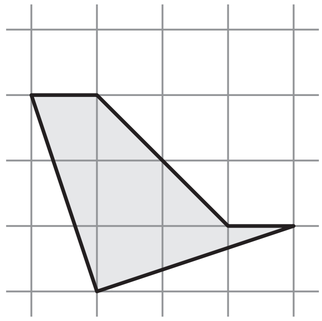
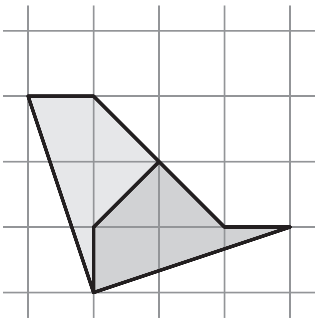
6 класс

Задача 6.1. Разрежьте фигуру на клетчатой бумаге, изображённую на рисунке, на две части, одинаковые по площади и по форме.



Ответ:



Критерии

- 7 б. Верный рисунок.
- 0 б. Во всех остальных случаях.

Задача 6.2. Винни-Пух нашёл бочонок мёда и начал его есть. Через 10 минут к нему присоединился Пятачок. Когда они опустошили бочонок, оказалось, что Пятачку досталась пятая часть того, что было в бочонке изначально. Если Пятачок присоединился бы к Винни-Пуху сразу, то в итоге Пятачку досталась бы треть от того, что было в бочонке. За какое время Винни-Пух опустошил бы бочонок в одиночку? (И Винни-Пух, и Пятачок едят мёд с постоянной скоростью.)

Ответ: 25.

Решение. Из второго условия получаем, что Пятачок ест мёд в 2 раза медленнее Винни-Пуха. Тогда в первом случае Винни-Пух за то время, которое он ел вместе с Пятачком, съел две пятых части бочонка, а всего вместе с Пятачком они за это время съели три пятых бочонка. Значит, за 10 минут Винни-Пух съел $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ бочонка, значит, весь бочонок он съест за $10 : \frac{2}{5} = 25$ минут.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения критерии суммируются:

- +2 б. Замечено, что Пятачок есть мёд в два раза медленнее Винни-Пуха
- +3 б. Замечено, что за то время, которое Винни-Пух ел вместе с Пятачком, они съели $3/5$ бочонка.
- +2 б. Получен верный ответ.

Задача 6.3. На столе в ряд лежали внешне неразличимые монеты весом 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 граммов (именно в таком порядке). Кто-то поменял местами две лежащие рядом монеты. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить, какие именно монеты поменяли местами?

Решение. Положим на левую чашу вторую и третью монету, а на правую — пятую. Если весы остались в равновесии, поменяли местами либо 2 и 3, либо 6 и 7. Тогда сравним вторую и третью монеты и всё определим. Если левая чаша оказалась легче, поменяли местами либо 1 и 2, либо 5 и 6. Тогда сравним первую и вторую монеты и всё определим. Если левая чаша оказалась тяжелее, поменяли местами либо 3 и 4, либо 4 и 5. Тогда сравним третью и четвёртую монеты и всё определим.

Последовательность взвешиваний, вообще говоря, не единственна: например, в начале можно положить на левую чашу первую и пятую монету, а на правую — шестую, а дальше рассуждать по аналогии.

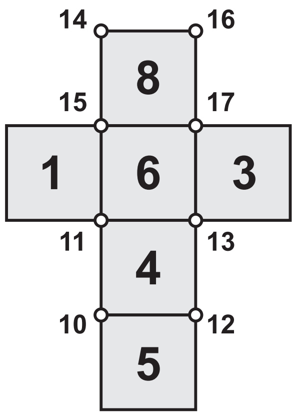
Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

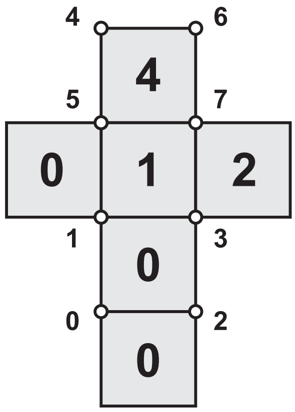
- 6 б. Упущено рассмотрение одного или нескольких случаев, однако в целом алгоритм верный.

Задача 6.4. Костя склеил необычный игральный кубик, на каждой грани которого стоит целое число от 1 до 10, причём все числа различны. В каждой тройке граней с общим углом вычислили сумму чисел и выписали результат. Может ли так быть, что выписали все целые числа от 10 до 17?

Ответ: Да, может. Одно из возможных решений представлено на развёртке куба. Рядом с вершинами куба выписаны соответствующие суммы чисел граней.



Решение. Как можно прийти к решению? Например, так. Поставим в трёх гранях с общей вершиной нули, а в противоположных им граням числа 1, 2 и 4. Тогда суммы чисел в гранях с общей вершиной, которые получились бы на доске для данного кубика, это все целые числа от 0 до 7.



Увеличивая числа в противоположных гранях одновременно на одну и ту же величину, все суммы также увеличиваются на эту величину. Поэтому мы просто постепенно увеличиваем числа в противоположных гранях так, чтобы все числа в гранях оставались различными, а суммы давали значения от 10 до 17.

Критерии

Любой правильно и корректно представленный пример кубика оценивается в 7 баллов. В отсутствие такового критерии суммируются:

- +2 б. Представлен вариант кубика, для которого на доске можно выписать 8 подряд идущих целых чисел, но необязательно от 10 до 17.
- +1 б. Замечено, что при изменении чисел в противоположных гранях на одно и то же число все выписываемые суммы изменяются одинаково.

Задача 6.5. В комнату с чистой доской зашли Аня и Боря. Каждый из них по очереди написал на доске отдельной строкой предложение:

Аня:	В этой строке не больше, чем ... буквы.
Боря:	Если подсчитать все слова, написанные на этой доске, то всего получится ... слов.

К сожалению, в предложениях стёрлись слова, обозначающие числительные. Известно, что предложения были записаны по всем правилам русского языка, и что одно из предложений было ложным. Какое наименьшее числительное могло быть записано в предложении Ани?

Ответ: 42.

Решение. Для начала поймём, какое из написанных предложений может быть верным или ложным.

Рассмотрим предложение Бори. Если оно верно, то значит, в нём написано правильное суммарное количество слов в двух предложениях. В строке Ани не менее 8 слов, в строке Бори — не менее 13. Значит, всего слов не менее $8 + 13 = 21$.

Обратим внимание, что по правилам русского языка в первом предложении числительное обязано заканчиваться на слово “два”, “три” или “четыре”. Если числительное состояло из трёх и более слов, то есть содержало как минимум разряд сотен, то первое предложение обязательно будет верным. Если же в числительном только одно или два слова, то всего слов на доске 21 или 22. А это противоречит правилам записи русского языка второго предложения.

Значит, предложение Бори ложное, а предложение Ани — верное.

Так как числительное в строке Ани заканчивается всегда на “два”, “три” или “четыре”, и количество букв в предложении больше 27, то несложная проверка показывает, что наименьшее подходящее числительное, это “сорок два”.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения критерии суммируются:

- +3 б. Обосновано, почему предложение Бори не может быть истинным.
- +1 б. Обосновано, почему искомое числительное Ани может заканчиваться только на “два”, “три” или “четыре”.
- +2 б. Получен верный ответ.

7 класс

Задача 7.1. Назовём натуральное число *почти квадратом*, если оно имеет вид $a^2 - 1$ для некоторого натурального числа $a > 1$. Докажите, что существует бесконечно много пар почти квадратов, чьё произведение — тоже почти квадрат.

Решение. Возьмем соседние почти квадраты: $(a+1)^2 - 1$ и $a^2 - 1$. Тогда их произведение равно

$$\big((a+1)^2-1\big)\cdot\big(a^2-1\big) = (a+1)^2\cdot a^2-(a+1)^2-a^2+1 = (a^2+a)^2-(a^2+2a+1)-a^2+1 =$$
$$= (a^2+a)^2 - 2(a^2+a+1)+1 = (a^2+a-1)^2-1.$$

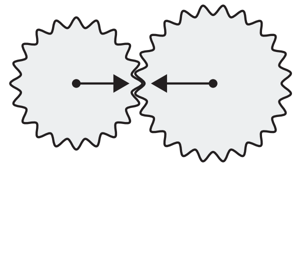
Таким образом, в произведении получается почти квадрат. Выбирая произвольные соседние почти квадраты и перемножая их, получаем бесконечно много пар почти квадратов.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 4 б. Решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка.
- 2 б. Рассмотрено произведение соседних почти квадратов, но не доказано, что их произведение — почти квадрат.
- 0 б. Рассмотрены отдельные частные случаи, не порождающие бесконечное количество примеров.

Задача 7.2. Две шестерёнки с 20 и 24 одинаковыми зубцами сцеплены между собой, а на шестерёнках нарисованы две стрелки (см. рис.). Малая шестерёнка поворачивается на один зубец по часовой стрелке каждую секунду (движение не плавное). Через какое время стрелки на шестерёнках впервые будут смотреть в одинаковом направлении, если в начальный момент времени они смотрят друг на друга?



Ответ: Через 1 минуту.

Решение. Рассмотрим угол между стрелками, если бы мы их откладывали от одной точки. В начальный момент времени угол равен $180°$.

Каждую секунду малая шестерёнка поворачивается на угол $360° : 20 = 15°$, а большая — на угол $360° : 24 = 18°$. Тогда угол между стрелками изменяется на угол $15° + 18° = 33°$.

Чтобы стрелки смотрели в одном направлении, необходимо, чтобы угол изменился на $180° + 360° \cdot n$, где n — целая величина. Выразим изменение угла между стрелками через время s секунд:

$$33° \cdot s = 180° + 360° \cdot n.$$

Опустим знак градуса и найдём наименьшее положительное значение s из данного уравнения. Поскольку, обе части равенства имеют целые значения, то выражение слева делится на 180. Значит, s кратно 60, и наименьшее значение $s = 60$ (секунд).

