены только точки 10 и 12.

Случай определения без свободного члена - $\gamma = 4.069$.

Случай определения зависимости со свободным членом, показатель степени $\gamma = 4.274$, свободный член $b = -0.048$

D. Случай, если выброшены только точки 22-29.

Случай определения без свободного члена - $\gamma = 4.055$.

Случай определения зависимости со свободным членом, показатель степени $\gamma = 3.656$. свободный член $b = +0.12$

Ответ: случай без свободного члена $\gamma = 4.086$.

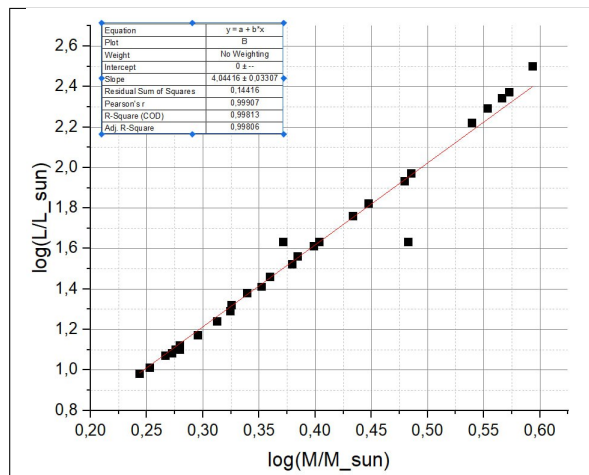


График со всеми точками

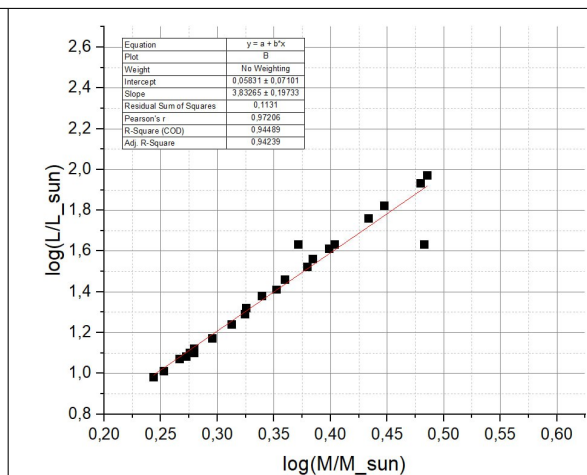
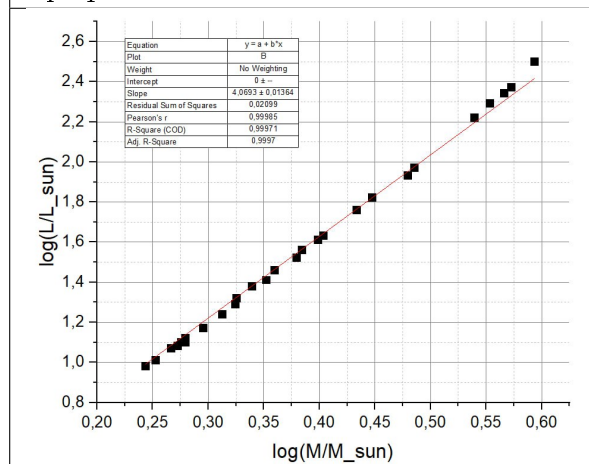
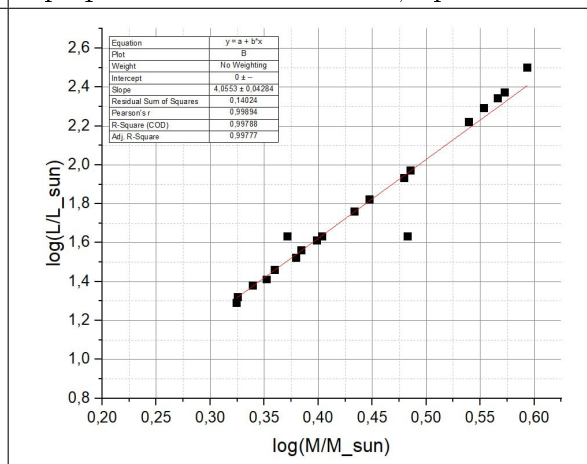


График со всеми точками, кроме точек 1-5



С. График со всеми точками, кроме точек 10 и 12



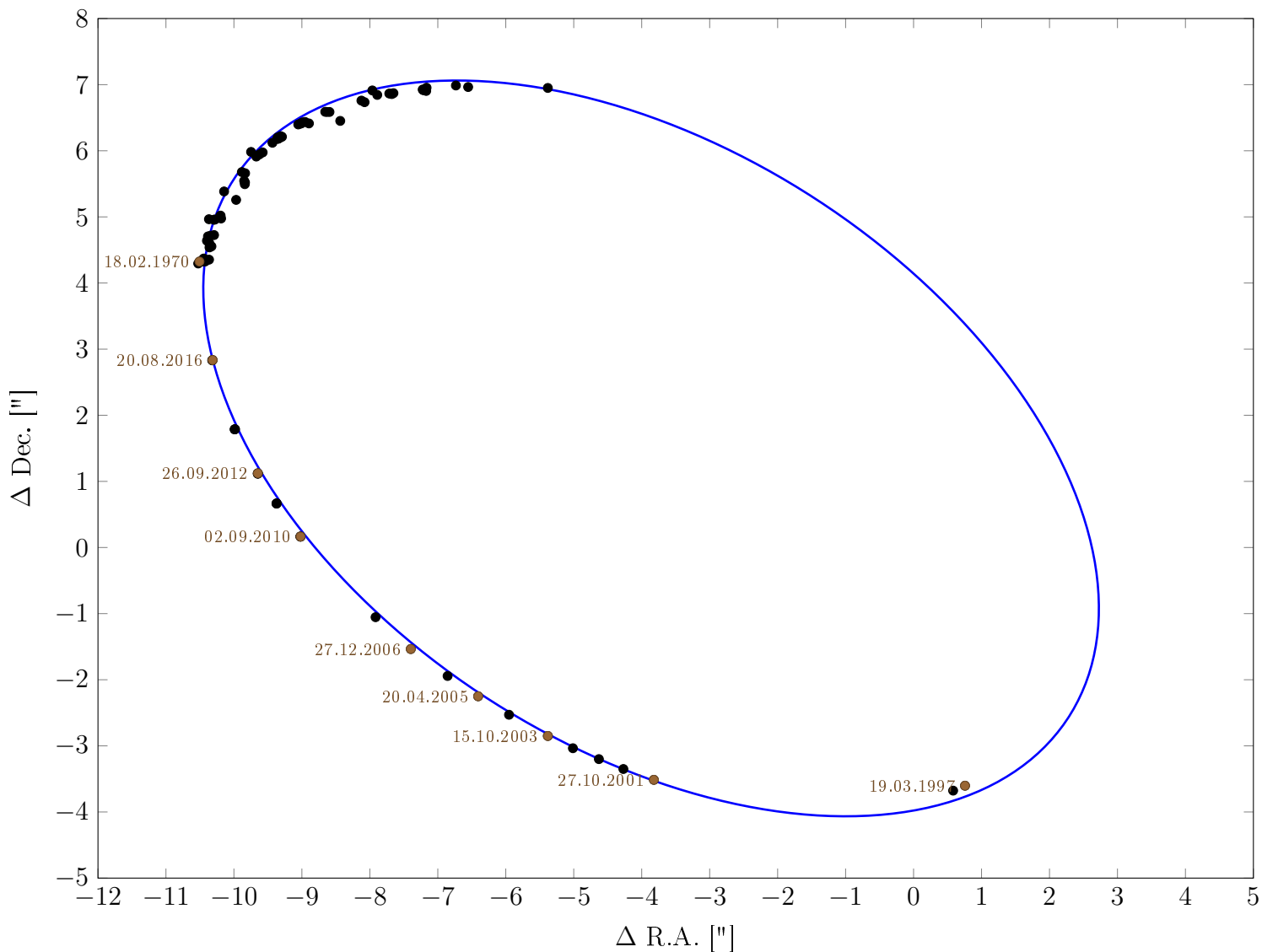
График, со всеми точками, кроме точек 22-29

