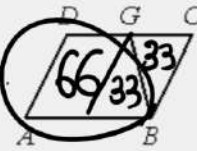


1

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 132. Точка G — середина стороны CD .



Найдите площадь трапеции $ABGD$.

2695F1

$$66 + 33 = 99$$

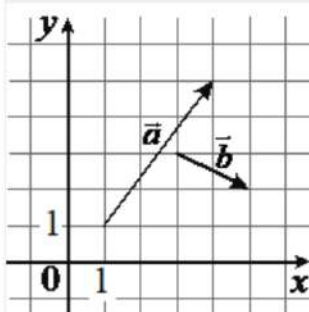
ОТВЕТ | 9 | 9

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна (Резерв) 2024
 Основная волна 2023
 Основная волна 2017
 Основная волна (Резерв) 2013

2

На координатной плоскости изображены векторы \vec{a} и \vec{b} , координатами которых являются целые числа. Найдите длину вектора $\vec{a} + 4\vec{b}$.



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \vec{a} & (3; 4) \\ \vec{b} & (2; -1) \\ 4\vec{b} & (8; -4) \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \vec{a} + 4\vec{b} = (11; 0)$$

$$\textcircled{3} |\vec{a} + 4\vec{b}| = \sqrt{11^2 + 0^2} = \sqrt{121} = 11$$

579B74

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна (Резерв) 2024
 Основная волна 2024

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Если $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то

$$\vec{AB} (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$$

УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Если $\vec{a}(2; 3)$, то

$$2\vec{a}(4; 6)$$

СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Если $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$$

ДЛИНА ВЕКТОРА

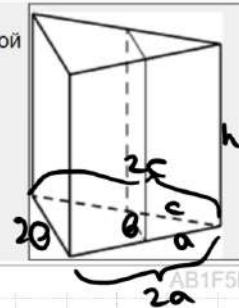
Если $\vec{a}(x; y)$, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ОТВЕТ | 1 | 1

3

Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 37. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



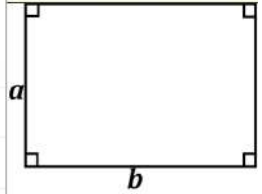
$$S_{\text{бок. макс}} = ah + bh + ch = 37$$

$$S_{\text{бок. макс.}} = 2ah + 2bh + 2ch = 2 \cdot (ah + bh + ch) = 2 \cdot 37 = 74$$

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Досрочная волна (Резерв) 2023
 Досрочная волна 2022
 Основная волна (Резерв) 2019
 Основная волна 2018
 Досрочная волна 2015

ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА



$$S = a \cdot b$$

ОТВЕТ 74

4

Научная конференция проводится в 4 дня. Всего запланировано 80 докладов — первые два дня по 12 докладов, остальные распределены поровну между третьим и четвёртым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

569129

- ① 12
 ② 12
 ③ 28
 ④ 28
- } 80

$$P = \frac{28}{80} = \frac{7 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{35}{100} = 0,35$$

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна (Резерв) 2023
 Основная волна (Резерв) 2022
 Основная волна 2017
 Основная волна 2016
 Пробный ЕГЭ 2015

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

$$p = \frac{\text{благоприятные исходы}}{\text{все исходы}}$$

ОТВЕТ 0,35

5

Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

4 1 1
 1 4 1
 1 1 4
 3 2 1
 3 1 2
 2 1 3
 2 3 1
 1 3 2
 1 2 3
 2 2 2

$$p = \frac{6}{10} = 0,6$$

ОТВЕТ 0,6

ИСТОЧНИКИ

Демо 2024
 Демо 2023
 Демо 2022

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

$p = \frac{\text{благоприятные исходы}}{\text{все исходы}}$

6

Найдите корень уравнения $6^{1+3x} = 36^{2x}$.