Замечание. Получается, что при данных условиях стрелки могут смотреть в одном направлении только, если они обе смотрят вправо.

Критерии

- 7 б. Приведён верный ответ и верное решение с обоснованием.
- 3 б. В целом решение верное, но допущена арифметическая ошибка.

В остальных случаях критерии суммируются:

- +1 б. Верно вычислено изменение угла между стрелками за одну секунду.
- +1 б. Верно составлено уравнение, связывающее время и сонаправленность стрелок.

Задача 7.3. За круглым столом должны собраться рыцари Круглого стола. Место каждого рыцаря было обозначено табличкой с его именем. Однако в спешке рыцари расселись как попало, в результате чего ни один из них не оказался на своём месте. Докажите, что все рыцари могут сдвинуться по кругу на некоторое количество мест так, чтобы как минимум двое оказались на своих местах.

Решение. Пусть все рыцари, которых n человек, последовательно сдвигаются по кругу на одно место, пока не вернутся на те места, на которых сидели изначально. Заметим, что каждый рыцарь побывал на n местах, причем ровно один раз он сидел на своем месте. Значит, за все время сдвигов всего n рыцарей побывало на своих местах. Раз в стартовый момент времени никто не сидел на своем месте, то среди оставшихся $n-1$ позиций по принципу Дирихле должна найтись такая, в которой как минимум два рыцаря занимают свои места, что и требовалось доказать.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 2 б. Присутствует идея пересаживания рыцарей по кругу, но рассуждение не доведено до конца.
- 0 б. Задача решена в частных случаях, других продвижений нет.

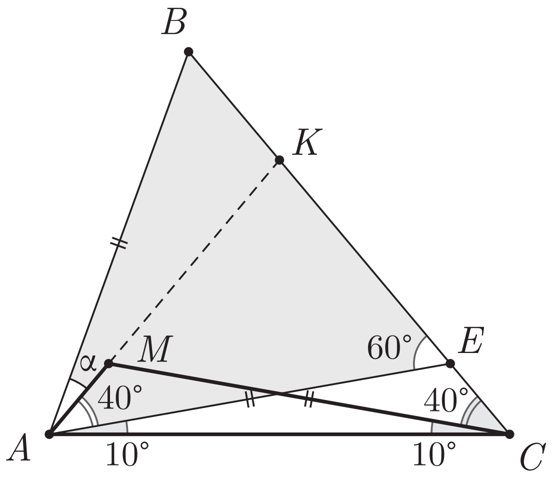
Задача 7.4. В треугольнике ABC взяли точку M так, что $CM = AB$. Оказалось, что углы ACM и CAM соответственно равны 10° и 50°, а угол BCM равен 40°. Найдите угол BAM.

Ответ: 20°.

Решение. Продолжим отрезок AM до пересечения со стороной BC в точке K. На отрезке CK отметим такую точку E, что угол ACE равен 10°.

Тогда треугольники AEC и CAM равны по стороне и прилегающим к ней углам. Поэтому $AE = CM = AB$.

Угол AEB равен 60° как внешний для треугольника AEC. Тогда треугольник ABE равносторонний, поэтому искомый угол BAM равен $60^\circ - 40^\circ = 20^\circ$.

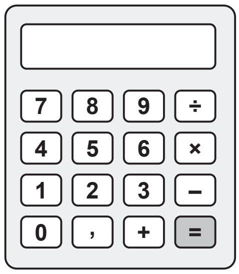


Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 6 б. В решении получен верный ответ, но использовались соображения симметрии без ссылки на равенство треугольников.ф
- 1 б. Ответ не получен, но сделано разумное дополнительное построение с симметричным треугольником .

Задача 7.5. На рисунке изображена схема калькулятора и всех его кнопок (набор цифр, запятая-разделитель дробной части, 4 арифметических действия и вывод на экран). На экране выведено некоторое число от 8 000 до 12 000. Всегда ли можно за 5 нажатий кнопок калькулятора (последнее нажатие должно быть на кнопку вывода "=") изменить число на экране так, чтобы оно отличалось от 10 000 менее, чем на 2%?



Ответ: Нет, не всегда.

Решение. По сути нам нужно выяснить, можно ли гарантировано получить на калькуляторе число в диапазоне от 9 800 до 10 200 за 5 нажатий.

Рассмотрим число 8 165 и докажем, что за 5 нажатий привести его к нужному диапазону не получится.

Для начала поймём, какие варианты нажатий могут быть. Так как последнее нажатие это знак равенства, то предпоследнее, это нажатие на цифру. Также, очевидно, что первое нажатие является арифметическим действием, и значит, второе нажатие может быть только цифрой (знак минус при прочих вариантах не может дать результат лучше). Итак, у нас несколько вариантов:

$$\boxed{op}\ \boxed{N}\ \boxed{N}\ \boxed{N}$$

$$\boxed{op}\ \boxed{N}\ \boxed{op}\ \boxed{N}$$

$$\boxed{op}\ \boxed{N}\ \boxed{,}\ \boxed{N}$$

В первом варианте число изменяется слишком сильно (если производится операция умножения или деления на трёхзначное число) или, наоборот, изменяется недостаточно (если производится сложение или вычитание с трёхзначным числом).

Использование сложения или вычитания во втором или третьем варианте не подходит по тем же причинам — либо число изменятся слишком сильно (при делении или умножении на целое число, большее 1), либо слишком мало (если основное изменение получается засчёт операции сложения/вычитания.

Остаются варианты:

$$\boxed{\div}\ \boxed{N}\ \boxed{\times}\ \boxed{N}$$

$$\boxed{\times}\ \boxed{N}\ \boxed{\div}\ \boxed{N}$$

$$\boxed{\div}\ \boxed{N}\ \boxed{,}\ \boxed{N}$$

$$\boxed{\times}\ \boxed{N}\ \boxed{,}\ \boxed{N}$$

Для числа 8 165 проверим следующие комбинации:

1. $\boxed{\times}\ \boxed{6}\ \boxed{\div}\ \boxed{5}$ (или $\boxed{\div}\ \boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{6}$, или $\boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{,}\ \boxed{2}$)

$$8\,165 \cdot \frac{6}{5} = 9\,798 < 9\,800$$

2. $\boxed{\times}\ \boxed{5}\ \boxed{\div}\ \boxed{4}$ (или $\boxed{\div}\ \boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{5}$, или $\boxed{\div}\ \boxed{0}\ \boxed{,}\ \boxed{8}$)

$$8\,165 \cdot \frac{5}{4} = 10\,206{,}25 > 10\,200$$

Как видно, нижняя и верхняя границы выходят за рамки необходимых нам. Остальные комбинации из отобранных вариантов либо будут давать результат ещё меньше, чем нижняя граница, либо ещё больше, чем верхняя граница.

Замечание. Для того, чтобы найти число-контрпример, можно решить линейное уравнение:

$$10\,000 - \frac{6}{5}x = \frac{5}{4}x - 10\,000$$

и найти пограничное число:

$$x = \frac{400\,000}{49} = 8\,163\frac{13}{49}$$

Вообще, контрпримером может служить любое число в интервале $\left(8\,160; 8\,166\frac{2}{3}\right)$.

Критерии

- 7 б. Приведён верный контрпример и верное решение с обоснованием.
- 6 б. Приведён верный контрпример и в целом верное решение, но проверка некоторых некритичных но возможных комбинаций действий с калькулятором была пропущена.

В остальных случаях критерии суммируются:

- +2 б. Приведено обоснование, как получить искомое число на экране для всех чисел задачи кроме диапазона длины 50 или меньше (например, для всех чисел от 8000 до 12000 кроме чисел от 8150 до 8200).
- +1 б. Правильно сделана классификация всех возможных комбинаций действий с калькулятором при условии задачи.
- +1 б. Правильно сделан отсев комбинаций действий с калькулятором, использующих операции $\boxed{+}$ и $\boxed{-}$ для предполагаемого числа-контрпримера.

8 класс

Задача 8.1. Найдите все трёхзначные числа N, кратные 11, такие, что число $\dfrac{N}{11}$ равно сумме квадратов цифр числа N.

Ответ: 550 или 803.

Решение. Раз число N делится на 11, его можно представить в виде $N = \overline{ab} \cdot 11$ (первый сомножитель является именно двузначным числом: если он будет цифрой, то $N \leqslant 99$, а если больше 100, то $N \geqslant 1100 > 999$). Выполним умножение двузначного числа $\overline{ab}$ на 11 в столбик:

$$\begin{array}{r} a\,b \\ \times\, 1\,1 \\ \hline a\,b \\ a\,b \\ \hline \cdot\;\cdot\;b \end{array}$$

Цифры, стоящие на месте точек, зависят от того, будет ли переход через десяток при сложении цифр a и b. Разберем два случая.

Случай 1: $a + b < 10$. Тогда $N = \overline{ac_1b}$, где $c_1 = a + b$. Условие задачи записывается так: $\overline{ab} = 10a + b = a^2 + (a + b)^2 + b^2$. Перепишем это уравнение в виде $2a^2 + 2(b - 5)a + 2b^2 - b = 0$. Отсюда сразу следует, что цифра b четна. Будем рассматривать это уравнение как квадратное относительно a. Тогда его дискриминант, деленный на 4, равен

$$D_1 = (b - 5)^2 - 2(2b^2 - b) = -3b^2 - 8b + 25.$$

Если $b = 0$, то $D_1 = 25 = 5^2$ и $a = 5$, откуда $N = 50 \cdot 11 = 550$. Если же $b \geqslant 2$, то $D_1 \leqslant -3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 25 = -3 < 0$, т.е. все такие цифры не подходят. Таким образом, в этом случае получается единственный ответ $N = 550$.