Критерии оценивания.	25
Решение, в котором ответ сразу записывается $\gamma = 4$ оценивается в ноль баллов	
К1. Удаление лишних точек из выборки на основании ГР	7
Построение диаграммы ГР в любом виде	3
Удаление 1-5 точек	2
Удаление 10 точки	1
Удаление 12 точки	1
К2. Определение масс звезд из таблицы	9
Оценка за данный пункт выставляется только при получении верных значений масс.	
Если массы определены для 2-3 случайно выбранных звезд, оценка за данный пункт не более 2х баллов при верном численном ответе.	
К3. Удаление точек 22-29 из выборки, по критерию массы	2
Этот балл за считывается, только если массы были определены корректно и удалены все точки. В случае любой ошибки оценка за пункт - 0 баллов	
К4. Построение графика $\lg L - \lg M$	2
К5. Определение показателя степени зависимости $L \sim M^\gamma$	5
Если массы звезд определены не верно оценка за данный пункт 0 баллов	
Если записан ответ, но не приведено обоснование и решение, или оно не является достаточным, то оценка за пункт - 0 баллов.	
В случае, если часть точек из выборки не удалена, максимальная оценка за данный пункт 3 балла, при графическом методе определения угла наклона - 2 балла	
Метод МНК	3
ИЛИ Графический метод	1
учет равенства нулю свободного члена	1
Получен численный ответ в диапазоне 4.10 ± 0.05	1

10.8. Танцы с Бубном

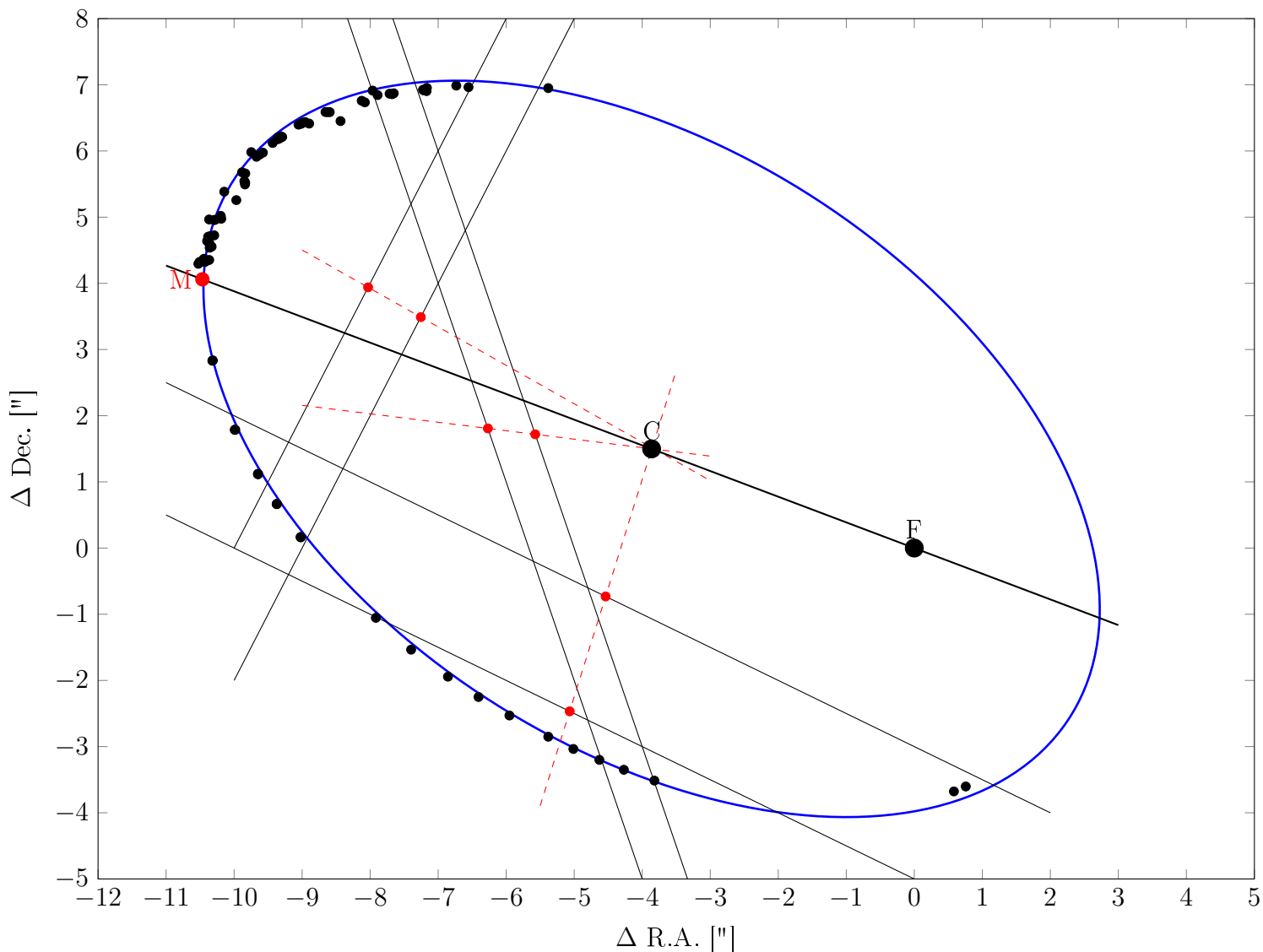
В. В. Красоткина, В.Б. Игнатъев

На диаграмме ниже показано положение белого карлика Сириус В относительно главного компонента системы (Сириус А). Определите период обращения, эксцентриситет, большую полуось орбиты системы и дату прохождения его через перигей. Известно, что параллакс Сириуса составляет $0.378''$, сумма масс системы равна $3.08M_{\odot}$, а угол между лучом зрения и нормалью к плоскости орбит системы $i = 43^{\circ}$.



Решение.

Для начала восстановим положение центра эллипса. Для этого проведём несколько пар параллельных прямых через центры отрезков, образованных пересечением эллипса с прямыми (на графике – пунктирные линии). Их пересечение даст точку центра эллипса. Изменения положения Сириуса В происходят относительно главной звезды, поэтому точка $(0, 0)$ соответствует точке фокуса.



При проецировании эллипса на картинную плоскость все соотношения линейных размеров сохраняются. Тогда из данной картинки мы можем найти отношение двух величин, зависящих от эксцентриситета истинного эллипса: например, отношение фокального расстояния к апоцентрическому расстоянию. Расстояния между точками находим по теореме Пифагора, используя их координаты:

$$\frac{c}{Q} = \frac{a_0 e_0}{a_0(1 + e_0)} = \frac{CF}{MF} = \frac{4.14}{11.23}$$

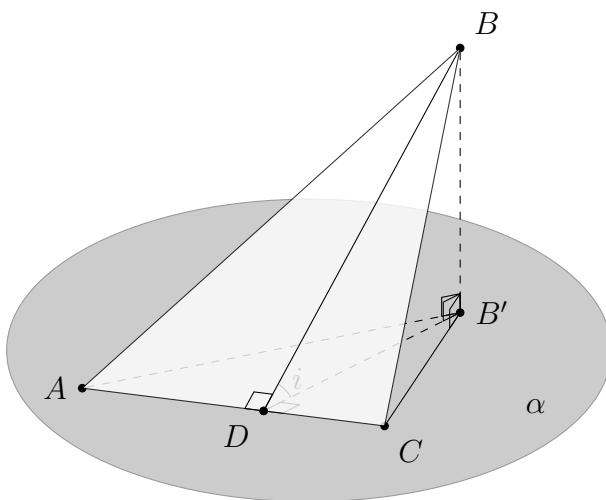
Отсюда

$$e_0 = 0.58$$

Теперь воспользуемся знанием стереометрии:

$$S = S_0 \cos i$$

Площадь проекции плоской фигуры равна площади истинной фигуры, умноженной на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции. Ниже для справки приведено доказательство этого факта, которое не требуется приводить в решении задачи.