93C4F3

$$6^{1+3x} = (6^2)^{2x}$$

$$6^{1+3x} = 6^{4x}$$

$$1+3x = 4x$$

$$1 = x$$

ОТВЕТ 1

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)

Демо 2024
 Демо 2023
 Демо 2022
 Демо 2021
 Демо 2020
 Демо 2019
 Демо 2018
 Демо 2017
 Демо 2016
 Демо 2015

Основная волна 2023
 Основная волна 2022
 Основная волна 2021
 Основная волна 2020
 Основная волна 2019
 Основная волна 2017
 Основная волна 2016
 Основная волна 2013
 Досрочная волна 2024

СТЕПЕНИ

1 $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2 $a^n : a^m = a^{n-m}$

3 $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

4 $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

5 $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

6 $a^0 = 1$

7 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

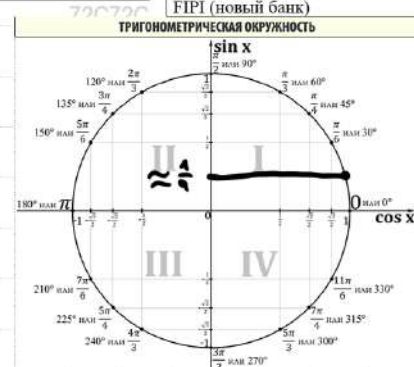
8 $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

7

Найдите значение выражения

$$\frac{-6 \sin 34^\circ}{\sin 14^\circ} = -6$$

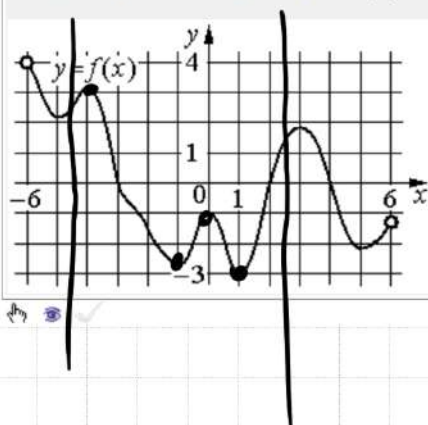
ИСТОЧНИКИ

 ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)


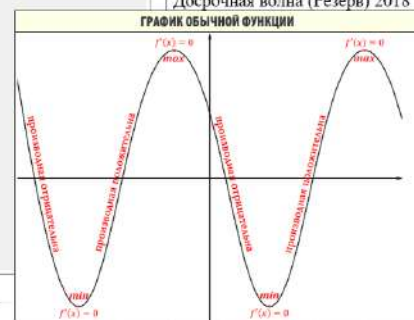
ОТВЕТ | - 6

8

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[-4,5; 2,5]$.



ИСТОЧНИКИ

 ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Досрочная волна (Резерв) 2018


ОТВЕТ | 4

9

Сила тока в цепи I (в А) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону

Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение (в В), R — сопротивление электроприбора (в Ом). В электросеть

включен предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 2,5 А. Определите, какое наименьшее сопротивление может быть у электроприбора, подключаемого к сети в 220 В, чтобы сеть продолжала работать. Ответ дайте в омах.

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна 2019
 Основная волна 2018

06534C

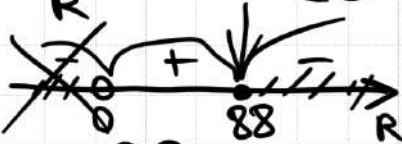
$$I \leq 2,5$$

$$\frac{U}{R} \leq 2,5$$

$$\frac{220}{R} \leq 2,5$$

$$\frac{220^{11}}{R} - \frac{2,5^{11}R}{1} \leq 0$$

$$\frac{220 - 2,5R}{R} \leq 0$$



ОТВЕТ 88

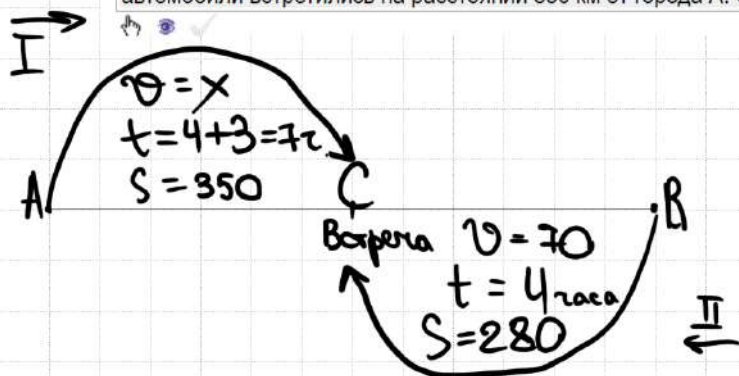
10

Расстояние между городами А и В равно 630 км. Из города А в город В выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 70 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 350 км от города А. Ответ дайте в км/ч.