Случай 2: $a + b \geqslant 10$. Тогда $N = \overline{(a + 1)c_2b}$, где $c_2 = a + b - 10$. Условие задачи записывается так: $\overline{ab} = 10a + b = (a + 1)^2 + (a + b - 10)^2 + b^2$. Перепишем это уравнение в виде $2a^2 + 2(b - 14)a + (2b^2 - 21b + 101) = 0$. Отсюда сразу следует, что цифра b нечетна. Будем рассматривать это уравнение как квадратное относительно a. Тогда его дискриминант, деленный на 4, равен

$$D_2 = (b - 14)^2 - 2(2b^2 - 21b + 101) = -3b^2 + 14b - 6.$$

Если $b = 1$, то $D_1 = 5$ — не точный квадрат. Если $b = 3$, то $D_2 = 9 = 3^2$ и $a = 4$ или $a = 7$. Поскольку $a + b \geqslant 10$, нам подходит только $a = 7$, откуда $N = 73 \cdot 11 = 803$. Если же $b \geqslant 5$, то $D_2 \leqslant -3 \cdot 5^2 + 14 \cdot 5 - 6 = -11 < 0$, т.е. все такие цифры не подходят. Таким образом, в этом случае также получается единственный ответ $N = 803$.

Замечание. Уравнения $2a^2 + 2(b-5)a + 2b^2 - b = 0$ и $2a^2 + 2(b-14)a + (2b^2 - 21b + 101) = 0$, которые возникли при рассмотрении случаев 1 и 2, можно не решать, а перебрать все цифры b (для первого уравнения — четные, а для второго — нечетные) и таким образом найти ответы.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Один из случаев разобран верно, другой разобран неверно из-за вычислительной ошибки.
- 3 б. Верно разобран случай 1, но случай 2 отсутствует.
- 1 б. Верно найдены оба ответа, других продвижений нет.

Задача 8.2. Каждую клетку квадрата 10×10 покрасили в красный, жёлтый или зелёный цвет. Назовём светофором группу из трёх клеток, расположенных подряд по вертикали или горизонтали, в которой цвета чередуются "красный–жёлтый–зелёный" или "зелёный–жёлтый–красный". Какое наибольшее количество светофоров могло получиться?

Ответ: 80.

Решение. Посмотрим на столбец и оценим, сколько вертикальных светофоров в нём может получиться. Заметим, что у всех таких светофоров должны быть разные жёлтые клетки (одна и та же жёлтая клетка не может принадлежать двум вертикальным светофорам). Предположим, что мы расположили 5 вертикальных светофоров в одном столбце. Тогда у них есть 5 разных жёлтых клеток, и либо две из них находятся рядом, либо одна находится с краю — в обоих случаях не все жёлтые клетки лежат в каких-то светофоров. Значит, в одном столбце может быть максимум 4 светофора. То же верно и для строк. Таким образом, суммарно светофоров не больше $2 \cdot 10 \cdot 4 = 80$. Пример, когда это число достигается, можно построить так: разделим весь квадрат на диагонали, идущие в одном направлении, и покрасим их в следующем порядке: "красная–жёлтая–зелёная–жёлтая…". Нетрудно понять, что в каждой строке и каждом столбце тогда будет по 4 светофора.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения критерии суммируются:

- +1 б. Доказано, что в одном столбце (соотв. строчке) не больше 4 вертикальных (соотв. горизонтальных) светофоров.
- +4 б. Доказано, что светофоров не больше 80.
- +3 б. Приведён пример для 80 светофоров.
- Если утверждение о том, что в одном столбце (строчке) не больше 4 вертикальных (горизонтальных) светофоров, используется, но не объясняется, снимается 1 балл.

Задача 8.3. На острове живут рыжие и блондины. Рыжие всегда лгут, а блондины всегда говорят правду. За круглый стол сели 25 жителей острова. 23 из них сказали: "Цвет волос у моих соседей одинаковый", а оставшиеся двое сказали: "За этим столом сидит хотя бы 13 рыжих". Сколько блондинов могло сидеть за столом?

Ответ: 9 или 11.

Решение. Сразу заметим, что все блондинами быть не могут. Те, кто сказали "За этим столом сидит хотя бы 13 рыжих", либо оба блондины, либо оба рыжие.

Предположим, что они оба рыжие, тогда рыжих за столом не больше 12, и хотя бы два блондина сидят рядом. Но все блондины в этом случае должны были сказать первую фразу, тогда соседи этих блондинов — также блондины, и так далее получаем, что все за столом должны быть блондинами, чего быть не может.

Значит, вторую фразу сказали блондины, рыжих как минимум 13, и все рыжие сказали первую фразу.

Тогда заметим, что у рыжего с одной стороны должен сидеть рыжий, а с другой блондин. Значит, рыжие сидят парами, и их чётное число. Тогда их как минимум 14. С другой стороны, справа от каждой такой пары рыжих должен сидеть хотя бы один блондин, значит, всего рыжих не больше чем две трети от общего количества, то есть не больше 16 (так как $\frac{17}{25} > \frac{1}{3}$).

Значит, рыжих либо 14, либо 16, а блондинов либо 11, либо 9.

Приведём примеры для обоих случаев (Б — блондин, Р — рыжий):

1. Б+БРР$\times$8 (9 блондинов, вторую фразу сказали два блондина, сидящие рядом);
2. ББББ+БРР$\times$7 (11 блондинов, вторую фразу сказали крайние блондины из пятёрки сидящих подряд).

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения критерии суммируются:

- +2 б. Доказано, что рыжих как минимум 13.
- +1 б. Замечено, что все рыжие обязаны сидеть парами.
- +2 б. Показано, что рыжих либо 14, либо 16.
- +2 б. Приведены примеры рассадки для обоих случаев (по 1 баллу за каждый пример).

Задача 8.4. Пусть $f(x) = x^2 + \sqrt{19}x + 1$ и $g(x) = x^2 + \sqrt{17}x + 1$. Обозначим через a и b корни многочлена f, а через c и d — корни многочлена g. Вычислите $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$.

Ответ: -2.

Решение. Запишем разложения квадратных трехчленов $f(x)$ и $g(x)$ на множители: $f(x) = (x-a)(x-b)$ и $g(x) = (x-c)(x-d)$. Кроме того, имеет место равенство $f(x) = g(x) + (\sqrt{19} - \sqrt{17})x$. Теперь заметим, что

$$(c-a)(c-b) = f(c) = g(c) + (\sqrt{19} - \sqrt{17})c = (\sqrt{19} - \sqrt{17})c$$

и

$$(d+a)(d+b) = f(-d) = g(d) - (\sqrt{17} + \sqrt{19})d = -(\sqrt{19} + \sqrt{17})d.$$

Поэтому наше произведение равно

$$\Big((\sqrt{19} - \sqrt{17})c\Big) \cdot \Big(-(\sqrt{19} + \sqrt{17})d\Big) = (\sqrt{17}^2 - \sqrt{19}^2)cd = -2,$$

т.к. по теореме Виета для квадратного трехчлена $g(x)$ произведение cd его корней равно 1.

Критерии

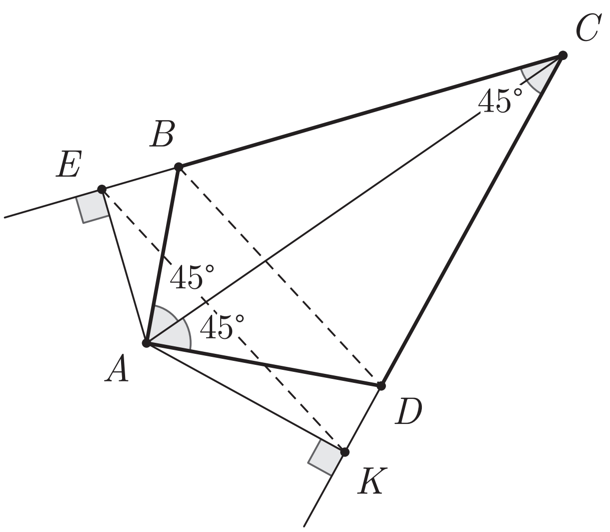
Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 4 б. Допущена вычислительная ошибка в применении теоремы Виета, из-за которой получен неверный ответ.
- 2 б. Установлена связь искомого произведения с разложениями квадратных трехчленов f и g на множители или теоремами Виета, но решение не завершено или завершено неверно.
- 0 б. Ответ неверен из-за вычислительной ошибки при вычислении с помощью формулы для корней квадратного уравнения.

Задача 8.5. В четырёхугольнике $ABCD$ углы BAC, DAC и BCD равны 45°. На прямые BC и CD опустили перпендикуляры AE и AK.

а) Докажите, что прямые EK и BD параллельны.

б) Найдите EK, если $AB = 3$, $AD = 4$.



Ответ: 40°.

Решение. а) Отразим точку A относительно прямых BC и CD и получим точки P и Q. Тогда треугольники PBC и ABC равны, и треугольники COD и CAD равны. Поэтому $CP = CA = CQ$, и углы CPB и CQD равны 45°.

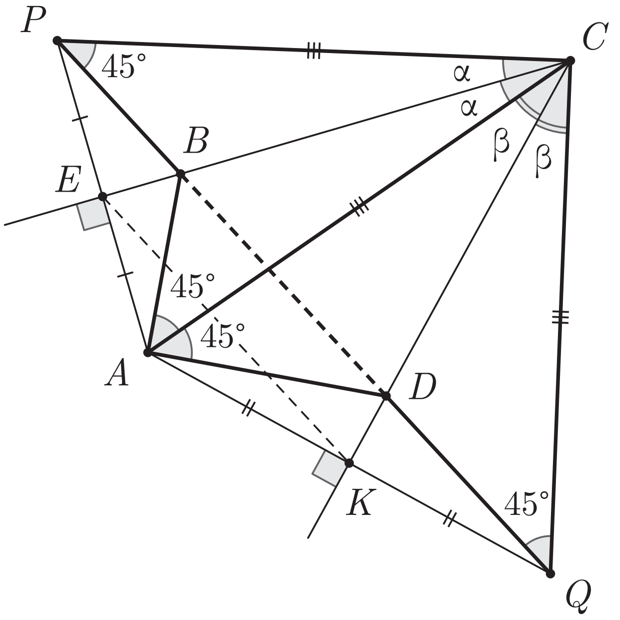
Аналогично, $\angle BCP = \angle BCD$ и $\angle QCD = \angle ACD$. Так как по условию угол BCD равен 45°, то $\angle PCQ = 90^\circ$.