Рассмотрим проецируемую фигуру – треугольник ABC , сторона которого AC лежит в плоскости проекции α (или параллельна плоскости проекции α). Угол между плоскостью и треугольником обозначим за i .

$$BB' \perp \alpha; BB' \cap \alpha = B' - \text{проекция точки } B \text{ на плоскость } \alpha$$

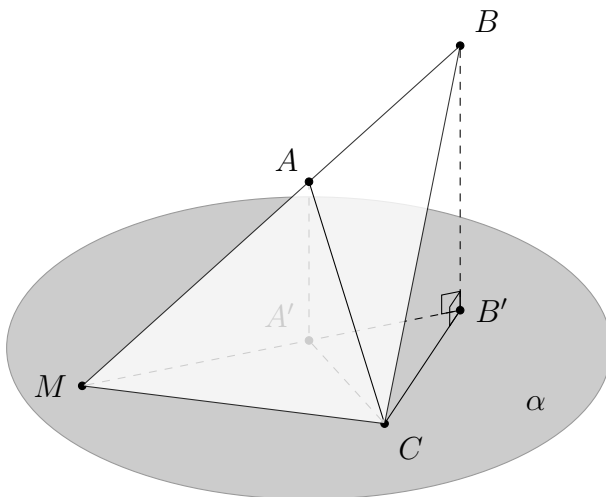
BD – высота $\triangle ABC$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $B'D$ является высотой $\triangle AB'C$.

$$B'D = BD \cos i$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD, S_{AB'C} = \frac{1}{2} AC \cdot B'D \Rightarrow \frac{S_{AB'C}}{S_{ABC}} = \frac{B'D}{BD}$$

Тогда

$$\frac{S_{AB'C}}{S_{ABC}} = \cos i$$



Рассмотрим проецируемую фигуру – треугольник ABC , ни одна из сторон которого не лежит в плоскости проекции α и не параллельна ей. Угол между плоскостью и треугольником обозначим за i .

$$BB' \perp \alpha; BB' \cap \alpha = B' - \text{проекция точки } B \text{ на плоскость } \alpha$$

$AA' \perp \alpha$; $AA' \cap \alpha = A'$ – проекция точки A на плоскость α

$AB \cap \alpha = M$ – пересечение прямой AB с плоскостью α

$$S_{ABC} = S_{MBC} - S_{MAC}, \quad S_{A'B'C} = S_{MB'C} - S_{MA'C}$$

Из первой части доказательства делаем вывод:

$$S_{MB'C} = S_{MBC} \cos i, \quad S_{MA'C} = S_{MAC} \cos i$$

Тогда

$$S_{A'B'C} = S_{MBC} \cos i - S_{MAC} \cos i = S_{ABC} \cos i$$

Для произвольных фигур это равенство можно доказать, приближая их многоугольными фигурами.

Тогда справедливо соотношение

$$\frac{S_0}{S} = \frac{\pi a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2}}{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}} = \frac{1}{\cos i}, \quad (1)$$

в котором все величины с индексом 0 соответствуют истинному эллипсу, а без индекса – видимому (проекции). Параметры видимого эллипса мы можем найти из прямых измерений и теоремы Пифагора:

$$a = 7.31'', \quad b = 4.52'', \quad e = 0.79$$

Тогда из (1) легко находится истинное значение большой полуоси в угловых единицах:

$$a_0 = 7.52''$$

Зная параллакс, найдем линейный размер полуоси системы:

$$a_l = a_0 \cdot \frac{1}{\pi} = 19.89 \text{ а.е.}$$

Период найдем из III закона Кеплера:

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a_l^3}{GM_\Sigma} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{a_l^3}{GM_\Sigma}} = 50.63 \text{ года.}$$

Дату прохождения апоцентра снимем с графика: примерно 18.02.1970. Соответственно, дата следующего прохождения перицентра – 12.06.1995 (через половину периода системы). С этого момента $T = 50.63$ года пройти не успело, следовательно, данное прохождение перицентра было последним на данный момент.

Критерии оценивания.	25
К1. Построение. Определение центра эллипса.....	5
К2. Построение. Определение положения центральной звезды.....	2
К3. Определение значения эксцентриситета.....	5
К4. Определение значения большой полуоси.....	8
Описание метода расчёта через отношение площадей эллипсов.....	3
Определение полуоси в угловых секундах.....	3
Определение полуоси в астрономических единицах.....	2
К5. Определение периода системы.....	2
К6. Определение момента прохождения перицентра.....	3
Определение точек апоцентра и перицентра.....	1
Определение даты прохождения апоцентра.....	1
Определение даты прохождения перицентра.....	1

10.9. Сгорел на работе

В.Б. Игнатьев, Д.Ф. Гасымов

На приложенном графике представлены зависимости от времени светимости двух звёзд на стадии главной последовательности. Нижний график построен для Солнца при его текущем химическом составе, а верхний график – для звезды с массой $1 M_{\odot}$, которая образовалась на ранних этапах эволюции Вселенной и обладала значительно меньшей металличностью.

- Чему равна масса водорода в Солнце, который к настоящему моменту уже преобразовался в гелий?
- Какая масса водорода преобразуется в гелий в Солнце за всё время нахождения его на главной последовательности?
- Чему равны массовые и количественные доли водорода и гелия в Солнце, когда оно выйдет со стадии главной последовательности?
- Какая масса водорода преобразуется в гелий за всё время жизни звезды с массой $1 M_{\odot}$, если она образовалась в ранней Вселенной и обладала низкой металличностью?

