МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
2024–2025 УЧЕБНОГО ГОДА

Комплект заданий для учеников 11 классов

Уважаемый участник Олимпиады!

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но и рассуждение, приводящее к этому ответу. Приведённый ответ без соответствующего рассуждения не может рассматриваться как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами полного балла за задачу (если только решение задачи не подразумевает приведение конкретного примера). Задача признается решённой, если в предложенном тексте достаточно явно изложены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько исчерпывающе эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается от 50 до 100 процентов от полного балла.

2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.

3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.

4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание Вашего рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.

5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте.

6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

Максимальная оценка — 42 балла.

Время на выполнение заданий — 3 часа 55 минут.

Желаем вам успеха!

11.1. Пусть $P(x) = x^2 - 38x - 80$. Решите уравнение

$$P(x) = P\left(\frac{x+4}{x+1}\right).$$

11.2. Пусть площадь трапеции равна 1. Какую наименьшую величину может иметь её наибольшая диагональ?

11.3. У фокусника есть 25 цилиндров, ровно в двух из которых сидит по одному кролику. За один вопрос можно указать на один или два цилиндра и спросить, сидит ли там хотя один кролик (фокусник честно Вам ответит «да» или «нет»). За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно найти хотя бы один цилиндр с кроликом? Ответ обоснуйте.

11.4. Пусть $x, y, z \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos y &= \sin z, \\ \cos x \sin y &= \cos z. \end{cases}$$

11.5. В каждую грань треугольной пирамиды вписали окружность. Оказалось, что все четыре вписанных окружности попарно касаются друг друга. Затем из центра каждой окружности построили перпендикуляр к той грани пирамиды, в которой находится эта окружность. Докажите, что все четыре построенных перпендикуляра пересекаются в одной точке.

11.6. 9 шахматистов сыграли двухкруговой шахматный турнир: в каждом круге каждый участник сыграл с каждым одну партию. Известно, что после первого круга у всех участников было разное количество очков. Могло ли так случиться, что по окончании турнира у всех участников снова было разное количество очков, но при этом шахматисты расположились (по количеству набранных очков) в порядке, обратном тому, какой был после первого круга. Ответ обоснуйте. В шахматах за победу дается 1 очко, за ничью — пол-очка, за поражение — 0 очков.

Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2024 – 2025 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применение критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказа-

тельств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

10) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. **+79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2024 – 2025 учебном году
11 класс

Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут

11.1. *Пусть* $P(x) = x^2 - 38x - 80$. *Решите уравнение*

$$P(x) = P\left(\frac{x+4}{x+1}\right).$$

Решение: Графиком функции $y = P(x)$ является парабола, поэтому равенство $P(a) = P(b)$ выполнено в двух случаях: либо $a = b$, либо точки a и b симметричны относительно точки x_0 — абсциссы вершины параболы, то есть выполнено условие $a + b = 2x_0$. (Эти же равенства легко получаются формальной подстановкой функции P в уравнение.) В первом случае имеем

$$x = \frac{x+4}{x+1},$$

откуда $x = \pm 2$, во втором (с учётом равенства $x_0 = \frac{38}{2\cdot 1} = 19$) —

$$x + \frac{x+4}{x+1} = 38,$$

откуда $x = 18 \pm \sqrt{358}$.

Ответ: $x = \pm 2$, $x = 18 \pm \sqrt{358}$.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	6 баллов
Доказано, что уравнение равносильно совокупности уравнений $x = \frac{x+4}{x+1}$ и $x + \frac{x+4}{x+1} = 38$ и одно из них верно решено	4 балла
Доказано, что уравнение равносильно совокупности уравнений $x = \frac{x+4}{x+1}$ и $x + \frac{x+4}{x+1} = 38$, но эти уравнения не решены	3 балла
Решение верно сведено к нахождению корней многочлена четвёртой степени	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

11.2. *Пусть площадь трапеции равна 1. Какую наименьшую величину может иметь её наибольшая диагональ?*

Решение:

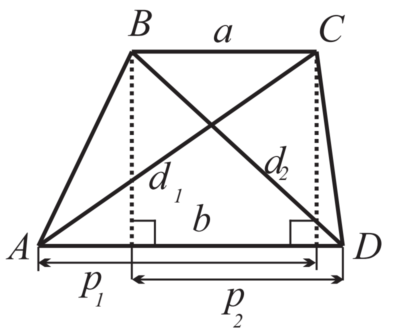
<u>Способ 1.</u> Пусть диагонали трапеции равны d_1 и d_2 ($d_1 \geqslant d_2$), угол между ними равен α, площадь трапеции равна S. Тогда

$$1 = S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha \leqslant \frac{1}{2}d_1^2 \cdot 1,$$

откуда $d_1 \geqslant \sqrt{2}$. Пример, когда наибольшая диагональ равна $\sqrt{2}$, даёт равнобедренная трапеция с перпендикулярными диагоналями.