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна (Резерв) 2023
 Основная волна 2019

305DDD

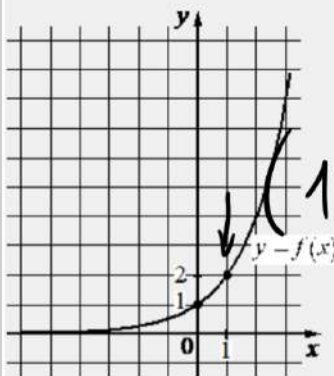


$$x = \frac{350}{7} = 50$$

ОТВЕТ 50

11

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(4)$.



$$\textcircled{1} 2 = a^1$$

$$a = 2$$

$$f(x) = 2^x$$

$$\textcircled{2} f(4) = 2^4 = 16$$

38A32C

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна 2024
 Досрочная волна 2023
 Основная волна 2022

ОТВЕТ | 16

12

Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 6x - 5$$

на отрезке $[9; 36]$.

2F96EF

$$\textcircled{1} y = \frac{2}{3} \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} - 6x - 5$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - 6x - 5$$

$$\textcircled{2} y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x} = 6$$

$$x = 36 \quad \checkmark$$

$$\textcircled{3} y(9) = -41$$

$$y(36) = -77$$

ОТВЕТ | -77

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна 2023
 Досрочная волна 2022

ПРОИЗВОДНЫЕ

1	$C' = 0$
2	$x' = 1$
3	$(Cx)' = C$
4	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
5	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
7	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
8	$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
9	$(\sin x)' = \cos x$
10	$(\cos x)' = -\sin x$
11	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(e^x)' = e^x$
14	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
15	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
16	$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

$$x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{3}; \sqrt{20}]$.

а) $x + 1 = 3 \cdot \sqrt{x-1}$
 $\sqrt{x-1} = \frac{x+1}{3}$

① $\frac{x+1}{3} \geq 0$
 ② $x-1 = \left(\frac{x+1}{3}\right)^2$

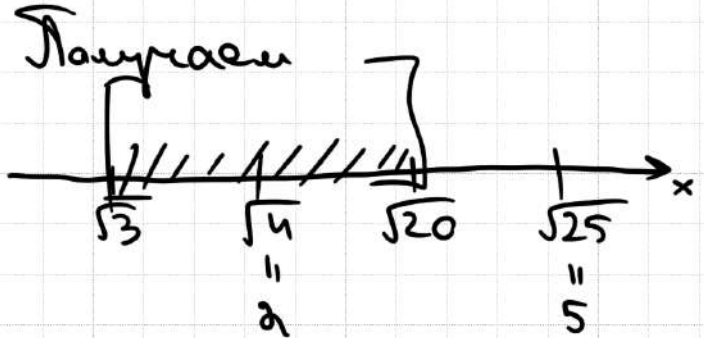
① $x+1 \geq 0$
 $x \geq -1$

② $x-1 = \frac{x^2+2x+1}{9}$
 $9x-9 = x^2+2x+1$
 $x^2-7x+10 = 0$
 $x=2 \quad x=5$

Получаем
 $x=2 \quad x=5$

Ответ: а) 2; 5
 б) 2.

б) $2 = \sqrt{4}$
 $5 = \sqrt{25}$



$2 \in [\sqrt{3}; \sqrt{20}]$
 $5 \notin [\sqrt{3}; \sqrt{20}]$

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 6 : 1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 3 : 4$, а точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 30$, $AA_1 = 35$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
 б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

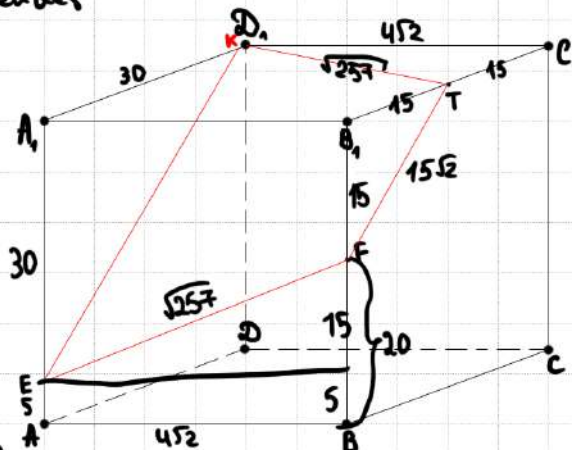
ИСТОЧНИКИ
 ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Гордин #14 2019