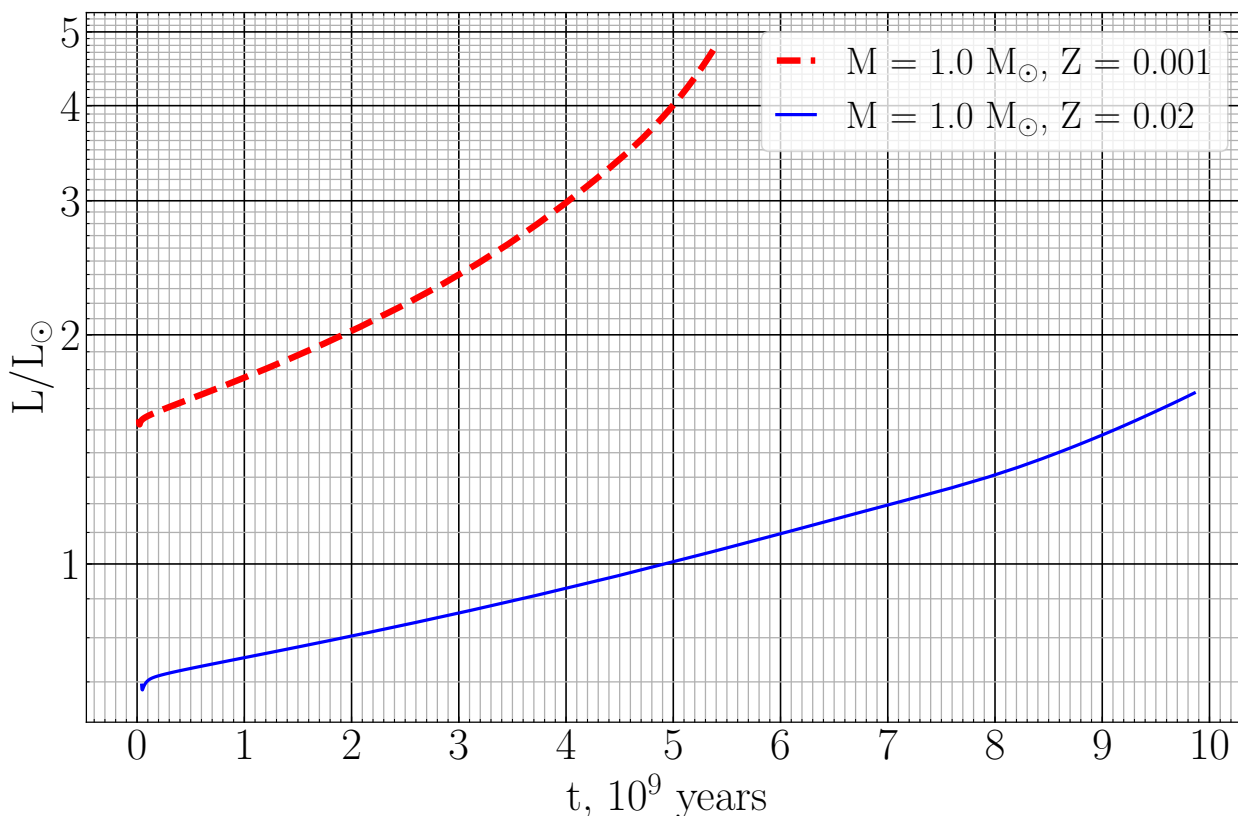


Рис. 4: Светимость звезд с массой $1 M_{\odot}$ на стадии главной последовательности, Z – металличность звезды

Для Солнца можно считать, что массовая доля водорода при образовании звезды составляла 70%, а массовая доля гелия – 30%. Наличием других элементов в звёздах, потерей массы

за счет звёздного ветра и других эффектов пренебречь. Масса протона составляет $1.6726 \cdot 10^{-27}$ кг, масса ядра гелия – $6.6447 \cdot 10^{-27}$ кг.

Решение.

В звездах типа Солнца водород превращается в гелий в результате ядерных реакций, называемых р-р циклом. В ходе одного такого цикла 4 протона превращаются в ядро гелия и выделяется энергия, подавляющая часть которой уносится излучением. Здесь и далее энергией, которую уносят 2 нейтрино за один цикл, пренебрежем.

Получим эту величину из данных, приведённых в условии задачи:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = (4m_p - m_{HE}) \cdot c^2 = 4.1 \cdot 10^{-12} \text{ Дж.}$$

Рассмотрим представленные графики. Площадь под кривой равна суммарной энергии, высвеченной звездой за время жизни на главной последовательности. Определим эту энергию для Солнца (нижняя кривая) за время 4.8 – 4.9 миллиарда лет и за всё время его нахождения на ГП. Современный возраст Солнца можно получить из графика, найдя время, при котором $L = 1 L_{\odot}$.

Обратим внимание, что шкала по вертикальной оси имеет логарифмическую природу, поэтому данные с неё надо снимать аккуратно. Вероятная ошибка участника – это предположение, что светимость линейно растёт со временем. Для наглядности предоставим график (рис. 5) в линейном масштабе на котором явно видно, что данное предположение не является верным.

Для вычисления площади разобьём логарифмическую кривую на несколько более-менее узких интервалов и определим площадь каждого как

$$S_i = \frac{L_i + L_{i-1}}{2} \cdot \Delta t_i$$

Номер	L_i	L_{i-1}	t	Δt	S_i
1	0.75	0.7	1	1	0.725
2	0.8	0.75	2	1	0.775
3	0.85	0.8	3	1	0.825
4	0.93	0.85	4	1	0.89
5	1	0.93	4.8	0.8	0.72
6	1.05	1	5	0.2	0.20
7	1.1	1.05	6	1	1.075
8	1.2	1.1	7	1	1.15
9	1.32	1.2	8	1	1.285
10	1.5	1.32	9	1	1.41
11	1.7	1.5	10	1	1.6

Отметим, что светимости здесь выражены в единицах светимости Солнца, а время – в миллиардах (10^9) лет.

Суммируем значение площадей каждого столбца. За время жизни Солнца (4.8 миллиарда лет) площадь под кривой графика будет равна $3.935 \approx 3.9$ светимостей Солнца за 1 миллиард

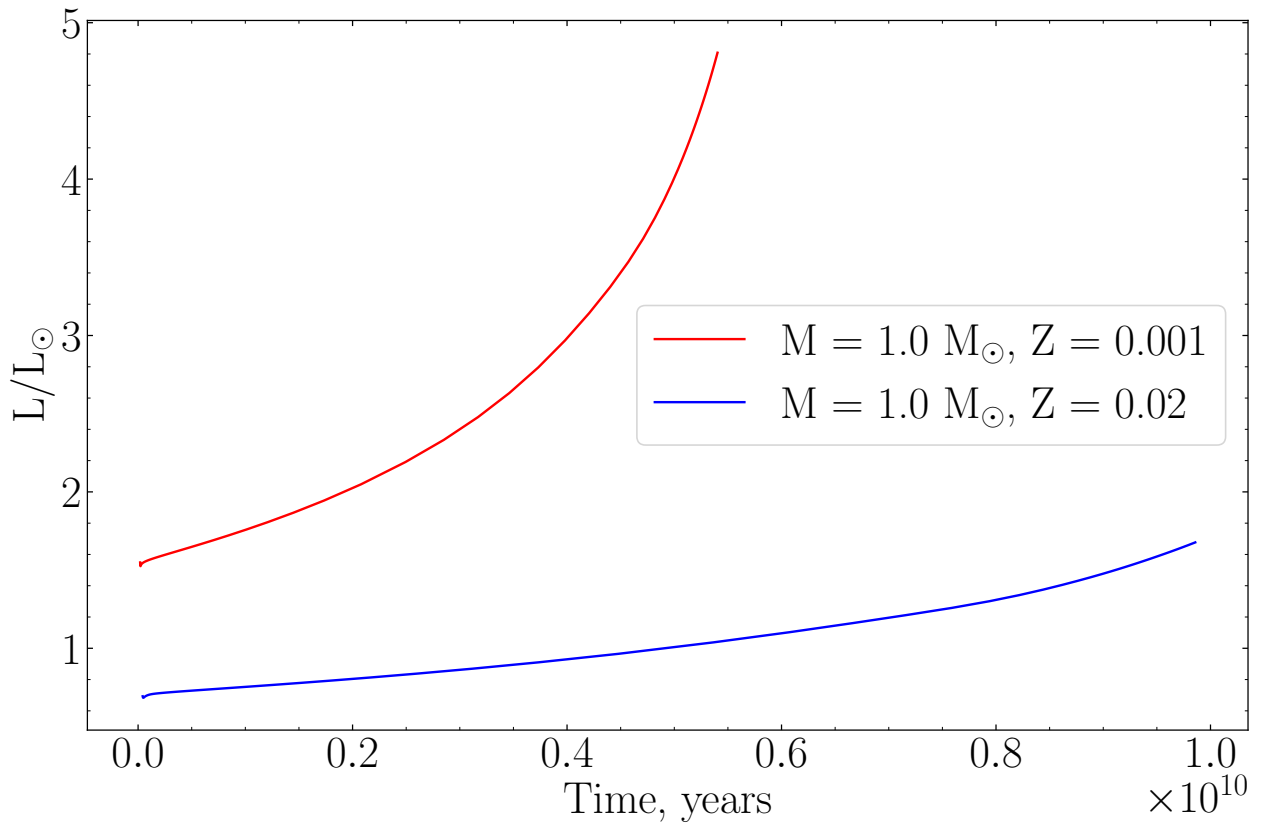


Рис. 5: Данные по светимости в линейном масштабе

лет. Переведём это в джоули и получим полную высвеченную энергию E_1

$$E_1 = 3.9 \cdot 3.88 \cdot 10^{26} \cdot 3.15 \cdot 10^{16} = 4.8 \cdot 10^{43} \text{ Дж.}$$