Тогда треугольник PCQ равнобедренный и его острые углы при вершинах P и Q равны 45°. Поэтому точки B и D лежат на отрезке PQ.

Отрезок EK — средняя линия треугольника ABQ, поэтому он параллелен BD.

б) Так как $BP = AB$ и $QD = AD$, то отрезок PQ равен периметру треугольника ABC. Тогда EK равен половине его периметра.

По теореме Пифагора найдём, что $BD = 5$. Значит, $EK = (3 + 4 + 5) : 2) = 6$.



Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 4 б. Проведено доказательство в пункте а), но ответ не получен в пункте б).
- 2 б. В доказательстве пункта а) построены симметричные точки P и Q, но не обоснованно, что точки B и D лежат на отрезке PQ.
- 5 б. Предыдущий критерий при условии получения верного ответа.
- 2 б. Доказательство проведено через центр вневписанной окружности треугольника ABD, но корректно не проведено рассуждение с помощью обратного хода.
- 5 б. Предыдущий критерий при условии получения верного ответа.

9 класс

Задача 9.1. Найдите все натуральные числа n такие, что число n^2 делится на число $[\sqrt{n}]^3$. (Здесь $[x]$ обозначает целую часть от x.)

Ответ: 2, 3, 8, 24 и все точные квадраты.

Решение. Пусть $[\sqrt{n}] = k$, тогда $k^2 \leqslant n \leqslant k^2 + 2k$. Так как число n^2 делится на k^3, то оно делится и на k^2, а потому число n делится на k. Среди чисел на отрезке $[k^2; k^2 + 2k]$ на k делятся только числа $n = k^2$, или $n = k^2 + k$, или $n = k^2 + 2k$.

Первый случай дает ответ $n = k^2$, т.е. нам подходят все точные квадраты.

Во втором случае, подставляя $n = k^2 + k$ в условие, получаем, что число $(k^2 + k)^2$ делится на k^3, откуда следует, что число $(k + 1)^2$ делится на k. Но числа $k + 1$ и k взаимно просты, поэтому $k = 1$ и $n = 2$. Это еще один ответ.

Наконец, в третьем случае, подставляя $n = k^2 + 2k$ в условие, получаем, что $(k^2 + 2k)^2$ делится на k^3, откуда следует, что число $(k + 2)^2$ делится k. Раскрывая скобки, получаем, что на самом деле 4 делится на k, откуда $k = 1$, 2, 4, и $n = 3$, 8, 24 — остальные ответы.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 4 б. Один из случаев $n = k^2$, $n = k^2 + k$ или $n = k^2 + 2k$ разобран неверно.
- 2 б. Доказано, что число имеет вид $n = k^2$, $n = k^2 + k$ или $n = k^2 + 2k$, но других продвижений нет.
- 1 б. Доказано, что все полные квадраты подходят, других продвижений нет.

Задача 9.2. Решите систему уравнений в вещественных числах:

$$\begin{cases} ab + c + d = 1 \\ bc + d + a = 5 \\ cd + a + b = 2 \\ da + b + c = 6. \end{cases}$$

Ответ: $a = \dfrac{9}{4}$, $b = -1$, $c = \dfrac{1}{4}$, $d = 3$.

Решение. Вычтем первые два уравнения и вторые два. Получим

$$(a-c)(b-1) = -4, \quad (a-c)(d-1) = 4.$$

Поделим эти равенства друг на друга: $\dfrac{b-1}{d-1} = -1$, откуда $b-1 = 1-d$ и $b+d = 2$.

Далее, вычтем второе и третье уравнения, а также первое и четвертое:

$$(b-d)(c-1) = 3, \quad (b-d)(a-1) = -5.$$

Вновь поделим эти равенства друг на друга: $\dfrac{c-1}{a-1} = -\dfrac{3}{5}$, откуда $5(c-1) = -3(a-1)$ и $c = \frac{8-3a}{5}$.

Теперь сложим первое и последнее уравнения и подставим в него сумму $b+d = 2$ и $c = \frac{8-3a}{5}$:

$$a(b+d) + 2c + (b+d) = 7 \quad \Rightarrow \quad 2a + \frac{2(8-3a)}{5} + 2 = 7.$$

Решая это уравнение, находим $a = \frac{9}{4}$ и $c = \frac{8-3a}{5} = \frac{1}{4}$. Тогда $a - c = 2$, и из равенств

$$(a-c)(b-1) = -4, \quad (a-c)(d-1) = 4$$

находим $b = -1$ и $d = 3$.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 4 б. Задача верно сведена к линейному уравнению на одну из переменных, но окончательный ответ неверен из-за вычислительной ошибки.
- 1 б. Получен только ответ.

Задача 9.3. Последовательность чисел a_n определяется условиями $a_1 = 20$, $a_2 = 50$, $a_{n+1} = a_{n-1} - \frac{3}{a_n}$. Найдите номер первого отрицательного члена этой последовательности.

Ответ: $n = 336$.

Решение. Перепишем рекуррентное условие последовательности как

$$a_{n+1}a_n = a_n a_{n-1} - 3.$$

Значит, произведение соседних членов последовательности каждый раз уменьшается на 3. Оба начальных члена последовательности положительны, значит, пока это произведение положительно, каждый следующий член последовательности будет оставаться положительным. $a_1 a_2 = 1000$, значит,

$$a_n a_{n+1} = 1000 - 3(n-1).$$

Первый раз это произведение станет отрицательным при $n = 335$, значит, a_{336} будет первым отрицательным членом последовательности.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. В целом решение верное, однако получен неверный ответ из-за логической или арифметической ошибки.

Задача 9.4. В узлах квадратной сетки лежат камешки (камешков конечное количество, в одном узле может быть несколько камешков). Разрешается делать следующий *ход*: выбрать два камешка, переложить один из них в другой узел сетки, а другой переместить на то же расстояние в противоположном направлении. Всегда ли можно за несколько ходов добиться того, чтобы все камешки лежали на одной прямой?

Ответ: Да, всегда.

Решение. Для начала заметим, что можно сдвинуть камешки так, чтоб они попали в четыре вершины единичного квадратика.

Пусть у нас будут вертикальные и горизонтальные линии сетки. Разность координат по горизонтальной оси между самым правым камешком и самым левым камешком мы будем называть *шириной*.

Выберем самый левый и самый правый камешек, и сдвинем левый камешек на 1 вправо, а правый камешек – на один влево. Что могло произойти?

1. Ширина могла уменьшиться.
2. Если ширина не уменьшилась, то тогда суммарное количество самых левых

камешков и самых правых камешков могло уменьшиться
3. Если же суммарное количество крайних слева и крайних справа камешков не уменьшилось, это означает, что при сдвиге самый левый камешек стал самым правым, а самый правый стал самым левым, то есть, что ширина равна 1.

Будем повторять эту процедуру, пока ширина не станет равна 1, то есть, пока камешки не лягут на две соседние вертикали.

Аналогичным образом, сдвигая самый верхний и самый нижний камешек, мы можем добиться того, что все камешки будут на двух соседних горизонталях.

Значит, теперь все камешки лежат в вершинах единичного квадратика.

Теперь, пусть единичный квадратик это $ABCD$. Выберем его вершину, в которой лежит наименьшее количество камешков, пусть, без ограничения общности это вершина A. Сместим все камешки из A в B, и соответствующее количество камешков из C в D. Получится, что камешки лежат ровно в трёх узлах B, C, D.

Теперь запустим процесс: на каждом шаге все камешки будут лежать в трёх узлах сетки. Выберем узел, в котором лежит наибольшее количество камешков, пусть это узел X, выберем узел с наименьшим количеством камешков, пусть это узел Z. Столько камешков, сколько было в Z, переложим из Y в X, и переложим все камешки из Z на такое же расстояние, но в противоположное расстояние в какой-то новый узел T. Узел T теперь новый узел Z.

Таким образом, из этих трёх узлов узел с максимальным количеством камешков увеличил количество своих камешков, то есть, сумма камешков в двух оставшихся узлах уменьшилась. Поэтому процесс конечен и в какой-то момент камешки в одном из двух оставшихся узлов иссякнут.

Обратите внимание, что в данном процессе узел с наибольшим количеством камешков всегда сохраняется, а вот узел с наименьшим количеством камешков может меняться.

Раз камешки лежат только в двух узлах, то они лежат на прямой, проходящей через эти два узла и мы добились требуемого.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 2 б. Доказано, что можно загнать камешки в вершины единичного квадратика.
- 3 б. (не суммируется с предыдущим критерием). Доказано, что можно загнать камешки в вершины треугольника.

- 0 б. Только ответ.

Задача 9.5. Прямоугольник со сторонами 8 и 9 разделили на две части: треугольник и четырёхугольник. Чему равна наибольшая сумма радиусов двух кругов, которые можно поместить в каждую из этих частей?

Ответ: 5.

Решение. Пусть отрезок AE разбивает прямоугольник $ABCD$ на треугольник ABE и четырёхугольник $AECD$. Обозначим центры двух находящихся в кругов как O_1 и O_2, а их радиусы за a и b.