а) Сечение пересекает паралл. грани по паралл. прямым

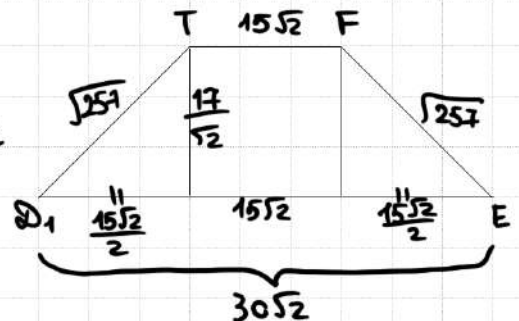
Пусть $EK \parallel FT$
 $\Delta B_1 FT$ — равнов. и прямоуг.

$\Delta A_1 KE \sim \Delta B_1 FT$
 $\Rightarrow \Delta A_1 KE$ — равнов. и прямоуг.

$A_1 K = 30$ ИЛИ $A_1 D_1 = 30$
 Значит точки K и D_1 совпадают
 $\Rightarrow D_1 \in (EFT)$



б) $EFT D_1$ — трапеция
 $D_1 T = \sqrt{\dots} = \sqrt{257}$
 $EF = \sqrt{\dots} = \sqrt{257}$
 т.е. трапеция — р/б.



$$S = \frac{15\sqrt{2} + 30\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{17}{\sqrt{2}} = 382,5$$

Ответ: 382,5.

$$9^x - 3^x - 3^{1-x} + \frac{1}{9^{x-1}} \leq 6.$$

$$\frac{9^x}{1} - \frac{3^x}{1} - \frac{3}{3^x} + \frac{9}{9^x} - \frac{6}{1} \leq 0$$

Пусть $3^x = t$

$$\frac{t^2}{1} - \frac{t}{1} - \frac{3}{t} + \frac{9}{t^2} - \frac{6}{1} \leq 0$$

$$\frac{t^4 - t^3 - 6t^2 - 3t + 9}{t^2} \leq 0$$

Заметим, что при $t=1$ числитель др. в нуль

$$\begin{array}{r} t^4 - t^3 - 6t^2 - 3t + 9 \\ - t^4 - t^3 \\ \hline -6t^2 - 3t + 9 \\ -6t^2 + 6t \\ \hline -9t + 9 \\ -9t + 9 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} t-1 \\ \hline t^3 - 6t - 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} t^3 - 6t - 9 \\ t(t-3)(t+3) + 3(t-3) \\ (t-3)(t^2 + 3t + 3) \end{array}$$

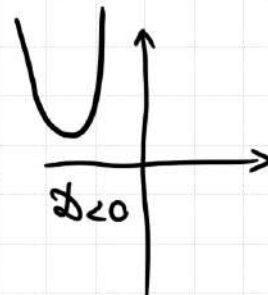
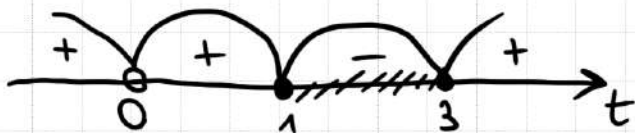
Заметим, что при $t=3$ др. в нуль

$$\begin{array}{r} t^3 - 6t - 9 \\ - t^3 - 3t^2 \\ \hline 3t^2 - 6t - 9 \\ 3t^2 - 9t \\ \hline +3t - 9 \\ 3t - 9 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} t-3 \\ \hline t^2 + 3t + 3 \end{array}$$

Получаем

$$\frac{(t-1)(t-3)(t^2+3t+3)}{t^2} \leq 0$$

Заметим, что $t^2 + 3t + 3 > 0$ при любом t



$$1 \leq t \leq 3$$

$$1 \leq 3^x \leq 3$$

$$3^0 \leq 3^x \leq 3^1$$

$$0 \leq x \leq 1$$

Ответ: $[0; 1]$

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и банку будет выплачено 311 040 рублей?