Число актов р-р цикла будет равно

$$N_1 = \frac{E_0}{4.1 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}} = \frac{4.6 \cdot 10^{44} \text{ Дж}}{4.1 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}} \approx 1.16 \cdot 10^{55} \text{ актов}$$

А число протонов, преобразованных в гелий, будет в четыре раза больше:

$$N_{01} = 4N_1 = 4.66 \cdot 10^{55} \text{ протонов}$$

Изначально в Солнце 70% массы было в виде атомов водорода. Поэтому исходное их количество равно

$$N_0 = \frac{0.70M_{\odot}}{m_p} = \frac{0.7 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{1.67 \cdot 10^{-27}} = 8.4 \cdot 10^{56} \text{ атомов}$$

Оценим массу водорода, которая преобразовалась в гелий в Солнце к настоящему моменту:

$$M_{H|HE} = N_{01} \cdot m_p = 4.66 \cdot 10^{55} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} = 7.8 \cdot 10^{28} \text{ кг} = \boxed{3.9\% M_{\odot}}$$

Полный интеграл под всей кривой равен 10.725 (светимостей Солнца за миллиард лет). Тогда число протонов, которые были преобразованы на Солнце в атомы гелия за всё время существования на ГП, равно

$$N_1 = 4 \frac{E_1}{4.1 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}} = 4 \cdot \frac{10.725 \cdot 3.88 \cdot 10^{26} \cdot 3.15 \cdot 10^{16}}{4.1 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}} = 1.27 \cdot 10^{56} \text{ шт.}$$

Тогда масса водорода, преобразованного в гелий, будет

$$M_{H|HE} = N_1 \cdot m_p = 2.04 \cdot 10^{29} \text{ кг} = 10.6\% M_{\odot}.$$

Следовательно, массовые доли водорода и гелия в Солнце при выходе из ГП будут составлять 59.4% и 40.6% соответственно.

Проделаем ту же самую операцию для звезды, которая образовалась в ранней Вселенной. Такая звезда обладала меньшей металличностью, её светимость была заметно больше, а время жизни на главной последовательности – заметно меньше.

Номер	L_i	L_{i-1}	t	Δt	S_i
1	1.75	1.5	1	1	1.67
2	2.0	1.75	2	1	1.88
3	2.4	2.0	3	1	2.2
4	3.0	2.4	4	1	2.7
5	4	3.0	5	1	3.5
6	4.8	4	5.5	0.5	2.2

Площадь под кривой равна 14.15 светимостей Солнца за миллиард лет. Переведём эту величину в джоули:

$$E_2 = 14.15 \cdot 3.88 \cdot 10^{26} \cdot 3.15 \cdot 10^{16} = 1.7 \cdot 10^{44} \text{ Дж.}$$

Число протонов, которые были преобразованы в атомы гелия, равно

$$N_2 = 4 \frac{E_2}{4.1 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}} = 4 \cdot \frac{14.15 \cdot 3.88 \cdot 10^{26} \cdot 3.15 \cdot 10^{16}}{4.1 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}} = 1.7 \cdot 10^{56} \text{ протонов,}$$

что соответствует массе преобразованного в гелий водорода

$$M_{H|HE} = N_2 \cdot m_p = 2.8 \cdot 10^{29} \text{ кг} = 14\% M_{\odot}$$

Наконец, ответим на вопрос С про количественную долю атомов водорода и гелия. Запишем отношение массовых долей водорода и гелия для Солнца при уходе с главной последовательности:

$$\frac{N_H m_p}{N_{HE} m_{HE}} = \frac{59.4\%}{40.6\%}$$

Выразим отсюда отношение числа атомов водорода к числу атомов гелия:

$$\frac{N_H}{N_{HE}} = \frac{59.4\%}{40.6\%} \cdot \frac{m_{He}}{m_p} \approx 5.85.$$

Следовательно, количественная доля атомов водорода в Солнце будет равна $\eta_H = 5.85/6.85 \approx 85\%$, а гелия $\eta_{HE} = 1/6.85 \approx 15\%$.

Критерии оценивания.**25**

При оценивании данной задачи пропагации ошибок нет.

- К1.** Определение энергии, которая выделяется при одном акте р-р цикла **1**
- К2.** Утверждение, что площадь под кривыми – это полная излучённая энергия..... **2**
- К3.** Снятие точек с диаграммы для Солнца..... **3**
 Пункт оценивается, если снятые с графика значения верны.
 Снято 5 и более точек 3
 ИЛИ снято 3–4 точки..... 2
 ИЛИ снято 2 точки..... 1
- К4.** Определена полная излучённая энергия Солнца до настоящего момента **3**
 Верно использован возраст Солнца в диапазоне 4.5 – 5.0 миллиардов лет 1
 Получена энергия E_1 в джоулях или в электронвольтах 2
- К5.** Определена массовая доля водорода в Солнце, уже превратившегося в гелий **2**
 Определено число актов р-р цикла 1
 Получен численный ответ $3.9\% \pm 0.2\%$ 1
- К6.** Определена полная излучённая энергия Солнца за все время на ГП **2**
- К7.** Определена массовая доля водорода в Солнце, которая превратится в гелий **2**
- К8.** Снятие точек с диаграммы для низкометаллической звезды **3**
 Снято 5 и более точек 3
 ИЛИ снято 3–4 точки..... 2
 ИЛИ снято 2 точки..... 1
- К9.** Определена полная излучённая энергия звезды за всё время на ГП..... **2**
- К10.** Определена массовая доля водорода в звезде, который превратится в гелий **2**
- К11.** Определена количественная доля водорода в звезде, который превратится в гелий .. **3**
 Приведен корректный способ связи массовых и количественных долей 1
 Получено верное значение доли для атомов водорода и гелия..... 2



Практический тур

Условия, решения и схема оценивания. 11 класс

Содержание

11.7. Галактическая клякса.....	2
11.8. Пасхальная задача.....	4
11.9. Бегущий в спектрографе.....	8