Проведём через центры кругов две прямые параллельно сторонам прямоугольника $ABCD$ — пусть они пересекаются в точке M. Расстояния от центра O_1 до сторон AB и BC не меньше a, аналогично расстояния от центра O_2 до сторон AD и CD не меньше b. Тогда $MO_1 < 9 - (a+b)$ и $MO_2 < 8 - (a+b)$. В то же время расстояние между центрами O_1O_2 не меньше $(a+b)$, так как расстояния от каждого из них до прямой AE не меньше своего радиуса. По теореме Пифагора для треугольника MO_1O_2

$$O_1O_2^2 = O_1M^2 + O_2M^2$$

Пусть $a + b = x$. Тогда

$$x^2 \leqslant (8-x)^2 + (9-x)^2$$

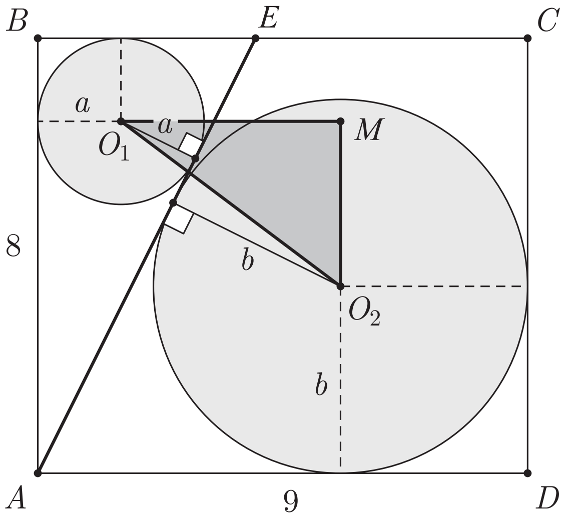
Откуда

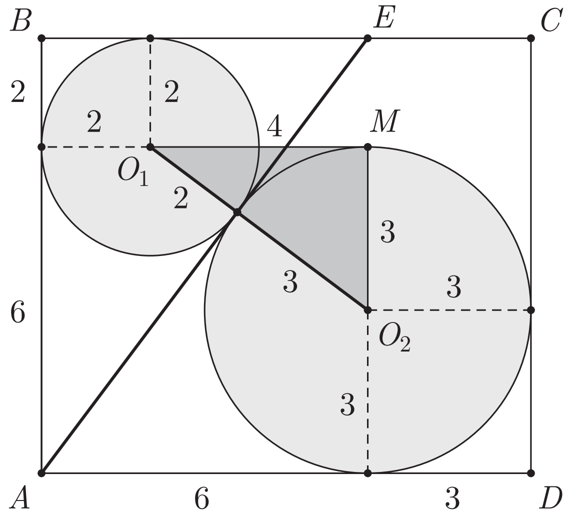
$$x^2 - 34x + 145 \geqslant 0$$

Тогда по смыслу получаем, что

$$x \leqslant 5$$

Сумма радиусов $a + b = 5$ достигается, если круги касаются отрезка AE в одной точке и каждый из них касается еще двух сторон прямоугольника. Этот случай показан на втором рисунке.





Критерии

- Получен обоснованный ответ — 7 баллов
- Получен верный ответ без доказательства максимальности суммы радиусов кругов — 2 балла
- Получен верный ответ и проведено доказательство максимальной суммы радиусов кругов, но не обоснованно существование такой конфигурации — 6 баллов
- Получен неверный ответ либо правильный ответ для случая, когда одна из частей является пятиугольником — 0 баллов

10 класс

Задача 10.1. Дано число $2^{2024} \cdot 3^{2023} \cdot 5^{2022}$. Можно ли расставить все его делители, кроме единицы, по кругу так, чтобы любые два соседних числа не были взаимно просты?

Ответ: Да, можно.

Решение. Поставим сначала числа $d_1 = 2 \cdot 3$, $d_2 = 3 \cdot 5$ и $d_3 = 5 \cdot 2$, а затем будем расставлять оставшиеся делители между ними. Между числами d_1 и d_2 в произвольном порядке поставим все делители, кратные 3. Ясно, что все такие делители не взаимно просты друг с другом, а также с делителями d_1 и d_2, поскольку все они делятся на 3. Далее, между числами d_2 и d_3 поставим все оставшиеся делители, кратные 5. Все эти делители вместе с числами d_2 и d_3 не взаимно просты, т.к. кратны 5. Наконец, поставим между d_3 и d_1 все оставшиеся делители. Поскольку все делители, кратные 3 или 5, уже расставлены, то эти оставшиеся делителя на самом деле в точности степени двойки. Поэтому они и делители d_1 и d_3 все делятся на 2 и также не взаимно просты. Значит, полученная нами расстановка удовлетворяет условию.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 6 б. Все делители верно расставлены в ряд, а не по кругу, при этом первый и последний делители не взаимно просты.
- 2 б. Все делители верно расставлены в ряд, а не по кругу, при этом первый и последний делители взаимно просты .
- 4 б. В решении присутствует идея рассмотрения трех делителей, имеющих вид $2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$, $3^{a} \cdot 5^{b}$ и $5^{m} \cdot 2^{n}$, но окончательная расстановка делителей не верна, поскольку не все делители расставлены.
- 2 б. В решении присутствует идея рассмотрения трёх делителей, имеющих вид $2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$, $3^{a} \cdot 5^{b}$ и $5^{m} \cdot 2^{n}$, но окончательная расстановка делителей не получена.

Задача 10.2. Сколько решений в вещественных числах имеет уравнение $(x-1)^3 = \{(x+1)^3\}$ (здесь $\{t\}$ обозначает дробную часть числа t)?

Ответ: 18.

Решение. Заметим, что по определению дробной части числа справедливы неравенства $0 \leqslant \{(x+1)^3\} < 1$, откуда

$$0 \leqslant (x-1)^3 < 1 \text{ и } 1 \leqslant x < 2.$$

Преобразуем наше уравнение:

$$(x-1)^3 = \{(x+1)^3\} = \{x^3 + 3x^2 + 3x + 1\} = \{(x-1)^3 + (6x^2 + 2)\}.$$

Поскольку число $(x-1)^3$ лежит в промежутке $[0;1)$, оно совпадает со своей дробной частью. Значит, число $6x^2 + 2$ должно быть целым.

Так как $1 \leqslant x < 2$, то $1 \leqslant x^2 < 4$ и $8 \leqslant 6x^2 + 2 < 26$. Поэтому число $6x^2 + 2$ может принимать любое из целых значений на отрезке $[8;25]$, и для каждого такого значения существует ровно один x из промежутка $[1;2)$, который реализует это значение. В результате мы получаем 18 ответов.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 6 б. Решение в целом верное, но неправильно посчитано количество целых точек на отрезке $[8;25]$.
- 3 б. Доказано, что число $6x^2 + 2$ должно быть целым, но решение не завершено.
- 1 б. Получены оценки $1 \leqslant x < 2$, других продвижений нет.

Задача 10.3. Последовательность чисел a_n определяется условиями $a_1 = 20$, $a_2 = 50$, $a_{n+1} = a_{n-1} - \frac{3}{a_n}$. Найдите номер первого отрицательного члена этой последовательности.

Ответ: $n = 336$.

Решение. Перепишем рекуррентное условие последовательности как

$$a_{n+1}a_n = a_n a_{n-1} - 3.$$

Значит, произведение соседних членов последовательности каждый раз уменьшается на 3. Оба начальных члена последовательности положительны, значит, пока это произведение положительно, каждый следующий член последовательности будет оставаться положительным. $a_1a_2 = 1000$, значит,

$$a_na_{n+1} = 1000 - 3(n-1).$$

Первый раз это произведение станет отрицательным при $n = 335$, значит, a_{336} будет первым отрицательным членом последовательности.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

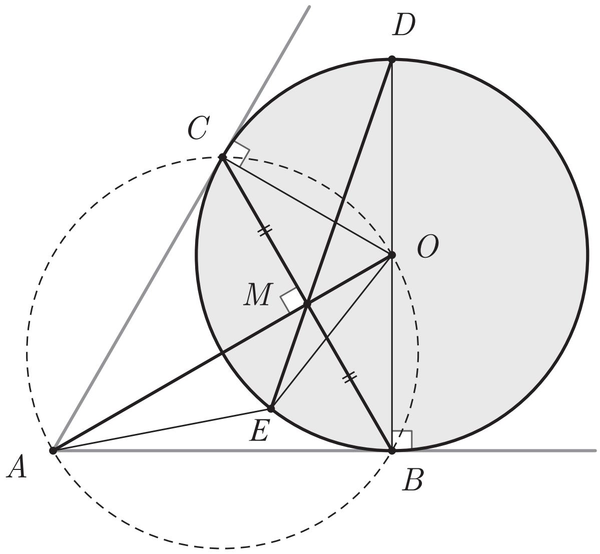
- 5 б. В целом решение верное, однако получен неверный ответ из-за логической или арифметической ошибки.

Задача 10.4. Окружность с диаметром BD касается сторон угла A в точках B и C. Её хорда DE проходит через середину хорды BC, а отрезок AD пересекает окружность в точке F.

а) Докажите, что хорды EF и BC параллельны;
б) Найдите отношение $EF : BC$, если угол BAC равен $60°$.