Примечание: Как следует из приведённого доказательства, задача (и ответ к ней) не меняется, если вместо трапеции рассматривать произвольный выпуклый четырёхугольник.

<u>Способ 2.</u> Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями $BC = a$, $AD = b$ высотой h и диагоналями $AC = d_1$, $BD = d_2$ ($d_1 \geqslant d_2$). Пусть $AC_1 = p_1$ — проекция AC на прямую AD, $DB_1 = p_2$ — проекция BD на прямую AD (см. рисунок). Можно считать, что обе проекции целиком лежат внутри основания AD: в противном случае длина диагоналей не наименьшая, так как сдвинув верхнее основание параллельно нижнему, мы получим трапецию той же площади, у которой большая диагональ уменьшились.



К решению задачи 11.2, способо 2

Ясно, что $p_1 + p_2 = a + b$. $d_1 \geqslant d_2$, поэтому $p_1 \geqslant p_2$, следовательно,

$$p_1 \geqslant \frac{a+b}{2}.$$

По условию имеем

$$1 = S_{ABCD} = \frac{a+b}{2}\cdot h \leftrightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{1}{h} \Rightarrow d_1^2 = p_1^2 + h^2 \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + h^2 \geqslant \frac{1}{h^2} + h^2 \geqslant 2,$$

причём равенство в последнем неравенстве достигается при $h = 1$. Поэтому наименьшее значение d_1 равно $\sqrt{2}$, и оно достигается на равнобедренной трапеции с перпендикулярными диагоналями.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что длина большей из диагоналей не меньше $\sqrt{2}$	3 балла
Приведён пример трапеции, на которой достигается минимум большей диагонали (равнобедренная с наклоном диагоналей $45°$)	2 балла
Примеры «неоптимальных» трапеций и/или неточные оценки	0 баллов

11.3. *У фокусника есть 25 цилиндров, ровно в двух из которых сидит по одному кролику. За один вопрос можно указать на один или два цилиндра и спросить, сидит ли там хотя один кролик (фокусник честно Вам ответит «да» или «нет»). За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно найти хотя бы один цилиндр с кроликом? Ответ обоснуйте.*

Решение: Покажем, что достаточно 12 вопросов. Распределим цилиндры на 11 пар и одну тройку. Первыми 11-ю вопросами спросим про все пары. Если среди полученных ответов есть хоть один положительный, то мы нашли пару цилиндров, в которой сидит хотя бы один кролик. Тогда 12-м вопросом спрашиваем про любой из двух цилиндров этой пары и находим этого кролика. Пусть все ответы на первые 11 вопросов отрицательны. Значит, оба кролика сидят в двух цилиндрах из тройки. 12-м вопросом спросим про один из этих трёх цилиндров. Если ответ «да», то цилиндр найден. Если «нет» — оба кролика в двух цилиндрах, про которые не спрашивалось — найдены оба.

Покажем, что 11 вопросов может не хватить. Действительно, пусть на все наши вопросы последовал ответ «нет». Тогда оба кролика в тех цилиндрах, про которые мы не спросили, а этих цилиндров не меньше 3 (ведь мы можем спросить максимум про $2 \cdot 11 = 22$ цилиндра). Значит, мы не можем указать ни одного цилиндра, в котором точно сидит кролик.

Ответ: За 12 вопросов.

Примечание: Можно также доказать, что 11 вопросов не хватит даже в случае, когда цилиндров не 25, а всего 24.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что 11 вопросов может и не хватить	3 балла
Приведён верный алгоритм гарантированного нахождения кролика за 12 вопросов	2 балла
Неточные оценки и/или алгоритмы, требующие более 12 вопросов	0 баллов

11.4. *Пусть* $x, y, z \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} \sin x \cos y & = & \sin z, \\ \cos x \sin y & = & \cos z. \end{cases}$$

Решение:

<u>Способ 1.</u> Возведём обе части каждого из уравнений в квадрат, а затем сложим уравнения почленно. Получим

$$\sin^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \sin^2 y = 1.$$

Представив 1 в правой части в виде $\sin^2 x + \cos^2 x$ и проведя равносильные преобразования, получим $\sin^2 x \sin^2 y + \cos^2 x \cos^2 y = 0$. Каждое слагаемое в левой части неотрицательно, поэтому из уравнения следует что оба слагаемых равны нулю одновременно. Синус и косинус одного числа не могут одновременно обращаться в ноль, поэтому возможны лишь два варианта: 1) $\sin x = \cos y = 0$ и 2) $\sin y = \cos x = 0$. Учитывая, что x и y лежат в первой четверти, получим либо $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, и тогда $z = 0$, либо $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, и тогда $z = \frac{\pi}{2}$.