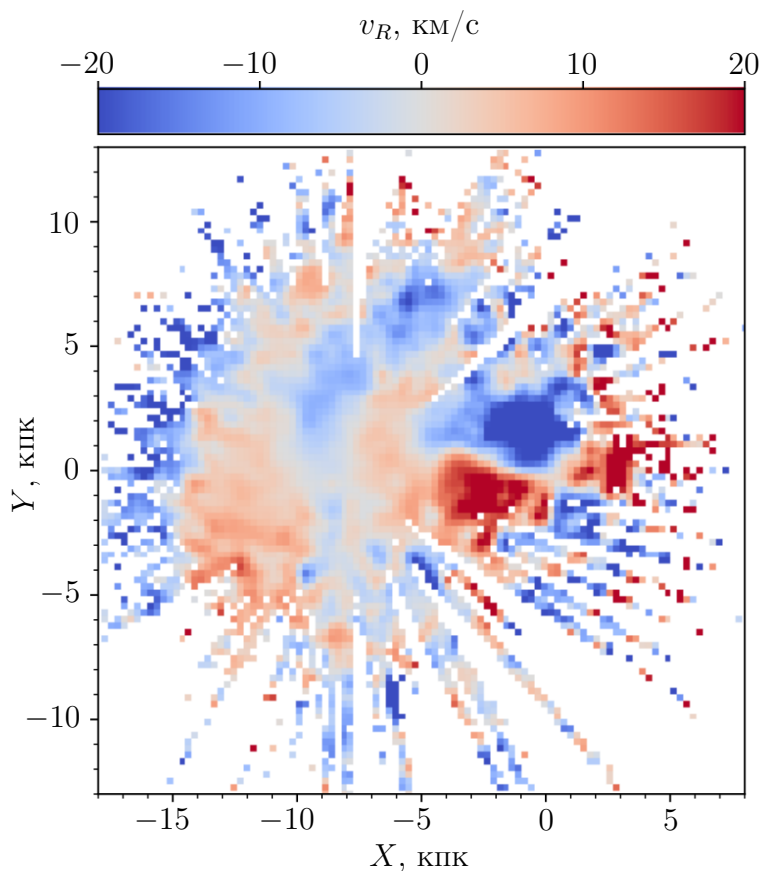
11.7. Галактическая клякса

В.Д.Зозуля

Вам дана карта распределения радиальной компоненты скорости звезд в плоскости диска Галактики относительно ее центра, полученная по данным каталогов GAIA DR2 (параллаксы и угловые скорости) и APOGEE (лучевые скорости и спектры звезд). Исходя из этой карты:

- Оцените расстояние от Солнца до центра Галактики.
- Объясните, почему в центральной области наблюдается такая картина распределения радиальной скорости. Оцените размер большой оси бара и угол его поворота относительно луча «Солнце – центр Галактики».
- В рамках современных представлений считается, что бар не может выходить за пределы радиуса коротации, на котором угловая скорость вращения звезд оказывается равной угловой скорости бара. Исходя из этого, получите верхнюю оценку угловой скорости бара в км/с/кпк.

Мы «смотрим» на плоскость диска Галактики с ее северного полюса, положительные значения радиальной компоненты скорости соответствуют удалению от центра Галактики. Напомним также, что бар — перемычка в центральной области галактики, состоящая из звезд, движущихся по орбитам, вытянутым вдоль большой оси бара, в системе отсчета, вращающейся вместе с баром.



Решение.

- На изображении видно, что центр Галактики отмечен координатами $[0, 0]$, но его положение можно было бы найти как середину симметричной структуры, напоминающей

четыре лепестка (об этой структуре позже). Положение Солнца находится как продолжение «лучей». Это узкие поля обзоров (в частности APOGEE), направленные от Солнца на конкретную область неба. Расстояние до центра Галактики, исходя из изображения, равно примерно 8 кпк.

- В.** Как упоминалось в условии, бар — это структура, состоящая из звезд, которые движутся по вытянутым вдоль большой оси бара орбитам. В таком случае радиальная скорость на орбите должна быть нулевой в точках, находящихся на большой и малой оси бара. В промежутках между ними звезда последовательно увеличивает расстояние от центра (красные области) и уменьшает его (синие области). Отсюда следует, что структура из красных и синих «лепестков» связана с движением звезд по вытянутым вдоль бара орбитам. Следовательно, на изображении линия нулевой скорости (между синей и красной областью) ориентирована вдоль большой оси бара и расположена под углом $15^\circ < \alpha < 30^\circ$ к оси X , размер бара можно оценить по положению концов «лепестков» на расстоянии от 4 до 6 кпк от центра Галактики.

Может ли это быть не большой, а малой осью бара? Так как мы смотрим на Галактику с северного полюса, Солнце на изображении должно двигаться по часовой стрелке, в ту же сторону движутся звезды в баре. Если бы выделенная нами структура была малой осью бара, то красные и синие области поменялись бы местами.

- С.** Известно, что на расстоянии 4–5 кпк кривая вращения Галактики начинает выходить на плато с постоянной скоростью вращения $v \approx 220 - 240$ км/с. Отсюда можно оценить угловую скорость движения звезд по круговым орбитам на конце бара и получить верхнюю оценку на угловую скорость бара $\Omega = v/R = 36 - 60$ км/с/кпк в зависимости от оценки размера бара и скорости вращения Галактики. Надо отметить, что в современных исследованиях угловая скорость бара в среднем оценивается в пределах от 33 до 40 км/с/кпк, хотя встречаются работы и со значением в 25 км/с/кпк. Большой разброс связан с большой погрешностью данных вблизи центра Галактики и разными подходами научных групп к анализу этих данных.

Критерии оценивания.

25

К1. Точки и расстояния между ними	7
• верное обоснованное определение положения центра Галактики	2
• верное обоснованное определение положения Солнца	4
• определение расстояния между двумя точками	1
При отсутствии объяснений: не более 1 балла за каждый подпункт.	
К2. Геометрия бара	12
• верное объяснение наличия границ бара	2
• верное объяснение смены знака лепестков	2
• указание на линию между лепестками как на ось бара	2
• значение большой полуоси бара от 4 до 6 кпк	2
• значение угла от 15° до 30°	2
• объяснение типа полуоси	2
К3. Кинематика бара	6
• верная обоснованная оценка скорости на конце бара	3
• верная формула для угловой скорости бара	1
• оценка угловой скорости бара в интервале от 30 до 60 км/с/кпк	2

11.8. Пасхальная задача

В.В.Григорьев

Вам дана фотография, сделанная на острове Пасхи. На ней видно то, чем в первую очередь известен этот остров — одна из многочисленных каменных статуй моаи. Также на фотографии видны звезды, экваториальные координаты некоторых из них приведены в таблице ниже. Отметим, что самая нижняя яркая точка является фонарем, а не звездой или отражением чего-либо в воде.



Определите (и обязательно опишите методику определения):

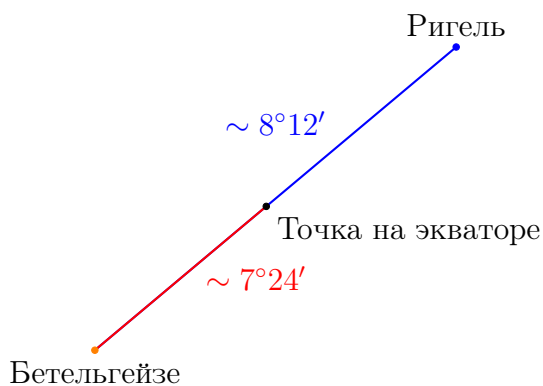
- направление, куда был обращен фотоаппарат во время съемки;
- широту острова;
- звездное время момента съемки;
- дату съемки, в предположении, что фотография сделана точно в местную солнечную полночь;
- расстояние от статуи до фотоаппарата, если известно, что ширина статуи в области груди равна 1.2 м.

Название	α	δ
Альнилам	$5^h 36^m$	$-01^\circ 12'$
Альнитак	$5^h 41^m$	$-01^\circ 57'$
Беллатрикс	$5^h 25^m$	$+06^\circ 21'$
Бетельгейзе	$5^h 55^m$	$+07^\circ 24'$
Минтака	$5^h 32^m$	$-00^\circ 18'$
Ригель	$5^h 15^m$	$-08^\circ 12'$
Саиф	$5^h 48^m$	$-09^\circ 40'$
Сириус	$6^h 45^m$	$-16^\circ 43'$
М42	$5^h 35^m$	$-05^\circ 23'$

Решение.