Пусть S – сумма долга
 июль – месяц взятия
 x – ежегодный платеж

Дата	Сумма долга
и 20	S
я 21	$1,2 \cdot S$
ф 21	$1,2 \cdot S - x$
я 22	$1,2^2 \cdot S - 1,2x$
ф 22	$1,2^2 \cdot S - 1,2x - x$
я 23	$1,2^3 \cdot S - 1,2^2x - 1,2x$
ф 23	$1,2^3 \cdot S - 1,2^2x - 1,2x - x$
я 24	$1,2^4 \cdot S - 1,2^3x - 1,2^2x - 1,2x$
ф 24	$1,2^4 \cdot S - 1,2^3x - 1,2^2x - 1,2x - x = 0$

① Общая сумма выплат $311\,040 = 4x$
 $x = 77\,760$

② $\frac{6^4}{5^4} \cdot S = \frac{6^3}{5^3}x + \frac{6^2}{5^2}x + \frac{6}{5}x + \frac{x}{1}$

$$\frac{6^4}{5^4} \cdot S = \frac{216x + 180x + 150x + 125x}{5^3}$$

$$\frac{6^4}{5^4} \cdot S = \frac{671 \cdot x}{5^3}$$

$$S = \frac{671 \cdot 77\,760 \cdot 10 \cdot 5}{5^3 \cdot 6^4}$$

$$S = 671 \cdot 300 = 201\,300 \text{ р.}$$

Ответ: 201 300 р.

ФИР (старый банк)
 ФИР (новый банк)
 Основная волна 2024
 Досрочная волна 2023
 Досрочная волна 2018

В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M .

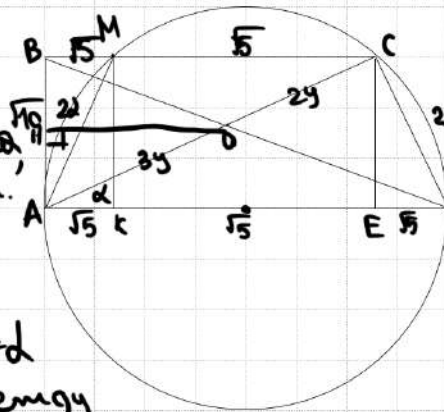
а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$.

б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника AOB , если $AB = \sqrt{10}$, а $BC = 2BM$.

а) Пусть $\angle CAD = d$
 Тогда $\angle CDM = 2d$
 $AMCD$ - р/б. трапеция,
 т.к. $AD \parallel CM$ и трап.
 впис. в окр.
 $\angle AM = \angle CD = 2d$
 $\angle BAM = \frac{1}{2} \angle AM = d$
 (по т. об угле между
 кас. и хордой)

Получаем

$$\angle BAM = d = \angle CAD \quad \blacksquare$$



б) ① Пусть $BM = x$
 $CM = x$
 $BC = 2x$

по т. о кас. и сек

$$AB^2 = BM \cdot BC$$

$$10 = x \cdot 2x$$

$$2x^2 = 10$$

$$x = \sqrt{5}$$

② $\triangle AOD \sim \triangle BOC$ по 2 углам

$$k = \frac{AO}{CO} = \frac{AD}{BC} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$$

③ $\triangle ABC \sim \triangle AOK$ по 2 углам

$$\frac{BC}{OK} = \frac{AC}{AO} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{OK} = \frac{5}{3} \quad OK = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

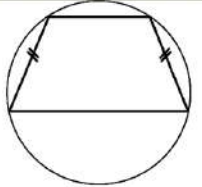
$$S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{6\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{2}$$

Ответ: $3\sqrt{2}$.

ИСТОЧНИКИ

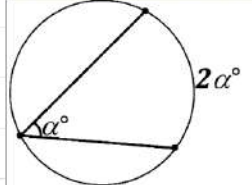
ФИПИ (старый банк)
 ФИПИ (новый банк)
 Основная волна 2017

РАВНОБЕДРЕННАЯ ТРАПЕЦИЯ



Если трапеция вписана в окружность, то она - равнобедренная

ТЕОРЕМА О ВПИСАННОМ УГЛЕ

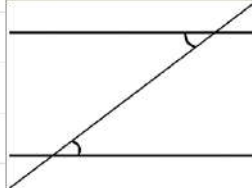


Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается

ТЕОРЕМА ОБ УГЛЕ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ХОРДОЙ



НАКРЕСТ ЛЕЖАЩИЕ УГЛЫ



Если внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны (признак параллельности прямых)

СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

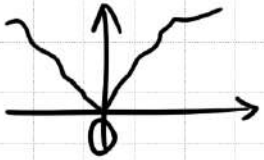
$$x^2 + (a+7)^2 = |x-7-a| + |x+a+7|$$

имеет единственный корень.