Ответ: $3 : 7$

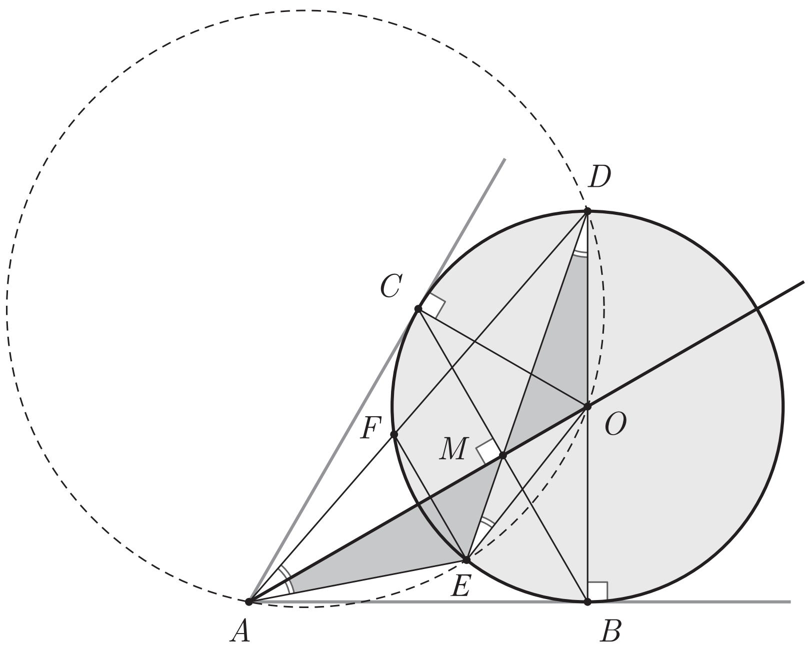
Решение. а) Радиусы OB и OC окружности перпендикулярны сторонам угла по свойству касательной. Поэтому точки B и C лежат на окружности с диаметром OA. (рис 1)



По теореме о произведении отрезков хорд этой окружности $BM \cdot CM = AM \cdot OM$.

С другой стороны, по той же теореме для хорд BC и DE окружности, данной в условии задачи, имеем, что $BM \cdot CM = DE \cdot ME$ или $OM : DM = EM : AM$.

Тогда треугольники DMO и AME подобны, так как имеют равные вертикальные углы с вершиной M и пропорциональные стороны при этой вершине. Значит, равны их углы MAE и MDO, поэтому отрезок OE виден из точек A и D под равными углами, и четырехугольник $ADOE$ вписанный (рис 2).



Так как $OE = OD$, то равны углы DAO и EAO. Тогда точки E и F симметричны относительно биссектрисы угла BAC, так как при такой симметрии данная окружность переходит в себя, а луч AF — в луч AE. Точки B и C так же симметричны относительно прямой AO. Тогда отрезки EF и BC перпендикулярны прямой AO и поэтому параллельны друг другу.

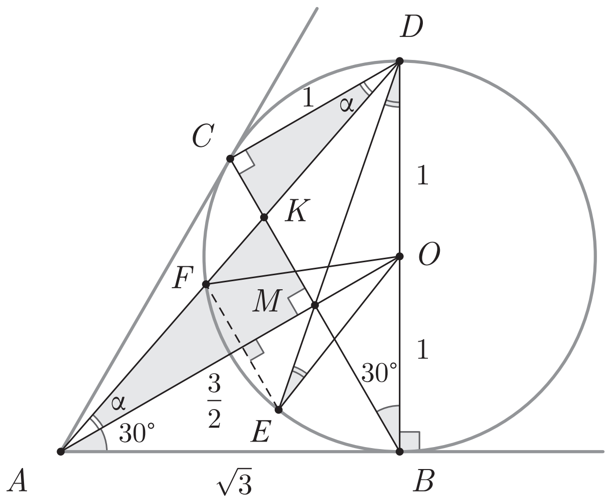
б) Пусть данная окружность имеет радиус 1 и вписана в угол с величиной $60°$. Угол BCD равен $90°$, поскольку он опирается на ее диаметр, а угол CBD равен $30°$. Тогда $CD = 1$, $OM = 0{,}5$ и $AM = 1{,}5$.

Из треугольника MAB по теореме Пифагора найдем $AB = \sqrt{3}$, а из треугольника ADB найдем $AD = \sqrt{7}$.

Так как $CD \parallel AM$, треугольники CKD и MAK подобны, поэтому $AK : DK = 3 : 2$. Значит, $AK = \frac{3\sqrt{7}}{5}$.

Обозначим KAM за α. Тогда $\cos\alpha = \frac{5}{2\sqrt{7}}$. Откуда $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{14}$.

По теореме о квадрате касательной $AF \cdot AD = AB^2 = 3$. Откуда $AF = \frac{3}{\sqrt{7}}$. Треугольник AFE равнобедренный, поэтому $EF = 2AF\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{7}$. Тогда $EF : BC = 3 : 7$.



Критерии

- 7 б. Проведено верное доказательство и обоснованно получен верный ответ.
- 4 б. Проведено верное доказательство пункта а), но верный ответ в пункте б) не получен.
- 5 б. Проведено верное доказательство пункта а), но ответ в пункте б) неверный из-за арифметической ошибки.

- 1 б. В доказательстве необоснованно использованы соображения симметрии.
- 3 б. Получен верный ответ в пункте б) при отсутствии доказательства в пункте а).

Задача 10.5. На координатной плоскости в некоторых точках с целыми координатами лежит по камешку (камешков конечное количество). Разрешается делать следующий *ход*: выбрать пару камешков, взять некоторый вектор $\vec{a}$ с целыми координатами, и далее один из выбранных камешков сдвинуть на вектор $\vec{a}$, а другой — на противоположный вектор $-\vec{a}$. При этом запрещается класть два камушка в одну точку. Всегда ли можно за несколько ходов добиться того, чтобы все камешки лежали на одной прямой?

Ответ: Да, всегда.

Решение. Пусть (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) — начальные координаты камешков, и пусть
$(x_0, y_0) = \left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, \frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}\right)$ — координаты их центра масс. Рассмотрим прямую ℓ, проходящую через точку (x_0, y_0), на которой лежит бесконечное количество узлов (т.е. точек с целыми координатами). Такая прямая ℓ найдется. Действительно, если $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, то годится прямая $y_0 x = x_0 y$ — на ней лежат узлы вида (mnx_0, mny_0), где $m \in \mathbb{Z}$; если же $(x_0, y_0) = (0, 0)$, то подойдет прямая $y = 0$.

Сделаем ход с 1-м и n-м камешками так, чтобы 1-й камешек попал в некоторый незанятый узел прямой ℓ. (Отметим, что такой ход можно сделать: если 1-й камешек попал в узел A, то n-й камешек попадет в узел A', симметричный A относительно середины отрезка между положениями 1-го и n-го камней до хода; так как возможностей выбора узла A бесконечно много, то для какого-то из них соответствующий узел A' будет незанятым). Сделаем аналогичные ходы со 2-м и n-м камешками, с 3-м и n-м камешками, и т.д., с $(n-1)$-м и n-м камешками.

Теперь все камни, кроме возможно n-го, лежат на прямой ℓ. Но заметим, что в процессе выполнения ходов центр масс камней (x_0, y_0) остается неизменным, и он лежит на прямой ℓ (согласно нашему выбору ℓ). Но отсюда следует, что и оставшийся n-й камень также лежит на ℓ.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 1 б. Сказано, что центр масс системы камешков не меняется при операциях.
- 2 б. (поглощает оба предыдущих критерия).Сказано, что центр масс имеет рациональные координаты.
- 4 б. (поглощает оба предыдущих критерия). Доказано, что существует прямая через центр масс, содержащая бесконечное количество узлов сетки.
- 0 б. Только ответ.

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2024

Заключительный этап   7 апреля

11 класс

Задача 11.1. Последовательность натуральных чисел a_0, a_1, a_2, $\ldots$ определяется следующими соотношениями: $a_0 = 1$, $a_n = kn + (-1)^n a_{n-1}$, где k — фиксированное натуральное число. Сколько существует таких последовательностей, в которых встречается число 2024?

Ответ: 7.

Решение. Докажем, что для любого целого $m \geqslant 0$ справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned}
&a_{4m} = 4mk + 1,\\
&a_{4m+1} = k - 1,\\
&a_{4m+2} = (4m+3)k - 1,\\
&a_{4m+3} = 1.
\end{aligned}$$

Будем доказывать эти формулы индукцией по m. База $m = 0$ проверяется непосредственно. Предположим, что формулы справедливы для всех чисел, не больших $m-1$, и докажем эти формулы для числа m. Поскольку по предположению индукции $a_{4m-1} = 1$, последовательно получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned}
a_{4m} &= k \cdot (4m) + (-1)^{4m} a_{4m-1} = 4mk + 1,\\
a_{4m+1} &= k(4m+1) + (-1)^{4m+1} a_{4m} = (4km + k) - (4mk + 1) = k - 1,\\
a_{4m+2} &= k(4m+2) + (-1)^{4m+2} a_{4m+1} = (4km + 2k) + (k - 1) = (4m+3)k - 1,\\
a_{4m+3} &= k(4m+3) + (-1)^{4m+3} a_{4m+2} = (4km + 3k) - (4km + 3k - 1) = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, наши формулы доказаны.

Теперь, используя эти формулы, посмотрим, какие члены нашей последовательности могут равняться 2024. Ясно, что числа вида a_{4m} и a_{4m+3} не могут равняться 2024: числа вида a_{4m} нечётны, а числа вида a_{4m+3} равны 1. Далее, числа вида a_{4m+1} могут равняться 2024 только при $k = 2025$, что дает нам один пример последовательности.

Наконец, предположим, что для некоторого целого неотрицательного m число a_{4m+2} равно 2024. Мы получаем следующее уравнение: $(4m+3)k = 2025$. Заметим, что сомножитель $4m+3$ дает остаток 3 при делении на 4, а число 2025 дает остаток 1 при делении на 4. Значит, число k, во-первых, должно быть делителем числа 2025, а во-вторых, должно иметь остаток 3 при делении на 4 (т.к. $3 \cdot 3 \equiv 1 \pmod 4$). Поскольку $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, число k имеет вид $3^\alpha \cdot 5^\beta$, где $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и $\beta \in \{0, 1, 2\}$. Для того, чтобы число k такого вида давало бы остаток 3 при делении на 4, необходимо и достаточно, чтобы степень α была бы нечетной (поскольку $5 \equiv 1 \pmod 4$ и $3^\alpha \equiv 4(-1)^\alpha \pmod 4$). Получаем ещё 6 возможных значений k: 3, $3 \cdot 5$, $3 \cdot 5^2$, 3^3, $3^3 \cdot 5$, $3^3 \cdot 5^2$. Вместе с вариантом $k = 2025$ получаем 7 возможных последовательностей.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Доказано, что число k может быть делителем числа 2025, дающим остаток 3 при делении на 4, но окончательный ответ неверен из-за пропущенного случая или вычислительной ошибки.
- 3 б. Методом математической индукции доказаны формулы для элементов последовательности, дальнейших продвижений нет.
- 1 б. Обоснованно получен ответ $k = 2025$.