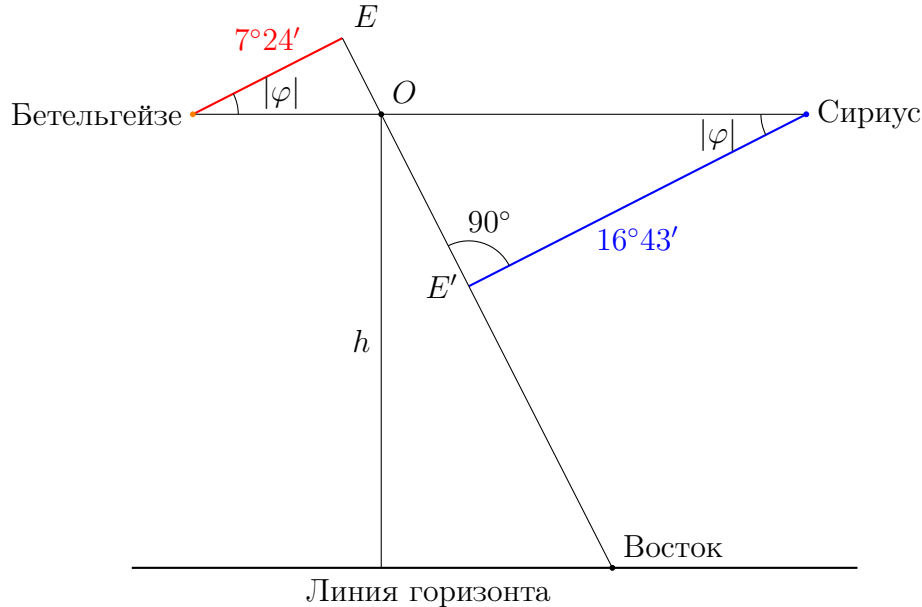
Известно, что остров Пасхи находится в Тихом океане в Южном полушарии. На фотографии виден Орион (причем низко над горизонтом) являющийся экваториальным созвездием, значит, на ней точно присутствует точка востока или запада (пересечение небесного экватора и горизонта). Большая туманность Ориона расположена выше пояса, значит Южное полушарие неба находится справа сверху, то есть мы смотрим на восток, а статуя лицом обращена на юг.

Зная координаты звезд, можно построить небесный экватор и тем самым определить положение точки востока. Первый способ — взять пару звезд из разных полушарий, соединить их отрезком, по известным значениям склонений пропорционально поделить отрезок на два. Точка, которой отрезок делится, и будет лежать на экваторе. Взяв несколько пар звезд (например, Ригель–Беллатрикс, Бетельгейзе–Саиф, Бетельгейзе–Сириус), можно уверенно провести экватор при помощи линейки.



Если отнять от 90 градусов угол между небесным экватором и горизонтом (измерив его транспортиром), то мы как раз получим широту.

Другой (несколько более точный) способ нахождения широты — заметить, что Сириус и Бетельгейзе находятся на одной (небольшой) высоте над горизонтом h (с точностью до «размазывания» их изображений).



Так как меридианы перпендикулярны небесному экватору EE' (см. схему), можно легко записать плоскую теорему синусов (сферическая большого выигрыша в точности не даст, но дополнительные сложности с вычислениями обеспечит) для треугольников Бетельгейзе– E – O и Сириус– E' – O . Координаты звезд записаны с соответствующими индексами B и S . После несложных преобразований получим

$$(|\delta_S| + |\delta_B|) \operatorname{tg} |\varphi| = (\alpha_S - \alpha_B) \quad \Rightarrow \quad |\varphi| = \operatorname{arctg} \frac{0^h 50^m}{24^{\circ} 7'} = 27.4^{\circ}.$$

Теперь найдем прямое восхождение α_O точки O из координат Сириуса и Бетельгейзе:

$$\alpha_O = \frac{\alpha_B \cdot |\delta_S| + \alpha_S \cdot |\delta_B|}{|\delta_B| + |\delta_S|} = \frac{6.75^h \cdot 7.4^{\circ} + 5.92^h \cdot 16.72^{\circ}}{7.4^{\circ} + 16.72^{\circ}} = 6.17^h = 6^h 10^m$$

Можно измерить высоту Сириуса линейкой (именно под ним линия горизонта более надежно прорисовывается) или заметить, что она равна угловому расстоянию между М42 и Сириусом. Тогда по известным координатам находим это расстояние: $h = 20^{\circ} 30'$.

Из геометрических соображений ясно, что

$$\alpha_E = \alpha_O + h / \cos |\varphi| = 6.17^h + 20.5^{\circ} / (15^{\circ/h} \cos 27.4^{\circ}) = 7.71^h = 7^h 43^m.$$

Отнимая от этой величины 6^h (точка востока отстоит от точки экватора, что сейчас в верхней кульминации на 90°) получаем звездное время $s = 1^h 43^m$.

По условию задачи фото сделано в местную солнечную полночь (Солнце — в нижней кульминации под точкой Юга), значит, оно отстоит еще на 90° от точки востока и имеет прямое восхождение $\alpha_\odot = 13^h43^m$, что соответствует датам середины октября (в зависимости от способа счета: при равномерном изменении прямого восхождения или «честно»). В эти дни уравнение времени достигает весьма большого значения $\eta \approx 15^m$. В итоге допустимый разброс дат 14–20 октября.

Осталось получить расстояние от фотоаппарата до статуи. Можно воспользоваться линейкой и масштабом фотографии, который оказывается равным примерно $15' = 1^m$ на 1 мм. Но можно заметить, что угловой размер груди примерно равен угловому расстоянию между Ригелем и Саифом, которое составляет около $8^\circ15'$. Тогда расстояние $L = 8$ метров.

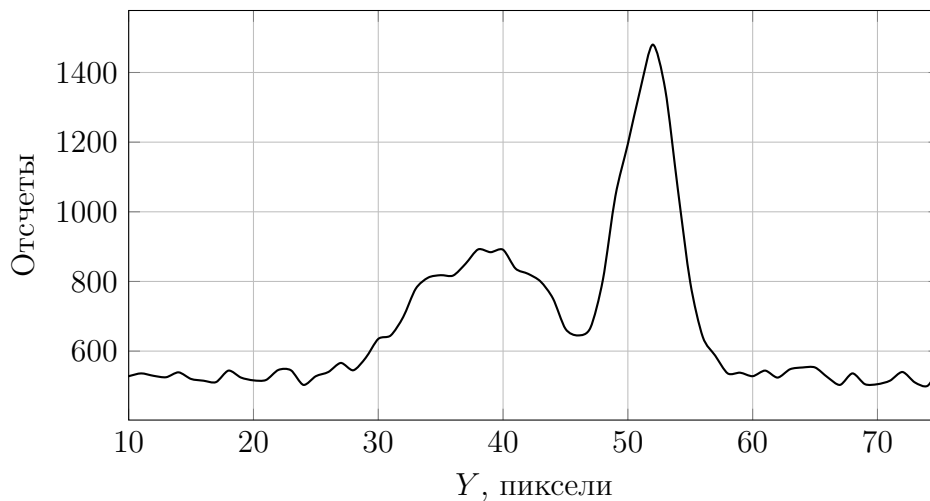
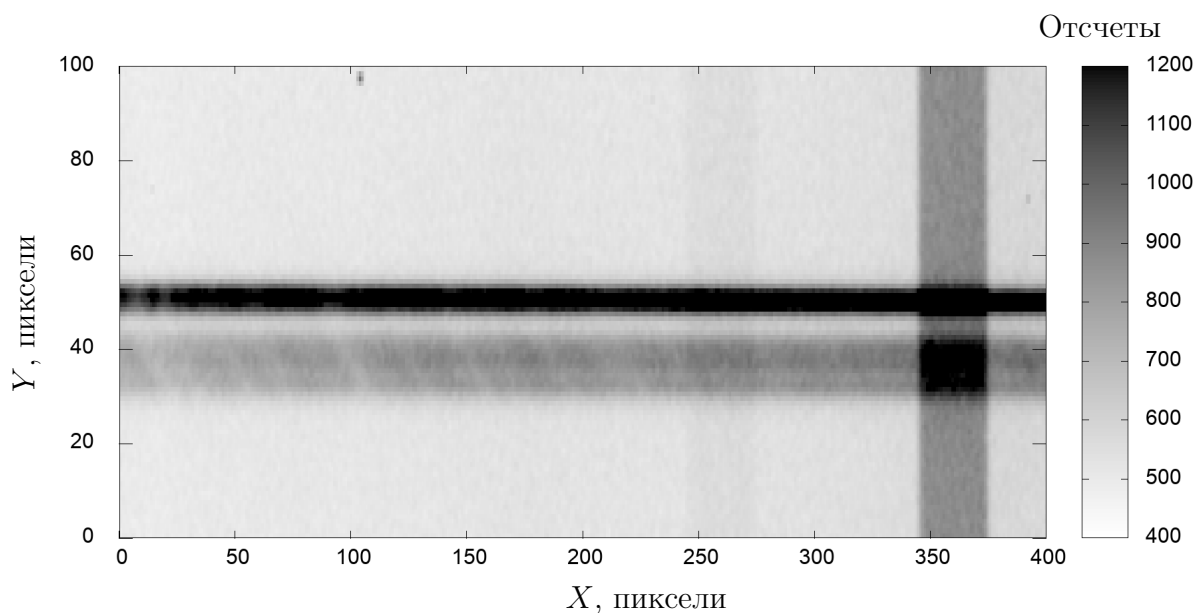
Критерии оценивания.	25
К1. Направление (восток)	4
• Описание методики/рассуждения/чертеж	3
• Итоговый результат	1
К2. Широта ($27^\circ \pm 5^\circ$)	6
• описание метода	3
– по поясу Ориона	2
– по С-Ю звездам	3
– по одинаковой высоте	3
• вычисления/измерения	2
• результат	1
К3. Звездное время ($s = 1^h43^m \pm 20^m$)	5
• описание метода	2
• вычисления	2
• результат	1
К4. Дата (17 ± 3 октября)	5
• описание метода	2
• верное указание на уравнение времени	1
• результат	2
Если дата или параметры Солнца или что-то еще вступают в противоречие сами с собой или условием: не более 1 балла за критерий.	
К5. Расстояние до статуи (8 ± 2 м)	5
• описание метода/чертеж	2
• вычисления/измерения	2
• результат	1

11.9. Бегущий в спектрографе

А.М.Татарников, С.Г.Желтоухов

На 2.5-м телескопе КГО ГАИШ МГУ с использованием спектрографа TDS с входной щелью шириной $10''$ наблюдался небольшой астероид в его «великом» противостоянии. Экспозиция составила 600 секунд, телескоп при этом сопровождал астероид, удерживая его в одном месте фокальной плоскости. На изображении показаны спектры астероида и какой-то звезды поля, а на графике представлен вертикальный разрез этого же спектра в области, свободной от сильных спектральных линий. Известно, что звезда имеет блеск 14.0^m . Оцените звездную величину астероида в момент наблюдения и его характерные размеры, считая, что его альbedo совпадает с альbedo Луны.

Орбитальный период астероида составляет 1100 суток, эксцентриситет орбиты 0.45, наклон орбиты равен 0° . На спектре координата $X_0 = 360$ соответствует длине волны 5577 \AA , 1 пиксель по оси X соответствует 1 \AA . Пиксели на ПЗС-матрице квадратные, изображение растянуто по вертикали для удобства восприятия



Решение.

На изображении мы видим один из спектров с сильно наклоненными линиями. В данном случае наклон возникает не из-за быстрого вращения объекта, а из-за того, что попавшая в щель звезда медленно двигалась внутри большой щели спектрографа вследствие слежения телескопа не за звездами, а за двигающимся относительно них астероидом. Верхний узкий спектр и является спектром астероида. Также на изображении видны широкие вертикальные полосы, которые являются линиями излучения неба.

По кадру можно определить, что ширина линии неба составляет примерно 28 пикселей, что соответствует $10''$ дуги на небе. Ширина же проекции наклонной линии в спектре звезды на ось длин волн составляет примерно 14 пикселей. Это означает, что звезда экспонировалась только в конце или в начале кадра и не успела пройти всю щель за экспозицию (что мы более точно определим в дальнейшем). Полная длина наклонной линии в спектре звезды примерно 20 пикселей или примерно $7''$. Для оценки времени, в течение которого экспонировался спектр звезды, найдем угловую скорость астероида, учитывая, что он находится в противостоянии и в перигелии.

Большая полуось орбиты астероида $a = T^{2/3} = 2.09$ а.е. Соответственно, расстояние до Земли $r_e = a \cdot (1 - e) - 1 = 0.15$ а.е. Также мы можем найти скорость движения этого астероида, зная орбитальную скорость Земли $V_e \approx 30$ км/с:

$$V_a = \frac{V_e}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \approx 34 \text{ км/с.}$$

Далее мы находим угловую скорость астероида относительно звезд, разделив относительную скорость на расстояние до Земли. Получаем

$$\omega = \frac{V_a - V_e}{r_e} = 0.035''/\text{с.}$$

Зная, что звезда прошла по щели $7''$, находим время экспонирования звезды

$$T_s = \frac{7}{\omega} \approx 200 \text{ с,}$$

что составляет треть от времени экспозиции астероида.

Далее нам необходимо определить отношения сигналов от астероида и звезды в спектре. Для этого обе кривые на графике среза спектра можно примерно аппроксимировать трапециями и найти их площади, не забыв предварительно вычесть фон. Получаем, что от астероида за время T_{exp} получено 4500 отсчетов, а от звезды за время T_s — 5300 отсчетов. Таким образом, звездная величина астероида

$$m_a = m_s - 2.5 \lg \left(\frac{5300/T_{exp}}{4500/T_s} \right) \approx 15^m.$$

Получается, что астероид более чем на 1^m слабее попавшей в поле зрения телескопа звезды, несмотря на то, что его спектр выглядит ярче. Теперь оценим линейный размер астероида по его яркости, сравнив этот астероид с Луной в полнолунии. Астероид дальше Луны в $0.15 \text{ а.е.}/384400 \text{ км}$ раз, и одновременно в $2.512^{12.7+15}$ раз слабее. Также надо учесть, что

астероид находится чуть дальше от Солнца, чем Луна, хотя, с учетом точности исходных для данного этапа данных, это не строго обязательно.

Отсюда мы получаем, что диаметр астероида составляет примерно $1/5000$ диаметра Луны, то есть около 700 метров.

Отметим, что в условии задачи представлены реальные наблюдения астероида Eris. Во время наблюдений он находился в более сложной для расчета точке, но двигался с такой же угловой скоростью, как и в задаче. Следует также отметить, что при попытке посчитать скорость вращения «астероида» по наклону линий в спектре звезды, получится скорость более 300 км/с, что совершенно нереалистично.

Критерии оценивания.	25
К1. Измерения спектра	4
• Указание, где звезда, а где астероид	2
• Измерение ширины спектральной линии/щели в пикселях	1
• Измерение длины трека звезды в пикселях	1
К2. Движение звезды	6
• Вывод о том, что звезда наблюдалась не всю возможную экспозицию	3
• Расчёт углового перемещения звезды	3
К3. Угловая скорость астероида	7
• Большая полуось	1
• Расстояние до Земли	2
• Линейная скорость	2
• Угловая скорость	2
К4. Обработка графика интенсивности спектра	4
• Получение потока от звезды	2
• Получение потока от астероида	2
• При игнорировании ширины спектра	-2
• При игнорировании величины фона	-2
• Игнорирование обоих факторов	-3
К5. Вычисление параметров астероида	4
• Вычисление звездной величины	2
– При игнорировании любого из факторов прошлого критерия	1
• Вычисление размера астероида	2