$$\textcircled{1} x^2 + (a+7)^2 - |x-7-a| - |x+a+7| = 0$$

Пусть $f(x) = x^2 + (a+7)^2 - |x-7-a| - |x+a+7|$
 $f(-x) = (-x)^2 + (a+7)^2 - |-x-7-a| - |-x+a+7| =$
 $= x^2 + (a+7)^2 - |x+7+a| - |x-a-7|$

$f(-x) = f(x)$, значит $f(x)$ — чётная ф-ция
 единственный корень чётная ф-ция может иметь только если $x=0$



$\textcircled{2}$ Найдем \bigcirc , при которых $x=0$

$$0^2 + (a+7)^2 = |0-7-a| + |0+a+7|$$

$$(a+7)^2 = |a+7| + |a+7|$$

$$|a+7|^2 - 2|a+7| = 0$$

$$|a+7| \cdot (|a+7| - 2) = 0$$

$$|a+7| = 0$$

$$a = -7$$

$$|a+7| = 2$$

$$a+7 = 2$$

$$a = -5$$

$$a+7 = -2$$

$$a = -9$$

$\textcircled{3}$ Проверим, при каких из этих \bigcirc будет единств. реш.

Если $a = -7$

$$x^2 = |x| + |x|$$

$$|x|^2 - 2|x| = 0$$

$$|x| \cdot (|x| - 2) = 0$$

$$x=0 \quad x=\pm 2$$

3 решения

$$a \neq -7$$

Если $a = -5$, то

$$x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$$

При $x \geq 2$ $x^2 + 4 = x - 2 + x + 2$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

нет реш.

При $-2 \leq x \leq 2$ $x^2 + 4 = -x + 2 + x + 2$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

При $x < -2$ $x^2 + 4 = -x + 2 - x - 2$

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

нет реш.

При $a = -5$ единств. реш. $x=0$

Ответ: $\{-9; -5\}$

На доске написано n единиц подряд. Между некоторыми из них расставляют знаки «+» и считают получившуюся сумму. Например, если было написано 10 единиц, то можно получить сумму 136: $1+1+111+11+11+1=136$

- а) Можно ли получить сумму 141, если $n = 60$?
 б) Можно ли получить сумму 141, если $n = 80$?
 в) Для скольких значений n можно получить сумму 141?

а) Да, если взять 9 раз по 11
и 42 раза по 1
 Ответ: а) да

б) Можно ли брать 111?

$$S \geq 111 + 77 \cdot 1$$

$$S \geq 188$$

⇒ можно использовать только 1 и 11

Если взять 10 слагаемых 11, то $S = 110 + 60$
x

в) Для скольких значений n можно получить сумму 141?

б) 1) Числа 111 и больше использовать нельзя

2) Число 11 можно использовать только 1 раз

с 9 раз по 11	с 8 раз по 11	с 7 раз по 11
$111 + 8 \cdot 11 + 8 \cdot 1$	$111 + 11 + 19 \cdot 1$	$111 + 30 \cdot 1$
<u>$n = 15$</u>	<u>$n = 24$</u>	<u>$n = 33$</u>

3) Число 11 использовать только число 11 и 1
 Число 11 можно использовать не более 12 раз

Если 11 использовать 12 раз, то	$12 \cdot 11 + 9 \cdot 1$	<u>$n = 33$ (уже было)</u>
11 раз, то	$11 \cdot 11 + 20 \cdot 1$	<u>$n = 42$</u>
10		<u>$n = 51$</u>
9		<u>$n = 60$</u>
8		<u>$n = 69$</u>
7		<u>$n = 78$</u>
6		<u>$n = 87$</u>
5		<u>$n = 96$</u>
4		<u>$n = 105$</u>
3		<u>$n = 114$</u>
2		<u>$n = 123$</u>
1		<u>$n = 132$</u>
0		<u>$n = 141$</u>

Ответ: в) 15.

Если взять > 10 слагаемых 11, то
 $S > 170$

Если взять 9 слаг. 11, то $S = 161$ x
 8 слаг. 11, то $S = 152$ x
 7 слаг. 11, то $S = 143$ x
 6 слаг. 11, то $S = 134$ x

Если взять < 6 , то $S < 134$,
 т.е. получить 141 невозможно