Задача 11.2. На доске написано 20-буквенное слово, состоящее только из букв A и B. Назовем *крутизной* слова количество способов стереть некоторые его буквы так, чтобы на доске остались четыре буквы, образующих комбинацию ABBA. Например, слово ABBAAB имеет крутизну 2, поскольку нужную комбинацию можно получить двумя способами: **ABBA**AB и **ABB**A**A**B. Какова наибольшая возможная крутизна слова, выписанного на доске?

Ответ: $5^2 \cdot C_{10}^2 = 1125$.

Решение. Возьмем произвольное слово длины 20 и будем последовательно передвигать в нем буквы A, не уменьшая при этом крутизну слова. Ясно, что в нашем слове должно быть хотя бы две буквы B, иначе крутизна слова равна 0. Далее, предположим, что в слове между двумя буквами B есть буква A, т.е. слово имеет вид ...B...**A**...B ...Посмотрим, с какой стороны от буквы **A** больше букв A, и передвинем выделенную букву **A** в тот конец слова, где их меньше. Заметим, что при таком перемещении буквы **A** мы могли разрушить лишь слова вида **A**BBA и ABB**A**, которые давали вклад в размер крутизны исходного слова. Предположим, что мы переместили букву **K** налево. Тогда слова вида **A**BBA сохранились, а вместо слов вида ABB**A**, образованных буквой B слева от **A** и двух букв B и буквы **A**, мы получим как минимум столько же слов, которые образуются из нашей передвинутой буквы **А**, двух любых букв У и любой буквы А, которая стояла в исходном слове справа от буквы **А**.

Получается, что мы можем рассматривать только слова вида А...АВ...ВА...А. Если в левом блоке будет ℓ букв А, а в правом — r букв А, то крутизна такого слова равна $\ell r \cdot C^2_{20-(\ell+r)}$.

Заметим, что при фиксированной сумме $\ell+r$ произведение ℓr будет максимальным, если числа ℓ и r отличаются не больше чем на 1: в противном случае, если, например, $\ell \geqslant r+2$, то переместим одну букву К из левого блока в правый, и крутизна изменится на

$$(\ell-1)(r+1)C^2_{20-(\ell+r)} - \ell r C^2_{20-(\ell+r)} = (\ell-r-1)C^2_{20-(\ell+r)} > 0.$$

Таким образом, можно считать, что $r=\ell$ или $r=\ell-1$, причем $1 \leqslant \ell \leqslant 9$ (иначе в нашем слове не будет или букв А, или букв В).

Теперь возьмем слово, в котором $r=\ell-1$, и заменим последнюю букву В на букву А. При такой замене крутизна слова изменится на величину

$$\ell^2 C^2_{20-2\ell} - \ell(\ell-1)C^2_{20-(2\ell-1)} = \ell(10-\ell)(21-4\ell).$$

Значит, при $\ell \leqslant 5$ крутизна слова после такой замены увеличивается, а при $\ell > 5$ — уменьшается.

Аналогично, посмотрим, что произойдёт, если в слове, в котором $r=\ell$, заменить первую букву В на букву А:

$$\ell(\ell+1)C^2_{20-(2\ell+1)} - \ell^2 C^2_{20-2\ell} = \ell(19-2\ell)(9-2\ell).$$

Получается, что при $\ell < 5$ крутизна слова после такой замены увеличивается, а при $\ell \geqslant 5$ — уменьшается.

Значит, мы можем последовательно совершать такие замены, сводя величину ℓ к значению 5 и увеличивая в процессе крутизну. В итоге, наибольшая крутизна будет у слова, в котором $\ell = r = 5$, и равна она $5^2 \cdot C^2_{10}$.

Замечание. Последнюю часть решения можно провести по-другому. А именно, рассмотрим крутизну слова, в котором $r=\ell$, как функцию от ℓ: $S(\ell) = \ell^2 C^2_{20-2\ell}$. Вычислим ее производную: $S'(\ell) = \ell(8\ell^2 - 117\ell + 380)$. Нас интересует натуральная точка из отрезка $[1;9]$, которая наиболее близка к нулю ℓ_0 этой производной. Поскольку $4{,}5 < \ell_0 < 5$, в качестве такой точки необходимо выбрать число $\ell = 5$, что и приводит нас к примеру. Аналогичные вычисления для случая $r = \ell - 1$ также дают значение $\ell = 5$, но крутизна такого слова оказывается меньше.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Не рассмотрен случай, когда размеры блоков отличаются на 1, но для равных блоков обоснованно получен верный ответ.
- 4 б. Задача обоснованно сведена к случаю, когда слово имеет вид А…АВ…ВА…А, причем размеры крайних блоков отличаются не более чем на 1.
- 2 б. Задача обоснованно сведена к случаю, когда слово имеет вид А…АВ…ВА…А, но дальнейшие рассуждения неверны или отсутствуют.
- 1 б. Приведен верный пример и получено верное численное значение максимальной крутизны числа.

Задача 11.3. Аня и Боря играют в игру. Они по очереди (начинает Аня) выписывают по одной цифре, пока не получится шестизначное число. При этом первая выписанная цифра ненулевая и все выписанные цифры различны. Аня выигрывает, если полученное шестизначное число делится хотя бы на одно из чисел: 2, 3 или 5. Если этого не случается, то выигрывает Боря. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: Аня.

Решение. Пусть $\overline{a_1b_1a_2b_2a_3b_3}$ — итоговое шестизначное число. Пусть также $A = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$ и $B = \{1, 3, 7, 9\}$. Заметим, что если Боря своим третьим ходом поставит цифру из множества A, Аня выиграет, поскольку полученное число будет делиться на 2. Значит, $b_3 \in B$.

Пусть Аня первым ходом выберет цифру $a_1 = 3$, а вторым ходом — цифру $a_2 = 9$. Если Боря на первом или втором ходу выберет цифру из множества B, то своим третьим ходом Аня заберет последнюю оставшуюся цифру из множества B, и Боря вынужден будет взять свою цифру b_3 из A, что приведет к его проигрышу. Значит, Боря вынужден взять первые две свои цифры b_1 и b_2 взяты из множества A. Заметим, что Боря вынужден будет на последнем ходе выбрать либо цифру 1, либо цифру 7, которые дают одинаковый остаток 1 при делении на 3. Поэтому Ане достаточно подобрать цифру a_3 так, чтобы сумма цифр $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3$ давала бы остаток 2 при делении на 3. Поскольку $a_1 = 3$ и $a_2 = 9$ не влияют на остаток этой суммы, все зависит от остатка суммы $b_1 + b_2$. Покажем, как действовать Ане в каждом из случаев.

Если b_1+b_2 делится на 3, то Аня выберет цифру a_3 из набора $\{2, 5, 8\}$: поскольку до этого момента эти цифры мог выбирать только Боря, как минимум одна из этих трех цифр останется не выбранной.

Если $b_1 + b_2$ дает остаток 1 при делении на 3, Аня выберет цифру $a_3 = 1$. Как мы помним, Боря не мог ее выбрать на первых двух ходах.

Наконец, если $b_1 + b_2$ дает остаток 2 при делении на 3, Аня выберет цифру a_3 из набора $\{0, 6\}$. Боря не мог выбрать обе эти цифры, поскольку тогда $b_1 + b_2 = 6$, а мы предположили, что $b_1 + b_2$ дает остаток 2 при делении на 3.

Таким образом, Аня выиграет.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Приведена верная стратегия для первых двух ходов Ани, но в один из случае для последнего хода разобран неверно или не разобран.
- 3 б. Приведена верная стратегия для первых двух ходов Ани, но последний ход разобран неверно или не разобран.
- 0 б. Только ответ.

Задача 11.4. По плоскости ползут три улитки. Каждая улитка движется со своей скоростью прямолинейно и равномерно. Известно, что в некоторые три момента времени все улитки оказывались на одной прямой. Могут ли улитки в какой-то момент времени оказаться в вершинах правильного треугольника?

Ответ: Нет, не могут.

Решение. Введем декартову систему координат, и пусть $(x_i(t); y_i(t))$, $i = 1, 2, 3$ — координаты i-й улитки в момент времени t. Поскольку улитки движутся прямолинейно и равномерно, то $x_i(t)$ и $y_i(t)$ — линейные функции от времени t. Рассмотрим векторы

$$\overline{a}(t) = (x_2(t) - x_1(t); y_2(t) - y_1(t)),$$

$$\overline{b}(t) = (x_3(t) - x_1(t); y_3(t) - y_1(t)),$$

направленные от первой улитки ко второй и третьей соответственно. Тогда условие принадлежности трех улиток одной прямой равносильно коллинеарности векторов $\overline{a}(t)$ и $\overline{b}(t)$.

Это в свою очередь равносильно пропорциональности координат этих векторов:

$$(x_2(t) - x_1(t))(y_3(t) - y_1(t)) = (x_3(t) - x_1(t))(y_2(t) - y_1(t)).$$

Заметим, что это равенство представляет собой уравнение на переменную t степени не выше 2. Нам известно, что у этого уравнения есть три различных корня. Но тогда это уравнение имеет тривиальный вид $0 = 0$, поскольку в противном случае у него не может быть больше двух корней. Значит, это уравнение справедливо при любом t, и улитки всегда находятся на одной прямой и не могут оказаться в вершинах ни одного треугольника.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 4 б. Правильно написано условие коллинеарности векторов $\overline{a}(t)$ и $\overline{b}(t)$.
- 0 б. Только ответ.