<u>Способ 2.</u> Сложим левые и правые части уравнений:

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin z + \cos z;$$

$$\sin(x + y) = \sin z + \cos z.$$

Выражение, стоящее в левой части полученного уравнения, не превосходит 1. Покажем, что левая часть уравнения не меньше 1, для чего рассмотрим функцию $f(z) = \sin z + \cos z$ при $z \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$f'(z) = \cos z - \sin z = 0 \leftrightarrow \operatorname{tg} z = 1 \leftrightarrow z = \frac{\pi}{4},$$

и наименьшее значение функция $f(z)$ принимает в одной из точек 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$. Так как $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, а $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$, это наименьшее значение равно 1. Значит, при всех $z \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ выполнено неравенство $\sin z + \cos z \geqslant 1$, причём равенство достигается при $z = 0$ или при $z = \dfrac{\pi}{2}$.

Из доказанного следует, что уравнение имеет решение только при таких значениях z и при условии $\sin(x+y) = 1 \leftrightarrow x + y = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $\cos y = \sin x$, система приобретает вид $\sin^2 x = \sin z$, $\sin^2 y = \cos z$ и, перебрав оба допустимых значения z, получаем ответ.

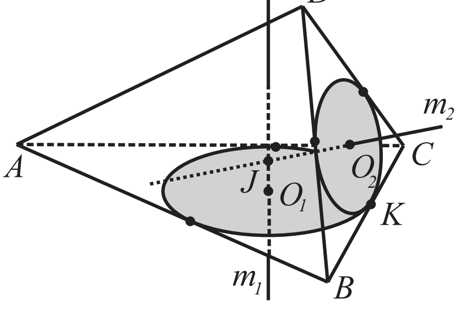
Ответ: $(x;\ y;\ z) = \left(0; \dfrac{\pi}{2};\ 0\right)$ или $(x;\ y;\ z) = \left(\dfrac{\pi}{2}; 0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что $\sin z + \cos z \geqslant 1$ при всех $z \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$	3 балла
Верно получено, но не решено (решено неверно) тригонометрическое уравнение-следствие, содержащее только 2 переменных	2 балла
Приведён верный ответ, но не доказано, что других троек (x, y, z), удовлетворяющих системе из условия, не существует	1 балл
Преобразования и выкладки, не ведущие к ответу	0 баллов

11.5. *В каждую грань треугольной пирамиды вписали окружность. Оказалось, что все четыре вписанных окружности попарно касаются друг друга. Затем из центра каждой окружности построили перпендикуляр к той грани пирамиды, в которой находится эта окружность. Докажите, что все четыре построенных перпендикуляра пересекаются в одной точке.*

Решение: Пусть O_1, O_2, O_3 и O_4 — центры окружностей, вписанных в грани ABC, BCD, CDA и DAB пирамиды $ABCD$. Пусть m_1, m_2, m_3 и m_4 — перпендикуляры к граням пирамиды, восстановленные в точках O_1, O_2, O_3 и O_4 соответственно. Сначала покажем, что эти перпендикуляры попарно пересекаются (см. рисунок).



К решению задачи 11.5

Достаточно доказать, что пересекаются прямые m_1 и m_2 (остальные пять случаев аналогичны). Вписанные в грани ABC и BCD окружности по условию касаются друг друга. Точка их касания обязана лежать на ребре BC — обозначим её буквой K. По свойству касательной к окружности $O_1K \perp BC$ и $O_2K \perp BC$. Тогда плоскость O_1O_2K. перпендикулярна ребру BC. Проведём в плоскости O_1O_2K

через точку O_1 прямую, перпендикулярно прямой O_1K. Эта прямая будет также перпендикулярна и прямой BC, следовательно, будет перпендикулярна плоскости ABC, то есть совпадать с прямой m_1. Мы доказали, что $m_1 \subset O_1O_2K$. Аналогично показывается, что $m_2 \subset O_1O_2K$, то есть прямые m_1 и m_2 лежат в одной плоскости. Так как m_1 и m_2 не параллельны (иначе были бы параллельны грани ABC и BCD), они пересекаются.