Задача 11.5. В пирамиде $SABCD$ с вершиной S известно, что $AB = 9$, $BC = 5$ и $CD = 13$. Найдите длину ребра AD, если вписанная в пирамиду сфера касается основания в точке пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

Ответ: 15.

Решение. Обозначим точки касания сферы с гранью основания и гранями SAB, SBC, SCD и SDA буквами H, K_1, K_2, K_3 и K_4 соответственно.

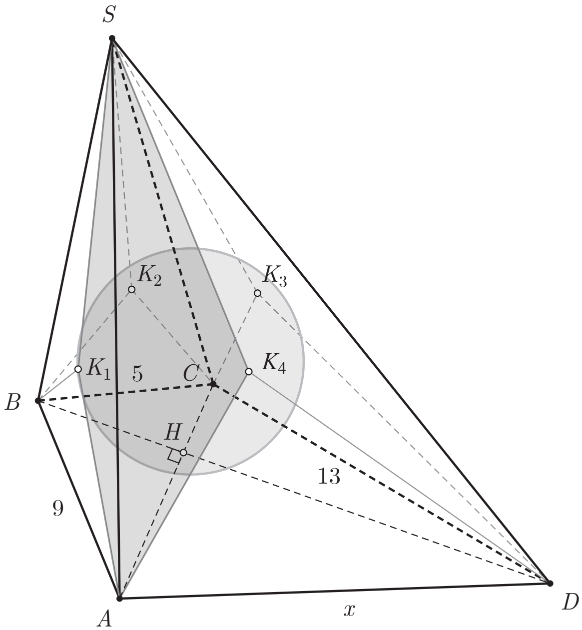
По свойству отрезков касательных, соответствующие отрезки касательных к сфере будут равны. Значит, по признаку равенства по трём сторонам будут равны треугольники

$$\begin{gathered}\triangle K_1AB = \triangle HAB,\\ \triangle K_2BC = \triangle HBC,\\ \triangle K_3CD = \triangle HCD,\\ \triangle K_4DA = \triangle HDA,\end{gathered}$$

а также

$$\begin{gathered}\triangle K_1SB = \triangle K_2SB,\\ \triangle K_2SC = \triangle K_3SC,\\ \triangle K_3SD = \triangle K_4SD,\\ \triangle K_4SA = \triangle K_1SA.\end{gathered}$$

Следовательно, будут равны все соответствующие углы этих треугольников.



Поскольку вертикальные углы между диагоналями $ABCD$ равны, то будут равны углы $\angle AK_1B = \angle CK_3D$ и $\angle BK_2C = \angle DK_4A$.

Рассматривая суммы углов 360° вокруг точек K_1, K_2, K_3 и K_4 получаем, что все углы равны:

$$\angle AK_1B = \angle BK_2C = \angle CK_3D = \angle DK_4A.$$

Так как эти же углы получаются между диагоналями в основании $ABCD$ и образуют вокруг точки H в сумме 360°, то углы прямые и диагонали AC и BD перпендикулярны.

Обозначим длины отрезков AH, BH, CH и DH за a, b, c и d соответственно. Применяя теорему Пифагора для треугольников ABH, BHC и CHD получим равенства:

$$a^2 + b^2 = 9^2,$$
$$b^2 + c^2 = 5^2,$$
$$c^2 + d^2 = 13^2.$$

Складывая первое и третье и вычитая второе равенство, получим $d^2 + a^2 = 13^2 + 9^2 - 5^2 = 15^2$. Из теоремы Пифагора для треугольника DAH находим отрезок $AD = 15$.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Верно доказано, что диагонали основания пирамиды перпендикулярны, но не получен правильный ответ.
- 2 б. Отмечены пары равных треугольников с вершинами в точках качания сферы с гранями, но не сделан вывод о перпендикулярности диагоналей основания.
- 1 б. Получен верный ответ, но не доказано, что угол между диагоналями четырехугольника прямой.

Задача 11.6. На координатной плоскости Oxy рассматривается угол, образованный прямыми $y = x$ и $y = -2x$, целиком лежащий в полуплоскости $y \geqslant 0$. Среди всех парабол вида $y = ax^2 + bx + c$, каждая точка которых находится внутри этого угла либо на его границе, найдите ту параболу, которая принимает наименьшее значение в точке $x = 2$.

Ответ: $y = \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

Решение.

Рассмотрим случай, когда искомая парабола $y = ax^2 + bx + c$ вписана в данный угол, т.е. касается обеих прямых $y = x$ и $y = -2x$. Касание с прямой $y = x$ означает, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = x$ имеет единственное решение, т.е. дискриминант D_1 этого квадратного уравнения равен 0. Запишем это условие: $D_1 = (b-1)^2 - 4ac = 0$.

Аналогично, касание с прямой $y = -2x$ означает, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = -2x$ имеет единственное решение, поэтому дискриминант D_2 этого квадратного уравнения также равен 0: $D_2 = (b+2)^2 - 4ac = 0$.

Из этих двух равенств следует, что $(b-1)^2 = (b+2)^2$, поскольку оба этих выражения равны $4ac$. Решая это уравнение относительно b, получаем $b = -\dfrac{1}{2}$.

Подставим это значение b в формулу для D_1 и найдем $ac = \dfrac{9}{16}$.

Подставим в уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$ значения $x = 2$ и $b = -\dfrac{1}{2}$: получается выражение $4a + c - 1$, которое мы хотим минимизировать при условии $ac = \dfrac{9}{16}$. Заметим, что $a > 0$, поскольку парабола лежит в верхней полуплоскости относительно оси Ox, а значит, и $c > 0$. Поэтому мы можем применить неравенство Коши: $4a + c \geqslant 2\sqrt{4ac} = 3$, откуда $4a + c - 1 \geqslant 3 - 1 = 2$.

Значит, наименьшее значение равно 2, причем оно достигается, когда $4a + c = 2\sqrt{4ac}$. Перенося все слагаемые налево, получаем, что $(2\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 = 0$, откуда $2\sqrt{a} = \sqrt{c}$ и $c = 4a$. Подставляя c в формулу $ac = \dfrac{9}{16}$ и помня, что a, $c > 0$, получаем $a = \dfrac{3}{8}$ и $c = \dfrac{3}{2}$.

Замечание. Можно рассуждать и по-другому. Заметим, что если парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается прямой $y = x$, то $ax^2 + bx + c \geqslant x$ для всех $x \geqslant 0$, поэтому минимальное значение параболы в точке 2 не может быть меньше 2. Докажем, что оно равно 2. Для этого нужно найти параболу, которая касалась бы прямой $y = x$ в точке $(2; 2)$, а также касалась бы прямой $y = -2x$. Любая парабола, касающаяся прямой $y = x$ в точке $(2; 2)$, имеет вид $y = a(x-2)^2 + x$: у этой функции и у функции $y = x$ совпадают значения в точке $x = 2$ и значения производных в этой точке, а потому графики этих функций касаются. Далее, найдем число a из условия касания с прямой $y = -2x$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы квадратное уравнение $a(x-2)^2 + x = -2x$ имело бы единственное решение. Дискриминант этого уравнения равен $D = 9 - 24a$, поэтому уравнение будет иметь единственное решение при $D = 0$ и $a = 3/8$. Подставляя найденное значение a в уравнение параболы $y = a(x-2)^2 + x$, получаем ответ.

Критерии

Любое полное решение, в котором верно получена парабола вида $ax^2 + bx + c$, подходящая под условие задачи, оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Обоснованно найдены коэффициенты a, b и c, но ответ неверен из-за вычислительной ошибки.
- 3 б. Верно найдено значение коэффициента b, но коэффициенты a и c не найдены.
- 3 б. Доказано, что искомая парабола имеет вид $y = a(x-2)^2 + x$, но значение параметра a не найдено.
- 1 б. Доказано, что наименьшее значение равно 2, но других продвижений нет.

Принимались также решения, в которых задача трактовалась так, что искомая парабола должна принимать **своё** наименьшее значение в точке $x = 2$. В этой трактовке ответ, решение и критерии приведены ниже.

Ответ: $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.

Решение. Пусть наша парабола имеет вершину в точке $x = 2$. Тогда ее уравнение выглядит так: $y = a(x-2)^2 + d$ для некоторых чисел a и d.

Рассмотрим случай, когда искомая парабола вписана в данный угол, т.е. касается обеих прямых $y = x$ и $y = -2x$. Касание с прямой $y = x$ означает, что квадратное уравнение $a(x-2)^2 + d = x$ имеет единственное решение, т.е. дискриминант D_1 этого квадратного уравнения равен 0. Запишем это условие: $D_1 = (4a+1)^2 - 4a(4a+d) = 0$.

Аналогично, касание с прямой $y = -2x$ означает, что квадратное уравнение $a(x-2)^2 + d = -2x$ имеет единственное решение, поэтому дискриминант D_2 этого квадратного уравнения также равен 0: $D_2 = (4a-2)^2 - 4a(4a+d) = 0$.

Из этих двух равенств следует, что $(4a+1)^2 = (4a-2)^2$, поскольку оба этих выражения равны $4a(4a+d)$. Решая это уравнение относительно a, получаем $a = \frac{1}{8}$. Подставим это значение a в формулу для D_1 и найдем $d = 4$. Таким образом, мы нашли уравнение искомой параболы:

$$y = \frac{1}{8}(x-2)^2 + 4 \text{ или } y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}.$$

Критерии

Любое полное решение, в котором верно получена парабола вида $ax^2 + bx + c$, подходящая под условие задачи, оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Обоснованно найдено уравнение параболы, но ответ неверен из-за вычислительной ошибки.
- 3 б. Правильно записаны условия минимума параболы в точке $x = 2$ и касания прямых $y = x$ и $y = -2x$, но дальнейших продвижений нет.
- 1 б. Правильно записаны условия минимума параболы в точке $x = 2$, т.е. что вид параболы $y = a(x-2)^2 + d$, при этом значения параметров a и d не найдены.