Мы имеем 4 попарно пересекающиеся прямые m_1, m_2, m_3 и m_4, причём они не лежат в одной плоскости (иначе в этой плоскости лежали бы центры вписанных окружностей во все 4 грани). Обозначим буквой J точку пересечения каких-то двух из них, например, прямых m_1 и m_2. Если прямая m_3 не проходит через точку J, то она пересекает прямые m_1 и m_2 в двух различных точках, поэтому лежит в плоскости π, образуемой этими прямыми. Прямая m_4, не лежит в плоскости π, поэтому она пересекает её ровно в одной точке. Но тогда она не может иметь общих точек со всеми тремя прямыми m_1, m_2, m_3. Противоречие. Итак, прямая $m_3 \ni J$. Аналогично, $m_4 \ni J$. Значит, все перпендикуляры m_1, m_2, m_3 и m_4 проходят через одну точку J, ч. т. д.

Примечание: Несложно доказать, что точка пересечения четырёх указанных перпендикуляров равноудалена от всех шести рёбер тетраэдра. Это означает наличие сферы (с центром в указанной точке), касающейся всех рёбер тетраэдра (не для всякого тетраэдра такая сфера существует). Тетраэдр, для которого существует сфера, касающаяся всех его рёбер, называется *каркасным.* Можно доказать, что наоборот, из каркасности тетраэдра следует данное в условии задачи свойство. Таким образом, попарное касание вписанных в грани окружностей — это критерий того, что тетраэдр является каркасным.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное доказательство	7 баллов
Доказано,что перпендикуляры пересекаются попарно	5 баллов
Доказано, что плоскость, проходящая через центры двух вписанных в грани окружностей и точку их касания, перпендикулярна соответствующему ребру тетраэдра	3 балла
Рассуждения, из которых не видно идеи доказательства	0 баллов

11.6. *9 шахматистов сыграли двухкруговой шахматный турнир: в каждом круге каждый участник сыграл с каждым одну партию. Известно, что после первого круга у всех участников было разное количество очков. Могло ли так случиться, что по окончании турнира у всех участников снова было разное количество очков, но при этом шахматисты расположились (по количеству набранных очков) в порядке, обратном тому, какой был после первого круга. Ответ* *обоснуйте. В шахматах за победу дается 1 очко, за ничью — пол-очка, за поражение — 0 очков.*

Решение: Приведём пример, когда описанная в условии ситуация будет иметь место. Пусть по окончании первого круга турнирная таблица выглядела следующим образом:

Участники	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	•	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	1	1
2	0,5	•	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	1
3	0,5	0,5	•	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1
4	0,5	0,5	0,5	•	0,5	0,5	0,5	0,5	1
5	0,5	0,5	0,5	0,5	•	0,5	0,5	0,5	0,5
6	0	0,5	0,5	0,5	0,5	•	0,5	0,5	0,5
7	0	0	0,5	0,5	0,5	0,5	•	0,5	0,5
8	0	0	0	0,5	0,5	0,5	0,5	•	0,5
9	0	0	0	0	0,5	0,5	0,5	0,5	•

Из таблицы видно, что игрок, занимающий k-е место ($1 \leqslant k \leqslant 9$) сейчас имеет в своём активе ровно $6{,}5 - 0{,}5k$ очков.

Пусть второй круг оказался сверхрезультативным, и в каждой партии победил тот из игроков, кто по результатам первого круга имел меньше очков. Тогда игрок, занимающий после первого круга место k ($1 \leqslant k \leqslant 9$) выиграл во втором круге ровно $k-1$ партию (у игроков, занимающих места с 1 по $k-1$), проиграв остальные. Значит, по итогам всего турнира он набрал $6{,}5-0{,}5k+k-1 = 0{,}5k+5{,}5$ очков. То есть чем больше k (и ниже место, которое он занимал по окончании первого круга), тем больше очков он набрал в итоге (и тем выше место, которое он в итоге занял). Значит, порядок следования игроков изменился на противоположный.

Ответ: могло.

Примечание: Можно доказать, что приведённый пример турнира в некотором смысле единственный. Точнее, условие задачи выполнится тогда и только тогда, когда по окончании первого круга игроки наберут именно то количество очков, которое приведено в примере из решения, и второй круг сыграют так, как указано в приведённом решении.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ (приведён пример такого турнира с указаниями результатов всех партий)	7 баллов
Верный пример, в котором не показано, как шахматисты играли в первом круге, а указано только количество набранных ими в этом круге очков	5 баллов
Установлено, сколько очков после каждого круга должен иметь каждый участник турнира: $6, 5{,}5, 5, \ldots, 3$ после первого и $6, 6{,}5, 7, \ldots, 12$ после второго	3 балла
Доказано, что в таком турнире (если он есть) в каждой партии второго круга побеждал тот шахматист, у кого после первого круга было меньше очков	2 балла
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов